

Н.Н. Сальников, С.В. Сирик, В.К. Белошапкин

О построении конечномерных математических моделей для двумерных процессов магнитной гидродинамики с использованием метода Петрова–Галеркина

Описано применение метода конечных элементов Петрова–Галеркина к интегрированию двумерных уравнений магнитной гидродинамики и рассмотрен соответствующий выбор весовых функций. Предложен способ выбора стабилизирующих параметров весовых функций, обеспечивающий устойчивость счета.

The application of finite element Petrov–Galerkin method for solving two-dimensional magnetohydrodynamic equations and the appropriate choice of the weighting functions are defined. The method of choosing the stabilizational parameters that suppresses spurious oscillations in the numerical solution is proposed.

Описано застосування методу скінченних елементів Петрова–Гальоркіна до інтегрування двовимірних рівнянь магнітної гідродинаміки та розглянуто відповідний вибір вагових функцій. Запропоновано спосіб вибору стабілізуючих параметрів вагових функцій, що забезпечує стійкість розрахунків.

Введение. В настоящее время метод Петрова–Галеркина (МПП) [1, 2] в форме метода конечных элементов (МКЭ) – один из наиболее универсальных методов построения численных схем для решения задач математической физики. При использовании МПП для расчета задач с доминированием конвективных процессов одним из ключевых вопросов есть корректный выбор весовых функций МПП, предотвращающий появление в численном решении нефизических осцилляций и неустойчивостей, и обеспечивающий стабилизацию численного решения при сохранении приемлемой точности численного решения. В работе [3] предложен вариант выбора весовых функций МПП для интегрирования одно- и двумерных задач конвекции–диффузии. Данные весовые функции и их многомерные обобщения впоследствии успешно применялись для численного решения различных нестационарных задач конвекции–диффузии (в том числе и в тех случаях, когда скорость в конвективном слагаемом с течением времени резко изменяется как по величине, так и по направлению), а также некоторых нелинейных уравнений [4, 5]. Строгий анализ предложений [3] для одномерного случая проведен в [6]. Эти весовые функции (точнее, их частные случаи, когда на каждом элементе разбиения весовая функция квадратична) применяются для интегрирования системы уравнений магнитной гидродинамики (МГД) [7–

11]. Предложен метод выбора стабилизирующих параметров в таких весовых функциях, реализующий идею «адаптивности» [4, 5] (возможности подстраивать их под эволюционирующее во времени решение для обеспечения устойчивости счета). Положения статьи проиллюстрированы численным примером. Отметим, что система уравнений МГД служит корректным математическим описанием для многих задач динамики плазмы [7–9] и представляет собой комбинацию из системы уравнений гидродинамики и уравнений Максвелла. Уравнения МГД представляют собой нелинейную систему дифференциальных уравнений в частных производных, решения которой даже в простых частных случаях, как правило, затруднительно или невозможно найти аналитически, потому для нахождения ее решений следует применять численные методы [12].

Система уравнений МГД

Система уравнений МГД в системе СИ (в эйлеровых координатах [7]) в предположении адиабатичности исследуемых процессов и бесконечной проводимости среды (что оправдано для большинства реальных процессов и важных для практики моментов, к примеру, в случае солнечной плазмы [11]) состоит из уравнений [7–12]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{u} - (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{B} - \vec{B} (\nabla \cdot \vec{u}), \quad (3)$$

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\nabla p + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} + \nu \Delta \vec{u}, \quad (4)$$

где ρ – плотность среды, p – давление, \vec{u} – вектор скорости, \vec{B} – вектор магнитной индукции, ν – коэффициент вязкости, γ – показатель адиабаты, μ_0 – магнитная проницаемость вакуума. Система (1) – (4) описывает многие явления в космической плазме (в нерелятивистском приближении) [9, 10]. Рассмотрим ее в декартовых координатах. Для выделения отдельного решения к системе (1)–(4) следует присоединить начальные и граничные условия [13].

Из системы (1) – (4) можно получать отдельные системы уравнений, описывающие те или иные характерные примеры распространения возмущений в плазме. Рассмотрим двумерный (по пространственным координатам) случай, при котором все величины, характеризующие плазму, не зависят от одной пространственной координаты, например z , и не имеют соответствующей z -компоненты (в случае векторных величин). Тогда все частные производные по z тождественно равны нулю, а векторы скорости и магнитной индукции равны

$$\vec{B} = B_x(t, x, y) \vec{e}_x + B_y(t, x, y) \vec{e}_y + 0 \cdot \vec{e}_z,$$

$$\vec{u} = u_x(t, x, y) \vec{e}_x + u_y(t, x, y) \vec{e}_y + 0 \cdot \vec{e}_z$$

(здесь \vec{e}_x , \vec{e}_y , \vec{e}_z – единичные орт-векторы по соответствующим осям). При сделанных допущениях в координатной записи система (1) – (4) выглядит так:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u_x \frac{\partial p}{\partial x} + u_y \frac{\partial p}{\partial y} + \rho \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u_x \frac{\partial p}{\partial x} + u_y \frac{\partial p}{\partial y} + \gamma p \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = B_y \frac{\partial u_x}{\partial y} - B_x \frac{\partial u_y}{\partial y} - u_x \frac{\partial B_x}{\partial x} - u_y \frac{\partial B_x}{\partial y}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = B_x \frac{\partial u_y}{\partial x} - u_x \frac{\partial B_y}{\partial x} - u_y \frac{\partial B_y}{\partial y} - B_y \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad (8)$$

$$\rho \frac{\partial u_x}{\partial t} + \rho \left(u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{\mu_0} B_y \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) + \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right), \quad (9)$$

$$\rho \frac{\partial u_y}{\partial t} + \rho \left(u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\mu_0} B_x \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) + \nu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right). \quad (10)$$

Для упрощения выкладок будем считать, что ν и γ – константы.

Построение численного решения и выбор стабилизирующих параметров в весовых функциях

Предполагается, что задано разбиение (триангуляция) [14] замкнутого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (области изменения пространственных переменных x и y), где определена начально-краевая задача, на треугольные подмножества (элементы), характеризующее вершинами (узлами) этого множества. Множество номеров этих узлов обозначим символом I , таким образом, каждый индекс $i \in I$ однозначно соответствует некоторому узлу (x_i, y_i) . Узел, в котором задано значение решения отдельного уравнения (т.е. задано граничное условие типа Дирихле [13]), будем называть *граничным* для данного уравнения, в противном случае узел называется *внутренним* (для данного уравнения). Считаем, что каждому узлу $j \in I$ разбиения соответствует непрерывная кусочно-линейная финитная базисная функция $N_j(x, y)$, равная единице в данном узле и нулю во всех остальных узлах, (см. подробно конструкцию базисных функций в [14]), и каждому внутреннему узлу i соответствует весовая функция $W_i(x, y)$ (конструкция весовых функций описана ниже).

Решение системы (5)–(10) аппроксимируем соответствующими приближенными величинами \tilde{p} , \tilde{p} , \tilde{B}_x , \tilde{B}_y , \tilde{u}_x , \tilde{u}_y в виде конечных сумм с неопределенными коэффициентами по системе $\{N_j(x, y)\}_{j \in I}$ базисных функций:

$$\tilde{p}(t, x, y) = \sum_{j \in I} R_j(t) N_j(x, y),$$

$$\begin{aligned}\tilde{p}(t, x, y) &= \sum_{j \in I} P_j(t) N_j(x, y), \\ \tilde{B}_x(t, x, y) &= \sum_{j \in I} B_{xj}(t) N_j(x, y), \\ \tilde{B}_y(t, x, y) &= \sum_{j \in I} B_{yj}(t) N_j(x, y), \\ \tilde{u}_x(t, x, y) &= \sum_{j \in I} U_{xj}(t) N_j(x, y), \\ \tilde{u}_y(t, x, y) &= \sum_{j \in I} U_{yj}(t) N_j(x, y).\end{aligned}$$

В соответствии с процедурой МПГ [1–3], умножим каждое из равенств (5) – (10) на весовую функцию W_i , соответствующую узлу i , и проинтегрируем по множеству Ω . Подставляя выражения для $\tilde{\rho}$, \tilde{p} , \tilde{B}_x , \tilde{B}_y , \tilde{u}_x , \tilde{u}_y в получившиеся тождества, получим следующую полудискретную аппроксимацию – систему обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ) для определения неизвестных коэффициентов разложений:

$$\begin{aligned}\sum_j D_{ij} \frac{dR_j}{dt} + \sum_k \sum_j (T_{ijk}^x + T_{ikj}^x) R_j U_{xk} + \\ + \sum_k \sum_j (T_{ikj}^y + T_{ijk}^y) R_j U_{yk} = 0,\end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned}\sum_j D_{ij} \frac{dP_j}{dt} + \sum_k \sum_j (T_{ikj}^x + \gamma T_{ijk}^x) P_j U_{xk} + \\ + \sum_k \sum_j (T_{ikj}^y + \gamma T_{ijk}^y) P_j U_{yk} = 0,\end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}\sum_j D_{ij} \frac{dB_{xj}}{dt} = \sum_k \sum_j T_{ijk}^y B_{yj} U_{xk} - \sum_k \sum_j T_{ijk}^y B_{xj} U_{yk} - \\ - \sum_k \sum_j T_{ikj}^x B_{xj} U_{xk} - \sum_k \sum_j T_{ikj}^y B_{xj} U_{yk},\end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned}\sum_j D_{ij} \frac{dB_{yj}}{dt} = \sum_k \sum_j T_{ijk}^x B_{xj} U_{yk} - \sum_k \sum_j T_{ijk}^x B_{yj} U_{xk} - \\ - \sum_k \sum_j T_{ikj}^y B_{yj} U_{yk} - \sum_k \sum_j T_{ikj}^x B_{yj} U_{xk},\end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned}\sum_l \sum_j R_l T_{ijl} \frac{dU_{xj}}{dt} + \sum_j \sum_k \sum_l R_l U_{xj} U_{xk} Q_{ijlk}^x + \\ + \sum_j \sum_k \sum_l R_l U_{yj} U_{xk} Q_{ijlk}^y = - \sum_l P_l D_{il}^x - \\ - \frac{1}{\mu_0} \sum_k \sum_j B_{yk} B_{yj} T_{ikj}^x + \frac{1}{\mu_0} \sum_k \sum_j B_{yk} B_{xj} T_{ikj}^y -\end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned}- \nu \sum_l U_{xl} (D_{il}^{xx} + D_{il}^{yy}) + f_{u_x}, \\ \sum_l \sum_j R_l T_{ijl} \frac{dU_{yj}}{dt} + \sum_j \sum_k \sum_l R_l U_{xj} U_{yk} Q_{ijlk}^x + \\ + \sum_j \sum_k \sum_l R_l U_{yj} U_{yk} Q_{ijlk}^y = - \sum_l P_l D_{il}^y + \\ + \frac{1}{\mu_0} \sum_k \sum_j B_{xk} B_{yj} T_{ikj}^x - \frac{1}{\mu_0} \sum_k \sum_j B_{xk} B_{xj} T_{ikj}^y - \\ - \nu \sum_l U_{yl} (D_{il}^{xx} + D_{il}^{yy}) + f_{u_y},\end{aligned} \quad (16)$$

где $D_{ij} \equiv \iint_{\Omega} W_i N_j d\Omega$, $D_{ij}^x \equiv \iint_{\Omega} W_i \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega$, $D_{ij}^y \equiv \iint_{\Omega} W_i \frac{\partial N_j}{\partial y} d\Omega$, $D_{ij}^{xx} \equiv \iint_{\Omega} \frac{\partial W_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega$, $D_{ij}^{yy} \equiv \iint_{\Omega} \frac{\partial W_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} d\Omega$, $T_{ijk} \equiv \iint_{\Omega} W_i N_j N_k d\Omega$, $T_{ijk}^x \equiv \iint_{\Omega} W_i N_j \frac{\partial N_k}{\partial x} d\Omega$, $T_{ijk}^y \equiv \iint_{\Omega} W_i N_j \frac{\partial N_k}{\partial y} d\Omega$, $Q_{ijlk}^x \equiv \iint_{\Omega} W_i N_j N_l \frac{\partial N_k}{\partial x} d\Omega$, $Q_{ijlk}^y \equiv \iint_{\Omega} W_i N_j N_l \frac{\partial N_k}{\partial y} d\Omega$,

а величины f_{u_x} , f_{u_y} – слагаемые, которые получаются после применения ко вторым производным многомерных формул интегрирования по частям [5]. Заметим, что в каждом из уравнений (11) – (16) индекс i приобретает значения, соответствующие внутренним узлам сетки для каждого из уравнений (таким образом, в общем случае, для различных уравнений диапазоны изменения индекса i тоже могут быть различными. Учет начальных и граничных условий различных видов в полудискретных аппроксимациях, получаемых МПГ, достаточно подробно описан в [4, 5].

В качестве весовых функций W_i используем функции, предложенные в [3]. Обозначим через $\Omega(i)$ многоугольник, образованный объединением тех элементов Ω_k , для которых узел i – одна из вершин. Множество $\Omega(i)$ – носитель для функции N_i , а также для функции W_i , которая определяется следующим образом [3]:

$$W_i = N_i + \sum_{k \in K_i} \alpha_{i,k} W_{(i,k)}, \quad (17)$$

где K_i — множество номеров узлов k , каждый из которых соединен одним ребром с узлом i , $\alpha_{i,k}$ — настроечный (*стабилизирующий*) числовой параметр, соответствующий ребру (i, k) и позволяющий регулировать изгиб весовой функции на нем, а также менять форму функции W_i . Формулы для его вычисления приведены ниже. Носителем функции $W_{(i,k)}$ есть объединение элементов Ω_j и $\Omega_{j'}$, для которых ребро (i, k) — общее, она непрерывна на R^2 и квадратична на каждом из элементов Ω_j и $\Omega_{j'}$.

В узлах i и k функция $W_{(i,k)}$ равна нулю, в середине ребра (i, k) принимает значение, равное $(-0,75)$. Способ построения функции $W_{(i,k)}$ подробно описан в [3]. Анализ устойчивости и сходимости численных аппроксимаций МПГ при использовании таких функций (и других, более сложных кусочно-полиномиальных весовых функций) приводится в [6].

Рассмотрим вопрос выбора параметров $\{\alpha_{i,k}\}$ в формуле (17), определяющих величину и направление изгиба весовой функции W_i на ребрах разбиения. Следует отметить, что корректный выбор параметров изгиба — весьма важный этап при построении схемы интегрирования, так как путем надлежащего выбора параметров можно добиться отсутствия неустойчивостей и нефизических осцилляций [1, 2] и наоборот, *разрушить* численное решение при их неправильном выборе. В случае когда все параметры $\alpha_{i,k}$ тождественно равны нулю, из (17) получаем $W_i = N_i$, что соответствует стандартному (классическому) методу Галеркина, который в задачах с доминирующей конвекцией может давать неустойчивые осциллирующие результаты [1, 2]. Выбирая весовую функцию с бóльшим весом со стороны набегающего потока в пределах носителя весовой функции, подобно применению разности против потока, можно добиться устойчивости в получаемых численных решениях задач с преобладающей конвекцией [1–3].

На $(n+1)$ -м шаге интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений

(СОДУ) (11) – (16), стабилизирующие параметры $\alpha_{i,k}$ весовой функции (17), зададим в виде [4, 5]

$$\alpha_{i,k}^{(n+1)} = \theta_{i,k}^{(n+1)} \cdot \alpha(\xi_{i,k}^{(n)}), \quad (18)$$

где функция $\alpha(\xi) = \coth(\xi) - 1/\xi$ (при $\xi = 0$ полагаем $\alpha(0) \equiv \lim_{\xi \rightarrow 0} (\coth(\xi) - 1/\xi) = 0$), $\xi_{i,k}^{(n)} =$

$= (\vec{u}^{(n)} \cdot \vec{h}_{i,k}) / (2\kappa)$, $\vec{h}_{i,k} = (x_k, y_k) - (x_i, y_i)$, $\vec{u}^{(n)}$ — вектор скорости $\vec{u} = \tilde{u}_x \vec{e}_x + \tilde{u}_y \vec{e}_y$ в узле i на предыдущем n -м шаге интегрирования СОДУ. В

более общем случае, в качестве $\vec{u}^{(n)}$ также можно взять взвешенное среднее данных векторов в узлах i и k . С помощью выбора коэффициента κ можно регулировать уровень вводимой в расчетную схему искусственной вязкости — чем меньше значение κ , тем большей будет искусственная вязкость (соответственно, когда κ стремится к нулю справа, и учитывая что $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \alpha(\xi) = \pm 1$, получаем $\alpha_{i,k}^{(n+1)} =$

$= \theta_{i,k}^{(n+1)} \text{sign}(\vec{u}^{(n)} \cdot \vec{h}_{i,k})$). Обычно, в большинстве случаев, для устранения нефизических осцилляций выбор κ в виде $\kappa = \nu$ оказывается вполне достаточным. Параметр $\theta_{i,k}^{(n+1)}$ — некоторая кон-

станта, увеличение или уменьшение которой приводит соответственно к (линейному) увеличению или уменьшению вводимой в численную схему искусственной диссипации [4, 5]. Когда ее значение равно единице, формула (18) переходит в выражение, которое для стационарного линейного одномерного уравнения конвекции-диффузии обеспечивает совпадение численно точного решения в узлах сетки [2]; увеличение этой константы может понадобиться при возникновении в решении больших градиентов и соответствующих тонких слоев, в которых численное решение начинает осциллировать. При $\theta_{i,k}^{(n+1)} = 0$, по определению, получается класси-

ческий метод Галеркина. Геометрическая интерпретация подобного выбора стабилизационных параметров описана в [5]. Отметим также, что для каждого из уравнений (11) – (16) коэффициенты κ и $\theta_{i,k}^{(n+1)}$ могут быть индивидуальными.

Оптимизация использования памяти компьютера при проведении расчетов

В процессе вычислений возникает необходимость хранения в памяти двумерных $\{D_{ij}\}$, $\{D_{ij}^x\}$, $\{D_{ij}^y\}$, $\{D_{ij}^{xx}\}$, $\{D_{ij}^{yy}\}$, трехмерных $\{T_{ijk}\}$, $\{T_{ijk}^x\}$, $\{T_{ijk}^y\}$ и четырехмерных массивов (многомерных матриц) $\{Q_{ijkl}^x\}$, $\{Q_{ijkl}^y\}$. Поскольку базисные и весовые функции финитны, данные массивы разрежены. Отметим, что степень их разреженности зависит от способа нумерации узлов. К примеру, чтобы определить ширину полосы матрицы $\{D_{ij}\}$ (обозначим данную ширину буквой W), нужно для каждого элемента найти модуль максимальной разности между номерами узлов в элементе, а потом взять максимальный из этих модулей (по всем элементам). Потому следует стремиться провести нумерацию узлов так, чтобы минимизировать W [14]. Кроме того, массив $\{T_{ijk}\}$ симметричен по индексам j и k , а массивы $\{Q_{ijkl}^x\}$, $\{Q_{ijkl}^y\}$ – по индексам j и l , что также позволяет экономить память. Важность экономии памяти иллюстрирует следующий пример. Пусть, например, для хранения числа с плавающей запятой используется тип данных, занимающий в памяти 10 байт (таким, к примеру, будет *Delphi*-тип *extended* для хранения вещественных чисел с повышенной точностью). Возьмем по 10 точек на каждой стороне двумерной прямоугольной области Ω , т.е. имеется разбиение области 10×10 . Тогда количество базисных функций будет равняться 100. Для хранения упомянутых массивов в памяти необходимо $(2 \cdot 100^4 + 3 \cdot 100^3 + 3 \cdot 100^2) \cdot 10 = 2030500000$ байт или же около 1936 мегабайт. Таким образом, можно непосредственно убедиться, что для сравнительно небольшого разбиения области (всего 10 на 10) объем необходимой памяти непропорционально большой – около двух гигабайт.

Рассмотрим сначала ситуацию, когда используется МКЭ Галеркина (наборы базисных и весовых функций совпадают) – именно этот случай позволяет продемонстрировать максимальный уровень экономии памяти (вследствие

полной симметричности интегралов от произведений базисных и весовых функций и их производных). Поскольку в таком случае матрица $\{D_{ij}\}$ симметрична, то достаточно сохранять величины $\{D_{ij}\}$ только при $i \geq j$, т.е. элементы, что лежат не выше главной диагонали. Но указанная «половина» матрицы $\{D_{ij}\}$ (при $i \geq j$) все еще содержит много нулей, сохранять которые в целях экономии памяти не следует. Для устранения данного недостатка следует воспользоваться величиной W и сохранять в памяти только ту часть (обозначим ее \tilde{D}) полосы, что находится не выше главной диагонали $\{D_{ij}\}$. На программном уровне это легко реализовать, например, с использованием технологии указателей [15], позволяющей организовывать динамические массивы переменной длины. Таким образом, вместо матрицы $\{D_{ij}\}$ достаточно сохранять матрицу \tilde{D} . Отметим, что различные строки данной матрицы в общем случае имеют различную длину, что может привести к нарушению естественного соответствия между номерами базисных функций и номерами элементов матрицы (поскольку в большинстве сред программирования нумерация элементов динамических массивов начинается с нуля).

Для разрешения данной проблемы поступим следующим образом. Введем функцию целочисленного аргумента Low : $Low(i) = \begin{cases} 0, & i < 0 \\ i, & i \geq 0 \end{cases}$.

Определим также вспомогательный целочисленный массив $LowO$ равенством $LowO[i] = LowO(i-W)$, где W – определенная ранее ширина полосы (с помощью квадратных скобок и заключенных в них целочисленных индексов, как это принято в большинстве языков программирования, осуществляется индексация массивов). Очевидно, что справедливо неравенство $i \geq LowO[i]$. Для числа i величина $LowO[i]$ есть тем минимальным номером j базисной функции, для которого соответствующие величины D_{ij} могут быть ненулевыми. Тогда справедливо равенство $D[i, j] = \tilde{D}[i, j - LowO[i]]$ при $LowO[i] \leq j \leq i$ (отметим, что матрица \tilde{D}

может быть изначально определена как матрица, удовлетворяющая данному равенству). Видно также, что $D[i; j] = 0$ при $j < LowO[i]$. При $j > i$ вычисление $D[i; j]$ в силу симметричности матрицы $\{D_{ij}\}$ сводится к двум предыдущим случаям. Таким образом, охватываются все возможные варианты задания индексов i и j .

Рассмотрим матрицу (массив) $\{T_{ijk}\}$. В МКЭ Галеркина она симметрична по всем трем индексам i, j, k , и следовательно, достаточно хранить лишь ее часть, определяемую неравенствами $i \geq j \geq k$, которая однако, как в предыдущем случае, когда рассматривалась матрица $\{D_{ij}\}$, все еще содержит много нулей. Для того чтобы не хранить нули, вводится матрица \tilde{T} со строками переменной длины посредством равенства

$$T[i; j; k] = \tilde{T}[i; j - LowO[i]; k - \max(LowO[i], LowO[j])]$$

при условиях $k \geq \max(LowO[i], LowO[j])$, $j \geq LowO[i]$, $i \geq j \geq k$. В силу определения величин $LowO[i]$ видно, что $T[i; j; k] = 0$, если хотя бы одно из неравенств $k \geq \max(LowO[i], LowO[j])$, $j \geq LowO[i]$ не выполнено (но выполняется неравенство $i \geq j \geq k$). Если же нарушено неравенство $i \geq j \geq k$, то вычисление $T[i; j; k]$ в силу симметрии сводится к предыдущему случаю (путем переупорядочивания индексов). Описанный случай образно соответствует тому, что вместо хранения всего трехмерного куба $\{T_{ijk}\}$ мы храним часть трехмерной «полосы» \tilde{T} , обрамляющей главную диагональ куба. Анализ матриц $\{D_{ij}^x\}$, $\{D_{ij}^y\}$, $\{T_{ijk}^x\}$, $\{T_{ijk}^y\}$, $\{Q_{ijlk}^x\}$, $\{Q_{ijlk}^y\}$ проводится аналогично предыдущим случаям, однако необходимо дополнительно учитывать, что указанные матрицы не есть симметричными относительно своего последнего индекса (т.е. например, $D_{ij}^x \neq D_{ji}^x$).

Рассмотрим матрицу $\{Q_{ijlk}^x\}$ (случай с матрицей $\{Q_{ijlk}^y\}$ рассматривается полностью аналогично). В силу своего определения она симметрична по трем первым индексам, значит

достаточно хранить только ее часть, что определяется неравенствами $i \geq j \geq l$. Введем функцию целочисленного аргумента Upp :

$$Upp(i) = \begin{cases} CountFunction - 1, & i > CountFunction - 1 \\ i, & i \leq CountFunction - 1 \end{cases}.$$

$CountFunction$ – общее количество базисных функций (нумерация массивов начинается с нуля). Введем также вспомогательный целочисленный массив UpO равенством $UpO[i] = Upp(i + W)$. Очевидно, справедливо неравенство $i \leq UpO[i]$. Для числа i величина $UpO[i]$ служит тем максимальным номером j базисной функции, для которого соответствующие базисные функции N_i и N_j имеют непустое пересечение областей определения. Аналогично предыдущим случаям вводится матрица \tilde{Q} со строками переменной длины с помощью равенства

$$Q[i; j; l; k] = \tilde{Q}[i; j - LowO[i]; l - \max(LowO[i], LowO[j]); k - \max(LowO[i], LowO[j], LowO[l])]$$

при условиях $j \geq LowO[i]$, $l \geq \max(LowO[i], LowO[j])$, $\max(LowO[i], LowO[j], LowO[l]) \leq k \leq \min(UpO[i], UpO[j], UpO[l])$, $i \geq j \geq l$. При нарушении одного из первых трех неравенств выполнено $Q[i; j; l; k] = 0$. Описанный случай образно соответствует тому, что вместо хранения всего четырехмерного гиперкуба $\{Q_{ijlk}\}$ мы храним в оперативной памяти лишь его часть.

Применение изложенной методики хранения информации дает колоссальную экономию памяти: так при разбиении области 10 на 10 расходуется ≈ 10 Мб оперативной памяти (вместо 1936 Мб, описанных в примере, когда технологии экономии памяти не применялись). Кроме того, это позволяет существенно сократить время расчета задачи путем исключения ненужных операций с заведомо нулевыми элементами матриц и повысить быстродействие программы в целом.

При использовании весовых функций, не совпадающих с базисными (общий МКЭ Петрова–Галеркина), матрицы в общем случае не симметричны относительно первого индекса –

например, $D_{ij} \neq D_{ji}$. Однако справедливы все выкладки, базирующиеся на использовании ширины полосы W для оценки минимального и максимального j , при которых может выполняться равенство $D_{ij} \neq 0$ при произвольном фиксированном i . Отсюда следует, что достаточно сохранять в памяти только элементы D_{ij} при $LowO[i] \leq j \leq UpO[i]$, как и в предыдущем случае. Разница (в сравнении с предыдущим случаем) состоит в том, что теперь следует сохранять часть полосы как снизу, так и сверху главной диагонали. Аналогично, все выкладки и неравенства для индексов, полученные с помощью использования понятия ширины полосы W , сохраняются и для матриц $\{D_{ij}^x\}$, $\{D_{ij}^y\}$, $\{T_{ijk}\}$, $\{T_{ijk}^x\}$, $\{T_{ijk}^y\}$, $\{Q_{ijk}^x\}$, $\{Q_{ijk}^y\}$.

Численный пример

Рассмотрим двумерную задачу о распространении цилиндрически симметричных взрывных волн при резком по времени разрежении/уплотнении в ограниченной области пространства (задачу о распространении ударных волн при взрыве вещества) [16–20], первоначально предполагая, что магнитное поле отсутствует (аналогичная задача, но с наличием магнитного поля, рассматривается ниже). Выбор данного примера в качестве тестового обусловлен тем, что:

- хотя задача в общем случае не может быть решена аналитически, но картина поведения физических величин, входящих в систему уравнений МГД, ясна [16–20], что позволяет проконтролировать правильность (адекватность) расчетов и их соответствие реальности;

- в гидродинамической постановке задача есть цилиндрически симметричной, и соответственно, численный метод, который адекватно отображает физику процесса, также должен сохранять это свойство в численном решении (это также будет свидетельствовать о независимости метода от угла наклона и поворота сетки относительно направления распространения возмущения, что также проблемный момент для многих численных методов [16–19]);

- данную задачу легко модифицировать путем добавления в систему магнитного поля, что позволяет проверить работоспособность метода при интегрировании полной системы МГД (1) – (4) (с наличием магнитного поля).

Задачу рассматриваем на прямоугольнике $\{(x, y) : -L_x \leq x \leq L_x, -L_y \leq y \leq L_y\}$. Для однозначного определения решения следует задать начальные и граничные условия. Начальные условия (при $t = 0$): плотность $\rho = \rho_0$, начальное распределение давления $p = p_0 e^{-S_0(x^2+y^2)}$ моделирует «взрыв», векторы скорости и магнитного поля равняются нулю (пока рассмотрим чисто гидродинамическую задачу). В данной задаче в начальный момент времени задается круг уплотнения, начальная величина которого регулируется параметром p_0 ; характерный размер (радиус) круга регулируется параметром S_0 . В качестве граничных условий для скорости ставятся условия непротекания вещества за границы области, т.е. $u_n = 0$, где u_n – нормальная компонента вектора скорости, \vec{n} – нормаль к границе области. Для плотности, давления и компонент магнитного поля граничные условия получаются путем непрерывного продолжения начальных условий на границу области.

Зададим тестовые значения параметров для данной задачи. Пусть $L_x = L_y = 1/2$, $\gamma = 5/3$, $\rho_0 = 1$, $p_0 = 1$, $S_0 = 15$, $\nu = 10^{-6}$ и используется равномерное разбиение области на 20×20 узлов. В (18) полагаем $\kappa = \nu$ и все коэффициенты $\theta_{i,k}^{(n+1)} = 1/2$. На рис. 1 изображен график поверхности для давления в начальный момент времени $t = 0$.

На рис. 2 наблюдаем осцилляции (неустойчивости) численного решения, полученного классическим МКЭ при эволюции системы во времени (приведен график в момент $t = 0,3$). Мелкие «гофрировочные» волны сверху на поверхности решения не имеют физического смысла и есть следствием неустойчивости численного метода.

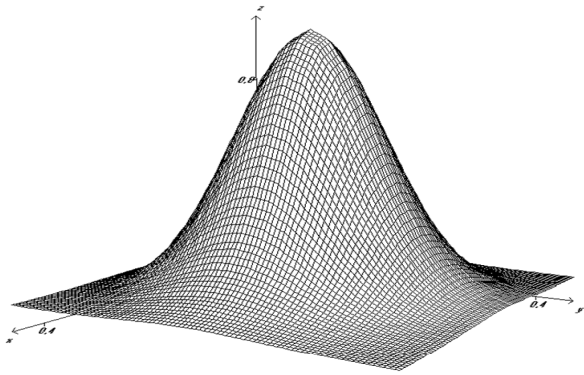


Рис. 1. Распределение давления при $t = 0$

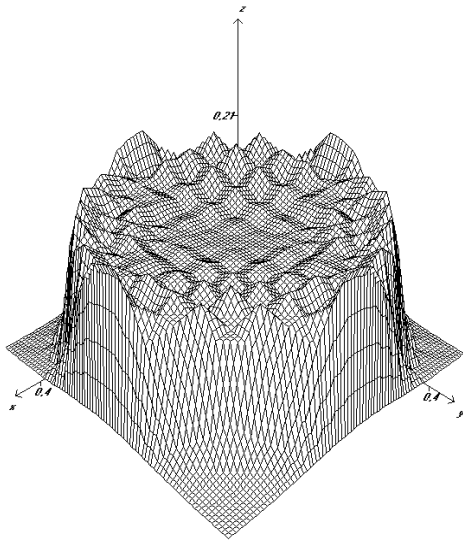


Рис. 2. Распределение давления при $t = 0,3$ (МКЭ Галеркина)

На рис. 3 в этот же момент времени изображена поверхность давления, полученная с помощью предложенного в статье варианта МПГ; видно, что нефизические осцилляции отсутствуют и

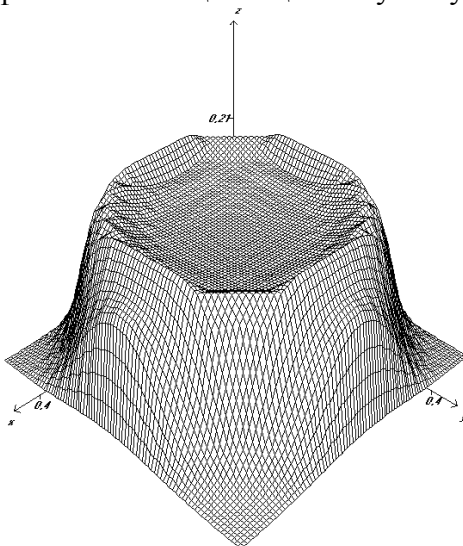


Рис. 3. Распределение давления при $t = 0,3$ (МПГ)

решение в этом плане устойчиво. Кроме того, сохраняется симметрия волны, что свидетельствует о независимости предложенного варианта МПГ от наклона и поворота сетки относительно направления распространения волны. Отметим, что при использовании грубых сеток в решении МКЭ Галеркина могут появляться сильные неустойчивости и не соответствующие физическому смыслу *выбросы* решения, в то время как предложенный МПГ в данной ситуации позволяет получить решение, свободное от указанных недостатков. На рис. 4 изображен график решения МКЭ Галеркина в момент времени $t = 0,37$ при использовании разбиения 10×10 узлов, а на рис. 5 – решение с помощью МПГ при тех же условиях.

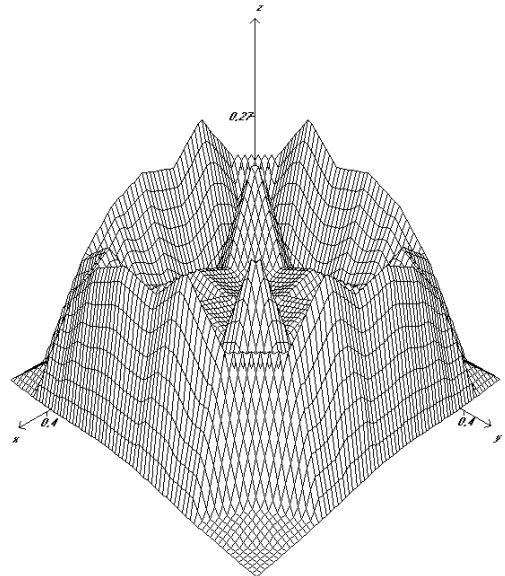


Рис. 4. Распределение давления при $t = 0,37$ (МКЭ Галеркина)

Теперь рассмотрим эту же задачу, но уже при наличии магнитного поля: при $t = 0$, а также на границе области, положим $B_x = B_y = \sqrt{2\pi}$ [16]. Добавление магнитного поля приводит к тому, что ударная волна теряет свою симметрию и вытягивается вдоль магнитного поля [19]. На рис. 6 и 7 показано распределение плотности и давления в момент времени $t = 0,3$ (в целях демонстрации адекватности и работоспособности метода при использовании грубых сеток используется разбиение в 10×10 узлов, все остальные параметры задачи и расчета такие же, как и в предыдущем случае). Из рис. 6 видно, что в центре об-

ласти образуется разреженная зона с низкой плотностью, однако в отличие от предыдущего цилиндрически симметричного решения, в данном случае эта зона вытянута вдоль магнитного поля, причем на концах зоны наблюдается резкий скачок плотности (что соответствует физике процесса, а также расчетам [16–19], проведенным другими методами).

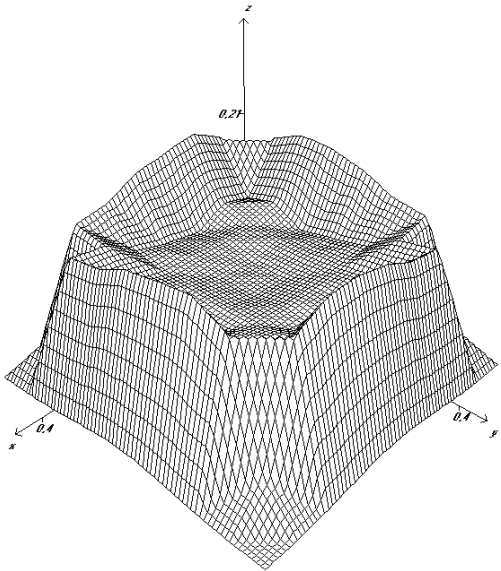


Рис. 5. Распределение давления при $t = 0,37$ (МПГ)

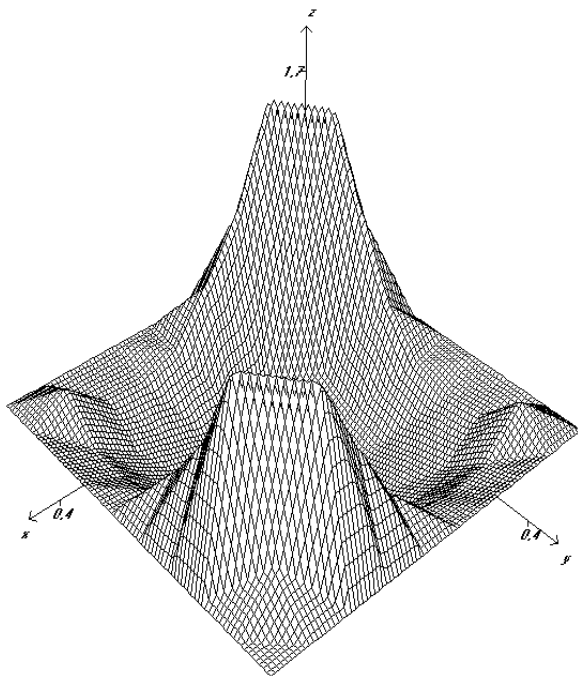


Рис. 6. Распределение плотности при $t = 0,3$ (МПГ)

При интегрировании возникающих СОДУ использованы явный стандартный метод Рунге–

Кутта четвертого порядка [21, 22] и явный адаптивный метод третьего порядка [22]. Шаг по времени $\tau = 10^{-3}$ (начальный для метода [22], при этом в настройках данного метода выставлялись значения допустимой абсолютной и относительной ошибок интегрирования СОДУ, также равные 10^{-3}). Отметим, что применение неявных методов привело бы к необходимости решения нелинейных алгебраических систем [21, 23, 24].

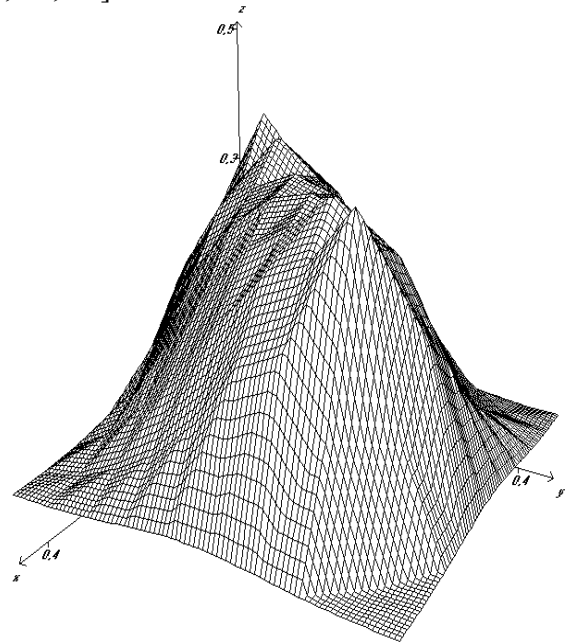


Рис. 7. Распределение давления при $t = 0,3$ (МПГ)

Заключение. Применение метода конечных элементов Петрова–Галеркина с квадратичными весовыми функциями [3] к интегрированию уравнений магнитной гидродинамики с двумя пространственными переменными (отметим, что многие практически важные физические задачи с МГД-процессами могут быть сведены к данному двумерному случаю; кроме того, формулы и выкладки для трехмерного случая имели бы еще более громоздкий вид и потеряли бы наглядность, присущую двумерному случаю, рассмотрение которого, тем не менее, отражает все особенности, присущие общему многомерному случаю). Построена конечномерная модель в виде нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Предложен способ выбора стабилизирующих параметров в весовых функциях МПГ, при использовании которого

численные аппроксимации обладают стабилизирующими свойствами, а решение, соответственно, свободно (частично или полностью) от неустойчивостей и осцилляций, не имеющих физического смысла. Эффективность и работоспособность предложенных в статье методов подтверждены численными расчетами задачи о распространении цилиндрически симметричной взрывной волны, причем рассмотрена как чисто гидродинамическая постановка данной задачи (без магнитного поля), так и постановка с его наличием. В обеих постановках предлагаемая версия МКЭ дала результаты, полностью соответствующие реальной физике процесса и согласующиеся с расчетами, проведенными другими авторами, причем даже в случае использования очень грубых сеток (что в нашем случае было обусловлено ограничениями мощности доступной нам вычислительной техники).

В дальнейшем планируется проводить исследование способов усовершенствования рассмотренной в статье версии МКЭ (в плане выбора весовых функций и настройки стабилизирующих параметров). Также планируется реализация вычислений в соответствии с предложенной методикой на кластерных системах с целью применения к решению задач физики плазмы в космосе, а также задач, связанных с реализацией управляемого термоядерного синтеза.

1. *Roos H.-G., Stynes M., Tobiska L.* Robust numerical methods for singularly perturbed differential equations. – Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 2008. – 604 p.
2. *Fries T.P., Matthies H.G.* A Review of Petrov–Galerkin Stabilization Approaches and an Extension to Meshfree Methods. – Germany; Brunswick: Technische Universität Braunschweig, Informatikbericht-Nr., 2004. – 71 p.
3. *Сальников Н.Н., Сирик С.В., Терещенко И.А.* О построении конечномерной математической модели процесса конвекции–диффузии с использованием метода Петрова–Галеркина // Проблемы управления и информатики. – 2010. – № 3. – С. 94–109.
4. *Сирик С.В., Сальников Н.Н.* Численное интегрирование уравнения Бюргера методом Петрова–Галеркина с адаптивными весовыми функциями // Там же. – 2012. – № 1. – С. 94–110.
5. *Молчанов А.А., Сирик С.В., Сальников Н.Н.* Выбор весовых функций в методе Петрова–Галеркина для интегрирования двумерных нелинейных уравнений типа Бюргера // Математические машины и системы. – 2012. – № 2. – С. 136–144.
6. *Сирик С.В., Сальников Н.Н., Белошапкин В.К.* Выбор весовых функций в методе Петрова–Галеркина для интегрирования линейных одномерных урав-

- нений конвекции–диффузии // УСиМ. – 2014. – № 1. – С. 38–47.
7. *Ладиков-Роев Ю.П., Черемных О.К.* Математические модели сплошных сред. – К.: Наук. думка, 2010. – 551 с.
 8. *Куликовский А.Г., Любимов Г.А.* Магнитная гидродинамика. – М.: Логос, 2005. – 328 с.
 9. *Пикельнер С.Б.* Основы космической электродинамики. – М.: Наука, 1966. – 408 с.
 10. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. VIII. Электродинамика сплошных сред. – М.: Физматлит, 2001. – 656 с.
 11. *Прист Э.Р.* Солнечная магнитогидродинамика. – М.: Мир, 1985. – 500 с.
 12. *Solution Adaptive MHD for Space Plasmas: Sun-to-Earth Simulations / T.I. Gombosi, K.G. Powell, De Zeeuw D.L. et al.* // Computing in Science & Engineering. – 2004. – 6 (2). – P. 14–35.
 13. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 736 с.
 14. *Сегерлинд Л.* Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. – 392 с.
 15. *Страуструп Б.* Язык программирования C++. Спец. изд. – М.: ООО «Бином-Пресс», 2006. – 1104 с.
 16. <http://www.astro.virginia.edu/VITA/ATHENA/blast.html>
 17. *Londrillo P., Del Zanna L.* High-order upwind schemes for multidimensional magnetohydrodynamics // The Astrophysical J. – 2000. – 530. – P. 508–524.
 18. *Balsara D.S., Spicer D.S.* A Staggered Mesh Algorithm Using High Order Godunov Fluxes to Ensure Solenoidal Magnetic Fields in Magnetohydrodynamic Simulations // J. of Computational Physics. – 1999. – 149. – P. 270–292.
 19. *Zachary A.L., Malagoli A., Colella P.* A higher-order Godunov method for multidimensional ideal magnetohydrodynamics // Siam J. Sci. Comput. – 1994. – 15 (2). – P. 263–284.
 20. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. – М.: Физматлит, 2001. – 736 с.
 21. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 512 с.
 22. *Скворцов Л.М.* Простые явные методы численного решения жестких обыкновенных дифференциальных уравнений // Выч. методы и программирование. – 2008. – Т. 9 – С. 154–162.
 23. *Ортега Дж., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. – М.: Мир, 1975. – 563 с.
 24. *Михеев С.Е., Михеев В.С.* Точная релаксация с учетом невязки // Выч. технологии. – 2009. – Т. 14, № 2. – С. 74–84.

Поступила 22.04.2014

Тел. для справок: +38 067 662-2595, +38 095 575-6543 (Киев)

E-mail: salnikov.nikolai@gmail.com, accandar@gmail.com

© Н.Н. Сальников, С.В. Сирик, В.К. Белошапкин, 2014