УДК 007; 681.3

Е.И. СУКАЧ

МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-СЛОЖНЫХ СИСТЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВЕРОЯТНОСТНО-АЛГЕБРАИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Abstract. *The method of research of the functionally complex systems is demonstrated with usage of the probabilistic-algebraic modeling, which makes it possible to take into account probabilistic character of states of systems components and uncertainty of the ratios, which set the links between these components.*
Key words: *probabilistic-algebraic modeling, reliability of complex system, algebra, uncertainty of the data, uncertainty of operations.*

Аннотація. *Розглядається метод дослідження функціонально-складних систем з використанням ймовірнісно-алгебраїчного моделювання, що дозволяє врахувати ймовірнісний характер станів компонентів систем і невизначеність відносин, що задають зв'язки між цими компонентами.*
Ключові слова: *ймовірнісно-алгебраїчне моделювання, надійність складної системи, алгебра, невизначеність даних, невизначеність операцій.*

Аннотация. *Рассматривается метод исследования функционально-сложных систем с использованием вероятностно-алгебраического моделирования, позволяющего учесть вероятностный характер состояний компонентов систем и неопределённость отношений, задающих связи между этими компонентами.*
Ключевые слова: *вероятностно-алгебраическое моделирование, надёжность сложной системы, алгебра, неопределённость данных, неопределённость операций.*

1. Введение

Объектом исследования являются сложные системы (СС), которые представляют собой совокупность изменяющихся компонентов, взаимосвязанных между собой и рассматриваемых как единое целое. Связи между компонентами системы зависят от решаемой задачи и отличают СС от простого набора частей.

Исследование характеристик таких систем возможно с использованием методов имитационного моделирования, которые требуют проведения многочисленных имитационных экспериментов с последующим усреднением полученных результатов [1]. Имитационные модели позволяют выявить некоторые закономерности функционирования СС и оценить в динамике изменение их вероятностных характеристик, однако обновление параметров моделирования требует проведения очередной серии экспериментов, что замедляет процесс исследования СС и не позволяет составить общую картину динамического поведения СС.

Естественным подходом, эффективно применяемым при исследовании СС, является использование логико-вероятностных методов. Классический логико-вероятностный метод предназначен для исследования характеристик надёжности структурно-сложных систем (ССС), которые при описании не сводятся к последовательным, параллельным и древовидным структурам [2]. При этом структура системы описывается средствами математической логики, а количественная оценка ее надежности производится с помощью теории вероятностей. Известен ряд модификаций и расширений возможностей этого метода, целью которых является решение задач надёжности в различных проблемных областях [3]. Ограничением этих методов является:

– рассмотрение двух состояний компонентов системы;

– использование строго определённого множества операторов для определения связей между компонентами системы;

– предположение о независимости состояний компонентов от изменений, происходящих с остальными компонентами и всей системой в целом во времени.

Поэтому актуальна разработка метода вероятностно-алгебраического моделирования (ВАЛМ) сложных систем, позволяющего учесть вероятностный характер состояний компонентов СС и неопределённость операций, задающих взаимосвязи между этими компонентами. Рассмотрение совокупности операторов, определяющих отношения между компонентами системы, позволяет провести исследование функционально-сложных систем, то есть таких, у которых поведение системы определяется наличием функциональных связей между её компонентами, вероятностно изменяющими своё состояние во времени.

В статье даётся формальное описание метода ВАЛМ функционально-сложных систем, позволяющего решать следующие задачи:

– получать изменяющиеся во времени вероятностные характеристики рассматриваемых состояний моделируемой системы, которые могут соответствовать как процессу разрушения, так и процессу развития систем из различных проблемных областей;

– определять вероятностные характеристики системы в зависимости от изменения вероятностных характеристик составляющих её компонентов;

– определять вероятностные характеристики одного из элементов системы по известным вероятностным характеристикам остальных компонентов и всей системы;

– выявлять зависимые вероятностные характеристики отдельных компонентов и определять степень их влияния на вероятностные характеристики всей системы;

– определять структуру модели системы, оптимально описывающую имеющиеся экспериментальные данные.

В статье приводятся результаты применения метода ВАЛМ для оценки в символьном виде вероятностных характеристик функционально-сложной системы по параметрически заданным векторам вероятностей состояний её элементарных компонентов.

2. Формальное описание метода вероятностно-алгебраического моделирования

При ВАЛМ функционально-сложная система представляется в виде множества устройств $Y = \{Y_i\}, i = \overline{1,m}$, соответствующих элементарным компонентам исследуемой системы. Устройства Y_i считаются независимыми и описываются однотипным образом – n-мерным вектором, определяющим их возможные состояния, которые задаются множеством $S = \{S_j\}, j = \overline{1,n}$. Каждое из состояний S_j характеризуется совокупностью значений параметров компонентов исследуемой системы. Нахождение устройств в каждом состоянии носит вероятностный характер. Вероятности нахождения устройств Y_i в каждом из состояний определяются векторами $P^i = (p_1^i, p_2^i, ..., p_n^i), \sum_{j=1}^{n} p_j^i = 1.$

Взаимосвязи между устройствами модели задаются операциями, определяющими композиции устройств Y_i. Будем говорить, что устройство Y_3 является композицией устройств Y_1 и Y_2,

$Y_3 = Y_1 * Y_2$, если задано отображение F , однозначно определяющее состояние S_k устройства Y_3 по состояниям S_i и S_j исходных устройств Y_1 и Y_2, где $k = F(i, j)$. При этом отображение F однозначно определяет вероятности состояний результирующего устройства по вероятностям состояний исходных устройств:

$$P_k^3 = \sum_{k=F(i,j)} P_i^1 \cdot P_j^2 . \tag{1}$$

Операция (*), определённая на множестве векторов $P = \{P^i\}$, порождает алгебру A^* , то есть для любых P^1 и P^2 выполняется $P^3 = P^1 * P^2$ и для операции * справедливы свойства дистрибутивности:

$$P^1 * (\alpha \cdot P^2 + \beta \cdot P^3) = \alpha \cdot P^1 * P^2 + \beta \cdot P^1 * P^3,$$

$$(\alpha \cdot P^2 + \beta \cdot P^3) * P^1 = \alpha \cdot P^2 * P^1 + \beta \cdot P^3 * P^1,$$

где α и β – вещественные числа, $P^1, P^2, P^3 \in R^n$.

Алгебра задаётся структурными коэффициентами a_{ijk} , такими, что:

$$\forall i, j, k \quad a_{ijk} \geq 0 \text{ и } \sum_{k=1}^{n} a_{ijk} = 1 . \tag{2}$$

При этом элементы вектора P^3 вычисляются по формуле

$$p_k^3 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ijk} p_i^1 p_j^2 , \tag{3}$$

где $i, j, k = \overline{1, n}$.

В том случае, если состояния компонентов детерминированы, они описываются векторами $\sigma^1 = (1,0,...,0),\ \ \sigma^2 = (0,1,...,0),\ \ \sigma^n = (0,0,...,1),$ которые являются базисными элементами пространства R^n (и алгебры). В простейшем случае произведение базисных векторов $\sigma^i * \sigma^j = \sigma^k$ есть базисный вектор, где $k = F(i, j)$. При этом операция, порождающая алгебру, является детерминированной и задаётся функцией $F(i, j)$. Структурные коэффициенты такой алгебры определяются следующим образом:

$$\begin{cases} a_{ijk} = 1, & \text{если} \quad k = F(i, j) \\ a_{ijk} = 0, & \text{если} \quad k \neq F(i, j) \end{cases}. \tag{4}$$

Алгебра A^* , порождённая детерминированной операцией *, имеет следующие свойства.

Свойство 1. Если функция F коммутативна, то алгебра A^* является коммутативной, то есть для любых двух её элементов P^1 и P^2 выполняется $P^1 * P^2 = P^2 * P^1$.

Свойство 2. Если функция F ассоциативна, то алгебра A^* является ассоциативной, то есть для любых трёх её элементов P^1, P^2 и P^3 выполняется $P^1 * (P^2 * P^3) = (P^1 * P^2) * P^3$.

Свойство 3. Если компоненты векторов P^1 и P^2 являются положительными и нормированными, то и вектор $P^3 = P^1 * P^2$ также обладает этими свойствами, то есть:

$$\forall k = \overline{1,n} \quad p_k^3 \geq 0 \text{ и} \sum_{k=1}^{n} p_k^3 = 1 .$$

Свойство 4. Если состояния исходных устройств являются детерминированными, то и состояние результирующего устройства является детерминированным.

Для недетерминированной операции * структурные коэффициенты алгебры являются произвольными положительными величинами, сумма которых равна 1, и умножению базисных векторов будет соответствовать некоторый вектор $P^k \in R^n$, то есть $\sigma^i * \sigma^j = P^k$.

На практике это соответствует случаю, когда детерминированные состояния элементарных устройств приводят к недетерминированному состоянию результирующего устройства. При этом структурные коэффициенты алгебры определяют вероятности перехода результирующего устройства в каждое из состояний в зависимости от состояний исходных устройств и задаются на основе экспериментальных данных.

Таким образом, при вероятностно-алгебраическом моделировании исследуемая функционально-сложная система представляется композицией Z устройств Y_i, то есть $Z = Y_1 * Y_2 * ... * Y_m$, её состояние однозначно определяется состоянием устройств, участвующих в композиции, и вероятность нахождения системы в каждом из состояний может быть вычислена с учётом введённых операций.

Пусть SZ_t – состояние исследуемой системы в момент времени t, а $SZ_1, SZ_2, ..., SZ_{t-1}$ – состояния моделируемой системы в моменты времени $1,...,t-1$. Тогда $SZ_t = R(SZ_1, SZ_2, ..., SZ_{t-1})$, где R – совокупность управляющих правил, описывающих динамику модели системы. Правила, представленные в предикатной форме, управляют процессом изменения модели во времени и на каждом шаге моделирования определяют:

– изменение состава и последовательности операций между устройствами модели в зависимости от текущего состояния моделируемой системы;

– изменение состояний одних устройств модели зависимости от состояний других;

– однотипные и тождественные устройства модели.

Процесс ВАЛМ реализуется итерационно путём проведения компьютерных аналитических расчётов на каждом шаге моделирования, однозначно определяющих вероятности состояний системы по вероятностям исходных устройств. Метод позволяет проводить расчёты с целью оптимизации и поиска экстремальных (критических) значений состояний системы, а также решать прямые и обратные задачи. А именно, для построенной вероятностно-алгебраической модели и заданных правил функционирования модели возможно получение динамически изменяющихся векторов вероятностей возможных состояний системы (прямая задача). В том случае, если исследуются условия, приводящие к возникновению определённых (критических) состояний системы, решается обратная задача.

3. Примеры операций, определяющих связи между компонентами СС

Состав операций, задающих композицию устройств исследуемой системы, определяется с учётом особенностей решаемой задачи. Метод допускает использование детерминированных и недетерминированных операций, а также бинарных и n-арных операций.

Детерминированные операции задаются функциями F, примерами которых могут быть следующие: $F(i,j)=\max(i,j)$ (для операции $\wedge$); $F(i,j)=\min(i,j)$ (для операции $\vee$); $F(i,j)=\min(i+j-1,n)$ (для операции $\oplus$); $F(i,j)=|i-j|$ (для операции Θ).

При этом операции конъюнкции $(\wedge)$ и дизъюнкции $(\vee)$ имеют естественную интерпретацию при решении задач надёжности СС. Операция $\wedge$ описывает связь между последовательно соединёнными компонентами, а операция $\vee$ – связь между параллельно соединёнными компонентами. В случае рассмотрения систем с двумя состояниями (1 и 0) они используются методом логико-вероятностного моделирования [2].

При использовании указанных операций ВАЛМ в задачах надёжности СС они приобретают следующую смысловую окраску.

Функция $F(i,j)=\max(i,j)$ задаёт операцию $\wedge$ и позволяет определить структурные коэффициенты алгебры $A\wedge$. Отказ результирующего устройства, представленного композицией устройств $Y_1 \wedge Y_2$, определяется отказом одного из них, и его состояние определяется состоянием наименее надёжного устройства. Вектор $\sigma^n=(0,0,...,1)$ (устройство находится в состоянии n, то есть произошёл отказ) является нулём алгебры $A\wedge$, так как $\sigma^n \wedge P^j=\sigma^n$ для любого P^i. Вектор $\sigma^1=(1,0,...,0)$ (устройство находится в состоянии 1, то есть полностью исправно) является единицей алгебры $A\wedge$, поскольку $\sigma^1 \wedge P^j=P^j$ для любого P^i.

Функция $F(i,j)=\min(i,j)$ задаёт операцию $\vee$ и позволяет определить структурные коэффициенты алгебры $A\vee$. В этом случае отказ результирующего устройства, представленного композицией устройств $Y_1 \vee Y_2$, происходит в результате отказа двух устройств и его состояние определяется состоянием наиболее надёжного устройства. Для этой алгебры единицей является вектор $\sigma^n=(0,0,...,1)$, а нулём $\sigma^1=(1,0,...,0)$.

Функция $F(i,j)=\min(i+j-1,n)$ задаёт операцию $\oplus$ и определяет структурные коэффициенты алгебры $A\oplus$. При этом состояние результирующего устройства определяется путём суммирования состояний исходных устройств. В задачах надёжности СС эта операция может быть использована для оценки некоторого уровня накопления повреждений взаимодействующих компонентов, а в задачах исследования вероятностных характеристик развивающейся системы – для оценки уровня завершённости формирования качественных характеристик.

Функция $F(i,j)=|i-j|$ задаёт операцию Θ и определяет структурные коэффициенты алгебры $A\Theta$. Состояние результирующего устройства определяется разностью состояний исходных устройств. При решении задач надёжности она позволяет учесть разницу между состояниями работоспособности компонентов исследуемой системы.

В силу введённых операций, алгебры $A\wedge$ и $A\vee$ являются коммутативными и ассоциативными. Алгебра $A\oplus$ является коммутативной, но не является ассоциативной, поскольку функция $F(i,j)=\min(i+j-1,n)$, определяющая структурные коэффициенты алгебры, коммутативна, но не ассоциативна.

Примером алгебры, порождённой недетерминированной операцией, является алгебра, полученная с использованием описанных выше алгебр $A\wedge$ и $A\vee$. Её структурные коэффициенты могут быть сформированы, например, следующим образом:

$$\forall i,j,k \quad a_{ijk}=0{,}5(a_{ijk}^{\wedge}+a_{ijk}^{\vee}),$$

где $a_{ijk}^{\wedge}$ и $a_{ijk}^{\vee}$ – структурные элементы соответственно алгебр $A\wedge$ и $A\vee$.

При решении практических задач часто встречаются ситуации, когда уместно использование композиции n устройств, порождающей соответствующую n-арную алгебру. Например, в случае необходимости учёта вероятностных характеристик трех устройств формируются структурные коэффициенты алгебры a_{ijm}^{k}, а элементы результирующего вектора вероятностей вычисляются по формуле

$$p_k^4=\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}a_{ijm}^{k}p_i^1p_j^2p_m^3 \qquad \forall i,j,l,m,k. \tag{5}$$

При этом для формирования структурных коэффициентов алгебры в частном случае может быть использована следующая функция: $F_{2/3}(i,j,l)=[(i+j+l-\min(i,j,l))/2]$. В этом случае результирующее устройство находится в рабочем состоянии, если работают как минимум два устройства из трёх, и его состояние определяется средним значением двух устройств с максимальными состояниями.

Таким образом, вероятностно-алгебраическое моделирование функционально-сложных систем предполагает использование ряда операций, позволяющих формализовать взаимосвязи между компонентами системы и получить вероятностное описание характеристик всей системы на основе вероятностных характеристик её компонентов. При этом поддерживается концепция иерархического многоуровневого моделирования, позволяющая реализовать несколько иерархических уровней представления системы, что обеспечивает как упрощённое, так и детальное описание её функционирования.

4. Пример определения вероятностных характеристик функционально-сложной системы в символьном виде

Метод ВАЛМ позволяет сделать оценку вероятностных характеристик исследуемой системы в символьном виде по параметрически заданным векторам составляющих её компонентов.

В качестве примера рассмотрим систему, схема которой представлена на рис. 1. Связи между компонентами этой системы описываются тремя операциями: операцией $\vee$, операцией $\wedge$ и тернарной операцией $\otimes$, взаимодействие между компонентами которой определяется функцией $F_{2/3}$. Соответственно введённым операциям вероятностно-алгебраическая модель такой системы будет иметь вид $\vee(\otimes(Y_1, Y_2, Y_3), \wedge(Y_4, Y_5))$.

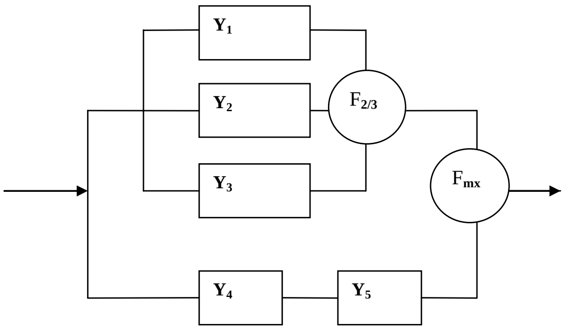

Рис. 1. Схема вероятностно-алгебраической модели функционально-сложной системы

Предположим, что устройства Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5 описываются однотипным образом и характеризуются множеством состояний $\{S_1, S_2, ..., S_{20}\}$, вероятности которых определяются соответственно векторами P^1, P^2, P^3, P^4, P^5. Значения векторов вероятностей состояний изменяются во времени и задаются в символьном виде выражением $(1-t)\cdot P^{'} + t\cdot P^{''}$, где $P^{'}, P^{''} \in R^n$ и $\sum_{j=1}^{20} p_j^{'} = 1, \sum_{j=1}^{20} p_j^{''} = 1, t \in [0,1]$.

В качестве исходных векторов выражения выбираются следующие: $P' = (1,0,...,0)$ и $P'' = (\frac{1}{20}, \frac{1}{20}, ..., \frac{1}{20})$.

В процессе вероятностно-алгебраического моделирования, позволяющего единым образом описать связи между компонентами и использующего методы компьютерной алгебры для проведения символьных вычислений, был сформирован параметрический вектор вероятностей состояний системы P_{sist}^t, характеризующих изменение состояний системы во времени.

Его математическое ожидание в полиномиальной форме имеет следующий вид:

$$M(t) = -0{,}1166e - 5\cdot t^5 + 0{,}2371e - 3\cdot t^4 - 0{,}1449e - 1\cdot t^3 + 0{,}2205\cdot t^2 + 1.$$

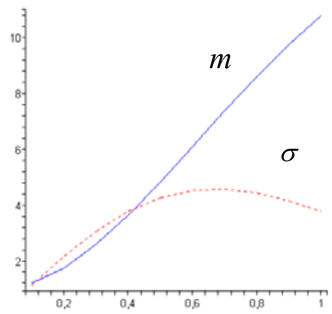

Рис. 2. Изменение во времени среднего значения m и среднеквадратичного отклонения σ состояния исследуемой системы

На рис. 2 показаны изменения во времени среднего значения и среднего квадратичного отклонения состояния исследуемой системы. Максимальное значение среднего квадратичного отклонения 4,6075 достигается при $t = 0{,}6755$.

Применение ВАЛМ для получения вероятностных характеристик функционально-сложных систем в символьном виде оправдано возможностью многочисленных обобщений и модификаций, а также возможностью использования в различных проблемных областях.

5. Заключение

Предложенный метод вероятностно-алгебраического моделирования оперирует над вероятностными состояниями компонентов. Для их композиции используются произвольные функции: детерминированные/вероятностные, бинарные/n-арные, позволяющие отразить при исследовании связи между компонентами, образующими систему. Метод имеет алгебраическую основу, позволяющую единым образом описать связи между компонентами. Данный подход позволяет использовать методы компьютерной алгебры для проведения символьных вычислений. Практическое применение метода в различных проблемных областях позволит оценить изменение вероятностных характеристик системы во времени с учётом управляющих воздействий на каждом шаге моделирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Максимей И.В. Имитационное моделирование на ЭВМ / Максимей И.В. – Москва: Радио и связь, 1983. – 232 с.
2. Рябинин И.А. Надежность и безопасность сложных систем / Рябинин И.А. – СПб.: Политехника, 2000. – 248 с.
3. Можаев А.С. Программный комплекс автоматизированного структурно-логического моделирования сложных систем (ПК АСМ 2001) / А.С. Можаев // Труды Международной научной школы "Моделирование и анализ безопасности, риска и качества в сложных системах" (МА БРК-2001). – СПб.: Издательство ООО "НПО "Омега", 2001. – С. 56 – 61.

Стаття надійшла до редакції 06.10.2009