

## ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К МОДЕЛИРОВАНИЮ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПО ЧАСТЯМ

**Abstract.** It is offered a formalized technique of construction of the equivalent scheme of a nonlinear subcircuit and a method of drawing up a mathematical model (MM) of a nonlinear electric circuit (NEC), based on application of the subcircuits, and considering requirements of the correct formulation of a problem. A consideration of requirements is carried out both at a stage of drawing up of the MM NEC and in the course of decision of the received model by a purposeful choice of variables, which are voltage of components of tree branches, covering the subcircuits graphs and NEC, in which the subcircuits are replaced by equivalent schemes. Correct choice of variables is carried out at drawing up of topological matrixes of contours of the graphs of the subcircuits and NEC, and depends on parameters of the components of the subcircuits and NEC.

**Key words:** nonlinear, linear (linearized) electric circuit, subcircuit, equivalent scheme, correct formulation of a task, voltage a component of branches of a tree of the graph of an electric circuit, mathematical model, modelling, system of the nonlinear equations, updating of the Newton's Method.

**Анотація.** Запропоновано формалізовану методику побудови еквівалентної схеми нелінійної підсхеми і метод складання математичної моделі (ММ) нелінійного електричного кола (НЕК), заснований на застосуванні підсхем, який враховує вимоги коректного формулювання задачі. Урахування вимог виконується як на етапі складання ММ НЕК, так і в процесі рішення отриманої моделі шляхом цілеспрямованого вибору змінних – напруг компонент гілок дерев, що покривають графи підсхем і НЕК, у якій підсхеми замінені еквівалентними схемами. Коректний вибір змінних виконується при складанні топологічних матриць контурів графів підсхем, НЕК і залежить від параметрів компонентів підсхем і НЕК.

**Ключові слова:** нелінійне, лінійне (лінеаризоване) електричне коло, підсхема, еквівалентна схема, коректне формулювання задачі, напруги компонентів гілок дерева, яке покриває граф електричного кола, математична модель, моделювання, система нелінійних рівнянь, модифікація методу Ньютона.

**Аннотация.** Предложено формализованную методику построения эквивалентной схемы нелинейной подсхемы и метод составления математической модели (ММ) нелинейной электрической цепи (НЭЦ), основанный на применении подсхем, учитывающий требования корректной формулировки задачи. Учет требований выполняется как на этапе составления ММ НЭЦ, так и в процессе решения полученной модели путем целенаправленного выбора переменных – напряжений компонент ветвей деревьев, покрывающих графы подсхем и НЭЦ, в которой подсхемы заменены эквивалентными схемами. Корректный выбор переменных выполняется при составлении топологических матриц контуров графов подсхем, НЭЦ и зависит от параметров компонент подсхем и НЭЦ.

**Ключевые слова:** нелинейная, линейная (линеаризованная) электрическая цепь, подсхема, эквивалентная схема, корректная формулировка задачи, напряжения компонент ветвей дерева, покрывающего граф электрической цепи, математическая модель, моделирование, система нелинейных уравнений, модификация метода Ньютона.

### 1. Введение

Непрерывное усложнение электроэнергетических систем, радиоэлектронной аппаратуры, вычислительной техники, устройств автоматики и техники связи требует повышения эффективности методов анализа электрических цепей, содержащих сотни и тысячи ветвей и узлов.

Усовершенствование вычислительной техники открывает новые возможности для существующих алгоритмов, поскольку это позволяет решать все более сложные задачи. Однако при моделировании цепей с применением вычислительной техники максимально допустимая сложность задач определяется не только характеристиками этой техники, но и эффективностью алгоритмов, обеспечивающих достоверность результатов анализа. Поэтому одной из актуальных проблем электротехники есть разработка оптимальных алгоритмов моделирования сложных нелинейных электрических цепей.

В настоящее время известны алгоритмы, позволяющие с помощью вычислительной техники осуществить моделирование сложных нелинейных электрических цепей как в установившемся, так и в переходном режиме. Из многообразия алгоритмов и методов следует выделить метод,

предложенный в [1, 2], который на этапе составления системы уравнений, описывающих нелинейную электрическую цепь, учитывает требования корректной формулировки задачи моделирования этой цепи. Под корректной формулировкой задачи подразумевается разрешимость ее при любых начальных данных, принадлежащих к некоторому классу, единственность решения и непрерывность зависимости этого решения от начальных данных.

Увеличивает эффективность использования вычислительной техники анализ сложных электрических цепей и систем по частям, так как требует существенно меньшего объема вычислений по сравнению с объемом вычислений, необходимым при непосредственном анализе.

## **2. Методы анализа нелинейных электрических цепей и систем по частям: состояние вопроса**

В настоящее время методы анализа сложных электрических цепей и систем по частям можно разделить на две группы.

К первой группе относятся методы, в основе которых используется диакоптика. Диакоптика, как метод исследования сложных систем, разработан Г. Кроном [3]. Большой вклад в развитие этого метода внесли и другие авторы [4–6]. Суть данного подхода заключается в следующем. Г. Крон предложил применять тензоры и тензорные уравнения для описания электрических цепей. Тензорные уравнения цепей эквивалентны матричным уравнениям, однако введение тензоров позволяет представить разделение и объединение цепей как преобразование системы координат.

Ко второй группе относятся методы исследования электрических цепей и систем, основанные на применении подсхем [7]. Этот метод был предложен Г.Е. Пуховым в 1952 г. Расчет цепей по этому методу подразделяется на три этапа. На первом этапе цепь заданной конфигурации при помощи особых приемов заменяется эквивалентной схемой более простого вида. Расщепление сложной цепи на составляющие подсхемы (многополюсники) может производиться различными способами. Электрическую схему, расщепленную на подсхемы, всегда можно рассчитать, составив уравнения подсхем и уравнения связей между ними. На втором этапе производится расчет полученной простой схемы, а на третьем – выполняется обратный переход к заданной цепи, состоящий в определении токов и напряжений в схемах, которые были получены в процессе прямого преобразования цепи.

Г.Е. Пухов предложил модификацию метода, при котором не требовалось составления уравнений связи, что было очень важно в эпоху ручного счета. Для этого предложено составлять уравнения каждой подсхемы в форме, учитывающей связь подсхем между собой. Практический пример применения данного подхода приведен в [8].

Моделирование электрических цепей, основанное на применении подсхем и ориентированное на применение вычислительной техники, наиболее полно рассмотрено в монографии [9]. Для описания электрических цепей в данном случае применяются матричные уравнения. Как следует из литературы, для линейных подсхем существуют методики построения эквивалентных схем [10], в то же время для нелинейных подсхем этот вопрос недостаточно рассмотрен в литературе.

Представляет интерес рассмотрение составления математической модели моделирования нелинейной электрической цепи по частям методом, учитывающим требования корректной формулировки задачи.

### 3. Математическая модель нелинейной электрической цепи по частям

В связи с тем, что в методе [1, 2] для описания нелинейной электрической цепи применяются матричные уравнения, он будет рассмотрен применительно к электрической цепи, расщепленной на подсхемы. В дальнейшем будем предполагать, что расщепление на подсхемы уже выполнено.

Составление математической модели нелинейной электрической цепи, расщепленной на подсхемы, состоит из нескольких этапов. Прежде всего, составляются математические модели нелинейных подсхем. Функциональные зависимости компонент эквивалентной схемы подсхемы определяются на этом же этапе. Следующим этапом есть составление математической модели исходной электрической цепи, в которой подсхемы заменены эквивалентными схемами. Составление системы уравнений связи между подсхемами следует рассматривать как частный случай составления математической модели.

#### 3.1. Математическая модель нелинейной электрической подсхемы

Рассмотрим этапы составления математической модели подсхемы. Прежде всего, будем считать, что преобразование и расщепление нелинейной электрической цепи на части выполнено таким образом, что электрическая цепь и подсхемы, в нее входящие, содержат только двухполюсные компоненты. Связь подсхемы с остальной частью электрической цепи выполняется через полюсы. Напряжения, приложенные к полюсам подсхемы, однозначно определяют влияние остальной части электрической цепи в математической модели подсхемы. Токи, протекающие через полюсы подсхемы, в зависимости от напряжений, приложенных к полюсам, однозначно определяют влияние подсхемы в математической модели нелинейной электрической цепи, в которой подсхемы заменены эквивалентными схемами.

Вначале определяются компонентные уравнения подсхемы, устанавливаются тип, управляемость и зависимость компоненты от других и составляется граф подсхемы. Будем считать, что двухполюсная компонента может быть источником напряжения, проводимостью или источником тока. Компонентное уравнение двухполюсника типа проводимости ( $U_{mi} \neq 0$ ) или источника тока ( $U_{mi} = 0$ ) имеет вид

$$I_{mi} = f_{mi}(U_{m1}, U_{m2}, \dots, U_{mi}, \dots, U_{mk}), \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad m = 1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

а двухполюсника типа источника напряжения вид

$$U_{me} = const_{me}, \quad e = 1, 2, \dots, K_m, \quad m = 1, 2, \dots, N,$$

где  $I_{mi}$  – ток  $i$ -ой компоненты  $m$ -ой подсхемы,  $f_{mi}(\bullet)$  – условное обозначение компонентного уравнения  $i$ -ой компоненты,  $U_{mi}$  – напряжение  $i$ -ой компоненты,  $k$  – количество компонент в  $m$ -ой подсхеме,  $U_{me}$  – напряжение источника напряжения  $e$  компоненты,  $K_m$  – количество источников напряжения в  $m$ -ой подсхеме,  $N$  – количество подсхем в электрической цепи,  $const_{me}$  – значение источника напряжения  $e$  компоненты  $m$ -ой подсхемы. Как следует из уравнения (1), подсхема содержит напряжениеуправляемые, напряжениенезависимые компоненты и источники напряжения и тока.

Составление топологических матриц контуров и сечений включает выбор дерева, покрывающего граф (дерево графа) подсхемы, и составление контуров для выбранного дерева. Дерево графа подсхемы выбирается таким образом, чтобы все источники напряжения включались в дерево, а все источники тока в хорды. Составление контуров выполняется присоединением ветвей хорд к дереву. В этом случае топологическая матрица контуров имеет вид  $\begin{bmatrix} 1_{mx} & F_m^t \end{bmatrix}$ , где  $1_{mx}$  – единичная подматрица ветвей хорд, индекс  $t$  обозначает транспонированную матрицу, а топологическая матрица сечений –  $\begin{bmatrix} 1_{m\delta} & -F_m \end{bmatrix}$ , где  $1_{m\delta}$  – единичная подматрица ветвей дерева. Возможны и другие способы построения контуров, но только при рассмотренном способе топологические матрицы могут содержать единичные подматрицы. Из [1, 2] следует, что учет требований как сходимости итерационного метода решения системы нелинейных алгебраических уравнений (СНАУ), так и обусловленности системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), выполняется при составлении уравнений электрической цепи на этапе выбора контуров графа. Для этого при составлении контура необходимо, чтобы в контуре, образованном присоединением хорды к дереву, компоненты дерева имели проводимости по величине больше, чем проводимость этой хорды.

На следующем этапе векторы напряжений  $U_m$  и токов  $I_m$  компонент  $m$ -ой подсхемы группируются в элементы, содержащие напряжения  $U_{m\delta}$  или токи  $I_{m\delta}$  компонент, которые входят в дерево графа (индекс  $\delta$ ), и напряжения  $U_{mx}$  или токи  $I_{mx}$  компонент, которые входят в хорды (индекс  $x$ ). Таким образом,

$$U_m = \begin{bmatrix} U_{m\delta} \\ U_{mx} \end{bmatrix}, \quad I_m = \begin{bmatrix} I_{m\delta} \\ I_{mx} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Тогда уравнения, составленные на основе законов Кирхгофа, в матричном виде можно записать следующим образом:

$$U_{mx} = -F_m^t U_{m\delta}, \quad (3)$$

$$I_{m\delta} = F_m I_{mx}. \quad (4)$$

Эквивалентная схема подсхемы и функциональные зависимости входящих в нее компонент определяются из следующих предпосылок. Как следует из системы уравнений (4), токи, текущие через полюсы подсхемы, в зависимости от напряжений, приложенных к полюсам, можно определить в том случае, если они будут токами компонент, включенных в дерево. Это возможно, если напряжения, приложенные к полюсам подсхемы, рассматривать как напряжения, падающие на компонентах типа источник напряжения. В [11] предложены два варианта приложения напряжений к полюсам и, соответственно, два варианта подключения источников напряжения. В первом варианте (рис. 1а) напряжения, приложенные к полюсам, отсчитываются от общего полюса, таким же образом к полюсам присоединяются источники напряжения. В этом случае, токи (рис. 1а), текущие через полюсы, совпадают с токами источников напряжения. Зависимость тока, протекающего через полюс подсхемы, от напряжений, приложенных к полюсам, можно рассматривать как компонентное уравнение двухполюсной компоненты, подключенной одним концом к полюсу, через который протекает ток, а другим – к общему полюсу эквивалентной схемы (рис. 1а).

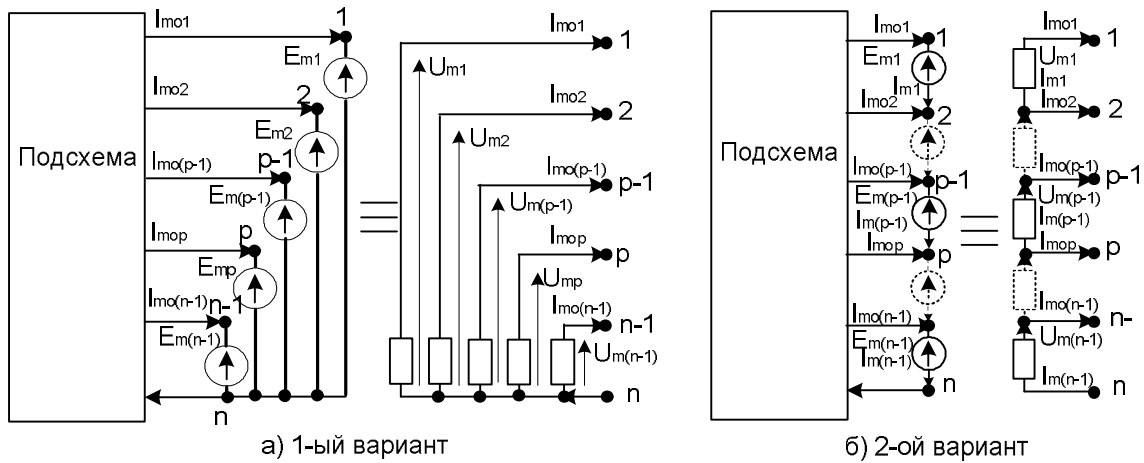


Рис. 1. Эквивалентная схема замещения подсхемы

Во втором варианте напряжения, приложенные к полюсам, есть напряжения между полюсами (рис. 1б). Таким же образом присоединяются источники напряжения. Токи, текущие через полюсы подсхемы, определяются через токи источников напряжения следующим образом:

$$I_{mop} = \begin{cases} I_{m1}, & p = 1 \\ I_{mp} - I_{m(p-1)}, & 1 < p < n_m, \\ I_{m(n-1)}, & p = n_m \end{cases} \quad (5)$$

где  $I_{mop}$  – ток, протекающий через  $p$  полюс  $m$ -ой подсхемы,  $I_{mp}$  – ток, протекающий через  $p$  источник напряжения (рис. 1б), присоединенный к  $p, p+1$  полюсам  $m$ -ой подсхемы,  $n_m$  – количество полюсов  $m$ -ой подсхемы. Как следует из уравнения (5), токи источников напряжения, подключенных к полюсам подсхемы, однозначно определяют токи, текущие через полюсы подсхемы. В этом случае зависимость тока  $I_{mpp}$ , протекающего через  $p, p+1$  полюсы подсхемы, от напряжений, приложенных к полюсам, можно рассматривать как компонентное уравнение двухполюсной компоненты, подключенной к  $p, p+1$  полюсам эквивалентной схемы подсхемы (рис. 1б). Выбор варианта приложения напряжений к полюсам подсхемы зависит от специфики конкретной цепи.

Элементы ветвей дерева и хорд векторов напряжений и токов компонент (2), а также топологические матрицы контуров и сечений, группируются в соответствии с типом компонент  $m$ -ой подсхемы:

$$U_{m\partial} = \begin{bmatrix} U_{m\partial E} \\ U_{m\partial E_p} \\ U_{m\partial G} \end{bmatrix}, \quad U_{mx} = \begin{bmatrix} U_{mxG} \\ U_{mxJ} \end{bmatrix}, \quad I_{m\partial} = \begin{bmatrix} I_{m\partial E} \\ I_{m\partial E_p} \\ I_{m\partial G} \end{bmatrix}, \quad I_{mx} = \begin{bmatrix} I_{mxG} \\ I_{mxJ} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

где индекс  $E$  указывает, что данный элемент вектора содержит напряжения или токи независимых источников напряжения,  $E_p$  – элемент содержит напряжения или токи источников напряжения, присоединенных к полюсам подсхемы,  $G$  – элемент содержит напряжения или токи компонент типа проводимости,  $J$  – элемент содержит напряжения или токи источников тока,  $\partial$  – элемент вектора содержит напряжения или токи компонент, которые входят в дерево графа,  $x$  – элемент

содержит напряжения или токи компонент, которые входят в хорды. Учитывая (6), система уравнений (3) принимает следующий вид:

$$\begin{pmatrix} U_{mxG} \\ U_{m\partial J} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} F_{mxGm\partial E}^t & F_{mxGm\partial E_p}^t & F_{mxGm\partial G}^t \\ F_{mxJm\partial E}^t & F_{mxJm\partial E_p}^t & F_{mxJm\partial G}^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{m\partial E} \\ U_{m\partial E_p} \\ U_{m\partial G} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

а (4) –

$$\begin{pmatrix} I_{m\partial E} \\ I_{m\partial E_p} \\ I_{m\partial G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{m\partial EmxG} & F_{m\partial EmxJ} \\ F_{m\partial E_p mxG} & F_{m\partial E_p mxJ} \\ F_{m\partial GmxG} & F_{m\partial GmxJ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{mxG} \\ I_{mxJ} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

После группирования компонентное уравнение (1) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} I_{m\partial G} &= f_{m\partial}(U_{m\partial}^t, U_{mx}^t), \\ I_{mxG} &= f_{mx}(U_{m\partial}^t, U_{mx}^t). \end{aligned} \quad (9)$$

Из анализа систем уравнений (6) – (9) следует, что в том случае, когда известны векторы напряжений  $U_{m\partial E}, U_{m\partial E_p}, U_{m\partial G}$  и токов  $I_{mxJ}$  компонент, можно определить остальные токи и напряжения компонент  $m$ -ой подсхемы. Если предположить, что напряжения  $U_{m\partial E_p}$ , приложенные к полюсам  $m$ -ой подсхемы, являются внешними и известны, то тогда переменные  $U_{m\partial G}$  можно определить из решения СНАУ (8), которую, используя компонентные уравнения (9) и системы уравнений связи (6) и (7), не трудно преобразовать к следующему виду:

$$f_{m\partial}(U_{m\partial}^t, (-F_m^t U_{m\partial})^t) - (F_{m\partial GmxG} f_{mx}(U_{m\partial}^t, (-F_m^t U_{m\partial})^t) + F_{m\partial GmxJ} I_{mxJ}) = 0. \quad (10)$$

Тогда математическая модель  $m$ -ой подсхемы будет включать систему уравнений (10), системы уравнений связей (7) – (9) и алгоритмы выбора дерева, составления и преобразования топологических матриц сечений  $F_m$  и контуров  $F_m^t$  графа  $m$ -ой подсхемы.

Функциональные зависимости компонент эквивалентной схемы  $m$ -ой подсхемы, учитывая (8), компонентные уравнения (9) и системы уравнений связи (6) и (7), можно записать следующим образом:

$$I_{m\partial E_p} = F_{m\partial E_p mxG} f_{mx}(U_{m\partial}^t, (-F_m^t U_{m\partial})^t) + F_{m\partial E_p mxJ} I_{mxJ}. \quad (11)$$

Как следует из (11) и (6), компоненты эквивалентной схемы  $m$ -ой подсхемы есть напряжениеуправляемые и напряжениенезависимые, токи компонент зависят как от напряжений компонент  $U_{m\partial G}$  подсхемы, так и от напряжений  $U_{m\partial E_p}$ , приложенных к полюсам подсхемы.

Составление математической модели исходной электрической цепи, в которой подсхемы заменены эквивалентными схемами, выполняется на следующем этапе.

### 3.2. Математическая модель нелинейной электрической цепи, расщепленной на подсхемы

Будем считать нелинейную электрическую цепь, в которой подсхемы заменены эквивалентными схемами, эквивалентной схемой замещения. В этом случае в эквивалентную схему замещения (индекс  $s$ ) будут входить двухполюсные компоненты (индекс  $c$ ), которые не входят в подсхемы, и двухполюсные компоненты (индекс  $E_p$ ) эквивалентных схем подсхем. Составление математиче-

ской модели эквивалентной схемы замещения состоит из тех же этапов, что и составление математической модели подсхемы.

В соответствии с набором типов компонент, входящих в эквивалентную схему замещения, векторы напряжений  $U_{s\delta}$  и токов  $I_{s\delta}$  компонент, входящих в дерево, напряжений  $U_{sx}$  и токов  $I_{sx}$  компонент, входящих в хорды графа этой схемы, принимают следующий вид:

$$U_{s\delta} = \begin{vmatrix} U_{s\delta c} \\ U_{s\delta E_p} \end{vmatrix}, U_{sx} = \begin{vmatrix} U_{sxc} \\ U_{sxE_p} \end{vmatrix}, I_{s\delta} = \begin{vmatrix} I_{s\delta c} \\ I_{s\delta E_p} \end{vmatrix}, I_{sx} = \begin{vmatrix} I_{sxc} \\ I_{sxE_p} \end{vmatrix}. \quad (12)$$

Элементы  $U_{s\delta c}, U_{sxc}, I_{s\delta c}, I_{sxc}$  есть напряжения и токи компонент, которые не входят в под-схемы, индекс  $\delta$  указывает, что векторы напряжений и токов компонент, которые входят в дерево графа эквивалентной схемы замещения, а индекс  $x$  – входит в хорды графа и после группирова-ния по типу компонент имеют следующий вид:

$$U_{s\delta c} = \begin{vmatrix} U_{\delta c E} \\ U_{\delta c G} \end{vmatrix}, U_{sxc} = \begin{vmatrix} U_{xc G} \\ U_{xc J} \end{vmatrix}, I_{s\delta c} = \begin{vmatrix} I_{\delta c E} \\ I_{\delta c G} \end{vmatrix}, I_{sxc} = \begin{vmatrix} I_{xc G} \\ I_{xc J} \end{vmatrix}. \quad (13)$$

Элементы векторов  $U_{s\delta E_p}, I_{s\delta E_p}, U_{sxE_p}, I_{sxE_p}$  есть напряжения и токи компонент эквивалент-ных схем подсхем, индекс  $\delta$  указывает, что векторы напряжений и токов компонент входят в дере-во графа эквивалентной схемы замещения, а индекс  $x$  указывает, что входят в хорды графа. По-сле группирования компонент подсхем в элементы, входящие в дерево, или хорды графа эквива-лентной схемы замещения элементы векторов имеют следующий вид:

$$U_{s\delta E_p} = \begin{vmatrix} U_{s_1\delta E_p} \\ \cdot \\ U_{s_m\delta E_p} \\ \cdot \\ U_{s_N\delta E_p} \end{vmatrix}, I_{s\delta E_p} = \begin{vmatrix} I_{s_1\delta E_p} \\ \cdot \\ I_{s_m\delta E_p} \\ \cdot \\ I_{s_N\delta E_p} \end{vmatrix}, U_{sxE_p} = \begin{vmatrix} U_{s_1xE_p} \\ \cdot \\ U_{s_mxE_p} \\ \cdot \\ U_{s_NxE_p} \end{vmatrix}, I_{sxE_p} = \begin{vmatrix} I_{s_1xE_p} \\ \cdot \\ I_{s_mxE_p} \\ \cdot \\ I_{s_NxE_p} \end{vmatrix}, \quad m = 1, 2, \dots, N, \quad p = 1, 2, \dots, n_m, \quad (14)$$

где индекс  $s_m$  указывает, что элемент вектора содержит напряжения или токи компонент эквива-лентной схемы  $m$ -ой подсхемы,  $U_{s_m\delta E_p}, I_{s_m\delta E_p}$  есть элементы векторов напряжений и токов компо-нент эквивалентной схемы  $m$ -ой подсхемы, входящих в дерево графа эквивалентной схемы заме-щения, а  $U_{s_mxE_p}, I_{s_mxE_p}$  – входящих в хорды этого графа.

Уравнения (3), (4), составленные для эквивалентной схемы замещения на основе законов Кирхгофа, в матричном виде будут записаны в следующем виде:

$$U_{sx} = -F^t U_{s\delta}, \quad (15)$$

$$I_{s\delta} = F I_{sx}, \quad (16)$$

где  $F^t$  и  $F$  – топологические матрицы контуров и сечений эквивалентной схемы замещения. Учи-тывая (12) и (13), после группирования топологических матриц контуров и сечений по типу компо-нент система уравнений (15) будет записана как

$$\begin{vmatrix} U_{xcG} \\ U_{sxE_p} \\ U_{xcJ} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} F_{xcG\partial cE}^t & F_{xcG\partial cG}^t & F_{xcG\partial E_p}^t \\ F_{sxE_p\partial cE}^t & F_{sxE_p\partial cG}^t & F_{sxE_p\partial E_p}^t \\ F_{xcJ\partial cE}^t & F_{xcJ\partial cG}^t & F_{xcJ\partial E_p}^t \end{vmatrix} \begin{vmatrix} U_{\partial cE} \\ U_{\partial cG} \\ U_{\partial E_p} \end{vmatrix}, \quad (17)$$

а (16) как

$$\begin{vmatrix} I_{\partial cE} \\ I_{\partial cG} \\ I_{\partial E_p} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_{\partial cE xcG} & F_{\partial cE sxE_p} & F_{\partial cE xcJ} \\ F_{\partial cG xcG} & F_{\partial cG sxE_p} & F_{\partial cG xcJ} \\ F_{\partial E_p xcG} & F_{\partial E_p sxE_p} & F_{\partial E_p xcJ} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_{xcG} \\ I_{sxE_p} \\ I_{xcJ} \end{vmatrix}. \quad (18)$$

Компонентные уравнения двухполюсных компонент, которые не входят в подсхемы, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} I_{\partial cG} &= f_{\partial cG}(U_{\partial cE}^t, U_{\partial cG}^t), \\ I_{xcG} &= f_{xcG}(U_{\partial cE}^t, U_{\partial cG}^t). \end{aligned} \quad (19)$$

Напряжения  $U_{m\partial E_p}$ , приложенные к полюсам  $m$ -ой подсхемы, и токи  $I_{m\partial E_p}$ , протекающие через эти полюсы, следующим образом связаны с напряжениями и токами эквивалентной схемы  $m$ -ой подсхемы, являющейся частью эквивалентной схемы замещения:

$$U_{m\partial E_p} = \begin{vmatrix} U_{s_m\partial E_p} \\ U_{s_mx E_p} \end{vmatrix}, \quad I_{m\partial E_p} = \begin{vmatrix} I_{s_m\partial E_p} \\ I_{s_mx E_p} \end{vmatrix}, \quad p = 1, 2, \dots, n_m. \quad (20)$$

Как следует из (14), элемент вектора напряжений  $U_{s_mx E_p}$  компонент эквивалентной схемы  $m$ -ой подсхемы эквивалентной цепи замещения определяется через напряжения  $U_{s\partial E_p}$  компонент эквивалентных схем подсхем, которые входят в дерево графа, определяется следующим образом:

$$U_{sx E_p} = -(F_{sx E_p \partial cE}^t U_{\partial cE} + F_{sx E_p \partial cG}^t U_{\partial cG} + F_{sx E_p \partial E_p}^t U_{\partial E_p}). \quad (21)$$

Элементы топологических матриц  $F_{m\partial E_p mxG}$  и  $F_{m\partial E_p mxJ}$   $m$ -ой подсхемы (8) группируются в элементы, которые содержат компоненты, входящие в дерево графа эквивалентной схемы замещения или хорды этого графа. После группирования они имеют следующий вид:

$$\begin{vmatrix} F_{m\partial E_p mxG} & F_{m\partial E_p mxJ} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_{m\partial_o E_p mxG} & F_{m\partial_x E_p mxJ} \\ F_{m\partial_x E_p mxG} & F_{m\partial_o E_p mxJ} \end{vmatrix}, \quad (22)$$

где индекс  $\partial_o$  указывает, что компоненты эквивалентной схемы  $m$ -ой подсхемы входят в дерево графа эквивалентной схемы замещения, а  $\partial_x$  – входят в хорды графа. В этом случае компонентные уравнения (11) эквивалентной схемы  $m$ -ой подсхемы будут записаны как

$$I_{s_m\partial E_p} = F_{m\partial_o E_p mxG} f_{mx}(U_{m\partial}^t, (-F_m^t U_{m\partial})^t) + F_{m\partial_o E_p mxJ} I_{mxJ}, \quad m = 1, 2, \dots, N, \quad p = 1, 2, \dots, n_m, \quad (23)$$

$$I_{s_mx E_p} = F_{m\partial_x E_p mxG} f_{mx}(U_{m\partial}^t, (-F_m^t U_{m\partial})^t) + F_{m\partial_x E_p mxJ} I_{mxJ}, \quad m = 1, 2, \dots, N, \quad p = 1, 2, \dots, n_m. \quad (24)$$

Из анализа систем уравнений (12) – (24) следует, что в том случае, когда известны векторы напряжений  $U_{\partial cE}, U_{\partial cG}, U_{\partial E_p}$ , токов  $I_{xcJ}$ , компонент эквивалентной схемы замещения и векторы напряжений  $U_{m\partial E}, U_{m\partial G}$ , токов  $I_{mxJ}$  компонент подсхем, где  $m = 1, 2, \dots, N$ , то можно определить остальные токи и напряжения компонент эквивалентной схемы замещения. Следует заметить, что



напряжения  $U_{\partial cE}, U_{m\partial E}$  компонент источников напряжения и токи  $I_{xcJ}, I_{mxJ}$  компонент источников тока известны. Напряжения  $U_{m\partial G}$  компонент  $m$ -ой подсхемы определяются из решения системы уравнений (10) математической модели  $m$ -ой подсхемы и являются внешними по отношению к СНАУ эквивалентной схемы замещения. В этом случае переменные  $U_{\partial cG}, U_{s\partial E_p}$  определяются из решения СНАУ:

$$\begin{cases} I_{\partial cG} - (F_{\partial cGxcG} I_{xcG} + F_{\partial cGsxE_p} I_{sxE_p} + F_{\partial cGxcJ} I_{xcJ}) = 0 \\ I_{s\partial E_p} - (F_{s\partial E_pxcG} I_{xcG} + F_{s\partial E_psxE_p} I_{sxE_p} + F_{s\partial E_pxcJ} I_{xcJ}) = 0 \end{cases} \quad (25)$$

Действительно, токи компонент  $I_{\partial cG}, I_{xcG}$  системы уравнений (25), учитывая (19), (13), определяются через напряжения  $U_{\partial cG}, U_{s\partial E_p}$ . Токи компонент  $I_{s\partial E_p}, I_{sxE_p}$ , учитывая (23), (24) и (14), определяются через напряжения  $U_{\partial cG}, U_{s\partial E_p}$  эквивалентной схемы замещения и напряжения  $U_{m\partial G}$  компонент подсхем. Таким образом, система уравнений (25) содержит следующие внутренние переменные:

1. Напряжения компонент  $U_{\partial cG}$ , которые не входят в подсхемы, но входят в ветви дерева графа эквивалентной схемы замещения.

2. Напряжения компонент  $U_{s\partial E_p}$  эквивалентных схем подсхем, входящих в ветви дерева графа эквивалентной схемы замещения.

Кроме того, СНАУ (25) содержит внешние переменные – напряжения  $U_{m\partial G}$  компонент  $m$ -ой подсхемы, где  $m = 1, 2, \dots, N$ .

Из вышерассмотренного следует, что математическая модель эквивалентной схемы замещения состоит из системы уравнений (25), системы уравнений связи (12) – (24) и алгоритмов выбора дерева, составления и преобразования топологических матриц сечений  $F$  и контуров  $F^t$  графа эквивалентной цепи замещения. В свою очередь, математическая модель нелинейной электрической цепи, расщепленной на подсхемы, включает:

- математическую модель эквивалентной схемы замещения;
- $N$  математических моделей подсхем;
- алгоритм выбора дерева графа  $m$ -ой подсхемы и эквивалентной схемы замещения;
- алгоритм составления и преобразования топологических матриц сечений  $F_m$  и контуров

$F_m^t$   $m$ -ой подсхемы и топологических матриц контуров  $F^t$  и сечений  $F$  эквивалентной схемы замещения.

В математическую модель нелинейной электрической цепи входят те же переменные, что и в математические модели подсхем и эквивалентной схемы замещения. Областью существования переменных  $U_{m\partial G}, U_{\partial cG}, U_{s\partial E_p}$  математической модели нелинейной электрической цепи есть математические модели подсхем и эквивалентной схемы замещения.

В статье [2] предложена модификация итерационного метода Ньютона решения СНАУ, описывающей нелинейную электрическую цепь. Суть модификации заключается в следующем. Вектор приращений переменных на каждом итерационном шаге предлагается вычислять в резуль-

тате решения СЛАУ, описывающей линеаризованную нелинейную электрическую цепь. Только в этом случае можно корректно сформулировать задачу моделирования нелинейной электрической цепи не только на этапе составления СНАУ, но и в процессе решения СНАУ. В связи с этим, представляет интерес рассмотрение корректной формулировки задачи составления уравнений, описывающих линеаризованную (линейную) (ЛЛ) электрическую цепь по частям.

### 3.3. Математическая модель линейной (линеаризованной) подсхемы

Составление математической модели  $m$ -ой ЛЛ подсхемы будет состоять из тех же этапов, что и составление математической модели нелинейной  $m$ -ой подсхемы. При составлении модели следует учесть, что функциональные зависимости компонент (1)  $m$ -ой подсхемы в данном случае будут иметь следующий вид:

$$I_{mi} = \sum_{j=1}^k G_{mj} U_{mj}, \quad (26)$$

где  $I_{mi}$  – ток  $i$ -ой ЛЛ компоненты  $m$ -ой подсхемы,  $G_{mj}$  – собственная ( $i = j$ ) или взаимная проводимость  $i$ -ой ЛЛ компоненты с  $j$ -ой,  $U_{mj}$  – напряжение  $j$ -ой компоненты,  $k$  – количество компонент в  $m$ -ой подсхеме. В случае линеаризованной подсхемы проводимость компоненты определяется из функциональной зависимости нелинейной компоненты (1) следующим образом:

$$G_{mj} = \frac{d(f_{mi}(U_{m1}, U_{m2}, \dots, U_{mj}, \dots, U_{mk}))}{dU_{mj}}. \quad (27)$$

Как следует из (26), подсхема содержит напряжениеуправляемые, напряжениезависимые ЛЛ компоненты. Для  $m$ -ой ЛЛ подсхемы вектор компонентных уравнений (9) после группирования на компоненты, которые входят в дерево и хорды, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} I_{m\partial G} &= G_{m\partial G m\partial G} U_{m\partial G} + G_{m\partial G m\chi G} U_{m\chi G}, \\ I_{m\chi G} &= G_{m\chi G m\partial G} U_{m\partial G} + G_{m\chi G m\chi G} U_{m\chi G}, \end{aligned} \quad (28)$$

где  $G_{m\partial G m\partial G}$ ,  $G_{m\partial G m\chi G}$ ,  $G_{m\chi G m\partial G}$ ,  $G_{m\chi G m\chi G}$  – матрицы собственных и взаимных проводимостей – результат группирования компонентных уравнений (26) и представления их в матричном виде. Функциональные зависимости ЛЛ компонент эквивалентной схемы  $m$ -ой подсхемы можно представить следующим образом:

$$I_{m\partial E_p} = F_{m\partial E_p m\chi G} (G_{m\chi G m\partial G} U_{m\partial G} + G_{m\chi G m\chi G} U_{m\chi G}) + F_{m\partial E_p m\chi J} I_{m\chi J}. \quad (29)$$

Следует заметить, что в случае линеаризованной нелинейной электрической цепи элемент вектора напряжения  $U_{m\partial E} = 0$  и элемент вектора тока  $I_{m\chi J} = 0$ .

Система уравнений связи (6) – (9) и компонентных уравнений (28), а также система уравнений (10) описывают ЛЛ  $m$ -ую подсхему. После соответствующих преобразований система уравнений (10) будет иметь следующий вид:

$$\left| \begin{array}{cc} G_{m\partial G} & G_{m\partial G m\partial E_p} \end{array} \right| \begin{array}{c} U_{m\partial G} \\ U_{m\partial E_p} \end{array} = - \left| \begin{array}{cc} G_{m\partial G m\partial E} & F_{m\partial G m\chi J} \end{array} \right| \begin{array}{c} U_{m\partial E} \\ I_{m\chi J} \end{array} + f_m, \quad (30)$$

где  $G_{m\partial G} = G_{m\partial G m\partial G} + G_{m\partial G m\chi G} (-F_{m\chi G m\partial G}^t) - F_{m\partial G m\chi G} (G_{m\chi G m\partial G} + G_{m\chi G m\chi G} (-F_{m\chi G m\partial G}^t))$ ,

$$G_{m\partial Gm\partial E_p} = G_{m\partial Gm\partial G}(-F_{mxGm\partial E_p}^t) - F_{m\partial Gm\partial G}(G_{mxGm\partial G}(-F_{mxGm\partial E_p}^t)),$$

$$G_{m\partial Gm\partial E} = G_{m\partial Gm\partial G}(-F_{mxGm\partial E}^t) - F_{m\partial Gm\partial G}(G_{mxGm\partial G}(-F_{mxGm\partial E}^t)),$$

$f_m$  – вектор невязок СНАУ (10), в случае линейной подсхемы  $f_m = 0$ .

Система уравнений (30) содержит два типа переменных, а именно, внутренние переменные – напряжения  $U_{m\partial G}$  компонент, которые входят в ветви дерева графа ЛЛ  $m$ -ой подсхемы, и внешние переменные – напряжения  $U_{m\partial E_p}$ , которые приложены к полюсам ЛЛ  $m$ -ой подсхемы.

Для контроля корректности составляемой системы уравнений (30) применяется система уравнений (8) в следующем виде:

$$I_{m\partial G} = F_{m\partial Gm\partial G}I_{mxG} + F_{m\partial Gm\partial J}I_{mxJ}.$$

Учитывая (28), ее нетрудно преобразовать к следующему виду:

$$G_{D_{G_i}}U_{D_i} - \sum_{j=1}^r G_{X_{G_{ij}}}U_{X_{ij}}, \quad i = 1, 2, \dots, w, \quad (31)$$

где  $r$  – количество ветвей хорд, входящих в сечение  $i$ -ой ветви дерева,  $w$  – количество ветвей дерева в  $m$ -ой подсхеме,  $G_{D_{G_i}}$  – проводимость компоненты  $i$ -ой ветви дерева графа  $m$ -ой подсхемы,  $G_{X_{G_{ij}}}$  – проводимость компоненты  $j$ -ой ветви хорды графа  $m$ -ой подсхемы, входящей в сечение  $i$ -ой ветви. В выражении (31) приведены только члены, которые входят в сечение  $i$ -ой ветви дерева. СЛАУ (30) будет считаться корректно составленной, если выполняется следующее неравенство:

$$G_{D_{G_i}} \geq G_{X_{G_{ij}}} \quad j = 1, 2, \dots, r. \quad (32)$$

В противном случае необходимо выполнить целенаправленный выбор переменных  $U_{m\partial G}$  при пересоставлении топологических матриц контуров  $F_m^t$  и сечений  $F_m$  и пересчет текущего итерационного шага решения СНАУ.

Таким образом, математическая модель ЛЛ  $m$ -ой подсхемы включает систему уравнений (30), системы уравнений связей (7) – (9), алгоритмы выбора дерева графа  $m$ -ой подсхемы, составления и преобразования топологических матриц сечений  $F_m$  и контуров  $F_m^t$  и алгоритм проверки на корректность составленной системы уравнений (30).

Внутренние переменные напряжения  $U_{m\partial G}$  ЛЛ компонент подсхемы определяются из системы уравнений (30) следующим образом:

$$U_{m\partial G} = -G_{m\partial G}^{-1} \begin{vmatrix} G_{m\partial Gm\partial E_p} & G_{m\partial Gm\partial E} & F_{m\partial Gm\partial J} \\ U_{m\partial E_p} \\ U_{m\partial E} \\ I_{mxJ} \end{vmatrix} + G_{m\partial G}^{-1} f_m. \quad (33)$$

В этом случае функциональные зависимости (29) ЛЛ компонент эквивалентной схемы  $m$ -ой подсхемы будут иметь вид:

$$I_{m\partial E_p} = G_{m\partial E_p, m\partial E_p} U_{m\partial E_p} + G_{m\partial E_p, m\partial E} U_{m\partial E} + G_{m\partial E_p, mxJ} I_{mxJ} + G_{m\partial E_p, mf} f_m, \quad p = 1, 2, \dots, n_m, \quad (34)$$

где

$$\begin{aligned}
G_{m\partial E_p m\partial E_p} &= F_{m\partial E_p mxG} (G_{mxGm\partial G} (-G_{m\partial G}^{-1} G_{m\partial Gm\partial E_p}) + G_{mxGmxG} (-F_{mxGm\partial E_p}^t + F_{mxGm\partial G}^t (G_{m\partial G}^{-1} G_{m\partial Gm\partial E_p}))), \\
G_{m\partial E_p m\partial E} &= F_{m\partial E_p mxG} (G_{mxGm\partial G} (-G_{m\partial G}^{-1} G_{m\partial Gm\partial E}) + G_{mxGmxG} (-F_{mxGm\partial E}^t + F_{mxGm\partial G}^t (-G_{m\partial G}^{-1} G_{m\partial Gm\partial E}))), \\
G_{m\partial E_p mxJ} &= F_{m\partial E_p mxG} (G_{mxGm\partial G} (-G_{m\partial G}^{-1} F_{m\partial GmxJ}) + G_{mxGmxG} (-F_{mxGm\partial G}^t) (G_{m\partial G}^{-1} G_{m\partial GmxJ}))) + F_{m\partial E_p mxJ}, \\
G_{m\partial E_p mf} &= F_{m\partial E_p mxG} (G_{mxGm\partial G} (G_{m\partial G}^{-1}) + G_{mxGmxG} (-F_{mxGm\partial G}^t) (G_{m\partial G}^{-1})).
\end{aligned}$$

Как следует из (34), компоненты эквивалентной схемы  $m$ -ой подсхемы есть напряжение-управляемые и напряжениезависимые, токи компонент зависят только от напряжений  $U_{mE_p}$ , приложенных к полюсам подсхемы. Тип компонент определяют напряжения, входящие в функциональную зависимость. Следующим этапом есть составление математического описания электрической цепи, в которой подсхемы заменены эквивалентными схемами.

### 3.4. Математическая модель ЛЛ электрической цепи, расщепленной на подсхемы

Будем считать ЛЛ электрическую цепь, в которой подсхемы заменены эквивалентными схемами, ЛЛ эквивалентной схемой замещения. В этом случае в ЛЛ эквивалентную схему замещения будут входить ЛЛ двухполюсные компоненты, которые не включены в подсхемы, и компоненты эквивалентных схем, заменяющих ЛЛ подсхемы. Составление математической модели ЛЛ эквивалентной схемы замещения будет состоять из тех же этапов, что и составление математической модели эквивалентной схемы замещения нелинейной электрической цепи.

В случае линеаризованной нелинейной электрической цепи проводимости компонент, которые не входят в подсхемы, определяются по формуле (27) и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
I_{\partial cG} &= G_{\partial cG\partial cG} U_{\partial cG} + G_{\partial cGxcG} U_{xcG}, \\
I_{xcG} &= G_{xcG\partial cG} U_{\partial cG} + G_{xcGxcG} U_{xcG}.
\end{aligned} \quad (35)$$

Проводимости  $G_{\partial cG\partial cG}$ ,  $G_{\partial cGxcG}$ ,  $G_{xcG\partial cG}$ ,  $G_{xcGxcG}$  определяются и группируются таким же образом, как и для компонент подсхем. Проводимости компонент эквивалентных схем подсхем  $G_{m\partial E_p m\partial E_p}$  группируются так же, как напряжения и токи компонент (20) эквивалентных схем подсхем, являющихся частью эквивалентной схемы замещения. После группирования  $G_{m\partial E_p m\partial E_p}$  имеет следующий вид:

$$G_{m\partial E_p m\partial E_p} = \begin{vmatrix} G_{m\partial_0 E_p m\partial E_p} \\ G_{m\partial_x E_p m\partial E_p} \end{vmatrix}. \quad (36)$$

В этом случае, учитывая (36), компонентные уравнения (23), (24) двухполюсных компонент эквивалентных схем подсхем будут записаны как

$$I_{s_m \partial E_p} = G_{m\partial_0 E_p m\partial E_p} U_{m\partial E_p} + G_{m\partial E_p m\partial E} U_{m\partial E} + G_{m\partial E_p mxJ} I_{mxJ} + G_{m\partial E_p mf} f_m, \quad p = 1, 2, \dots, n_m, \quad (37)$$

$$I_{s_m x E_p} = G_{m\partial_x E_p mx E_p} U_{mx E_p} + G_{mx E_p m\partial E} U_{m\partial E} + G_{mx E_p mxJ} I_{mxJ} + G_{mx E_p mf} f_m, \quad p = 1, 2, \dots, n_m. \quad (38)$$

Из анализа систем уравнений (12) – (18), (20) – (22) и компонентных уравнений (35) – (38) следует, что в том случае, когда известны векторы напряжений  $U_{\partial cE}$ ,  $U_{\partial cG}$ ,  $U_{s\partial E_p}$  и токов  $I_{xcJ}$  компонент ЛЛ эквивалентной схемы замещения и векторы напряжений  $U_{m\partial E}$  и токов  $I_{mxJ}$  компонент ЛЛ подсхем, можно определить остальные токи и напряжения компонент эквивалентной схемы

замещения. Следует заметить, что в случае линеаризованной нелинейной электрической цепи элемент вектора напряжения есть  $U_{m\partial E} = 0$  и тока есть  $I_{mxJ} = 0$  компонент  $m$ -ой подсхемы, а в случае линейной электрической цепи –  $f_m = 0$ . Учитывая (35) и (13), токи компонент  $I_{\partial cG}$ ,  $I_{cxG}$  системы уравнений (25) определяются через напряжения  $U_{\partial cG}$ ,  $U_{s\partial E_p}$ . Учитывая (37), (38), (20) и (21), токи компонент  $I_{s\partial E_p}$ ,  $I_{sxE}$  системы уравнений (25) определяются через напряжения  $U_{\partial cG}$ ,  $U_{s\partial E}$  эквивалентной схемы замещения. В свою очередь, напряжения  $U_{\partial cG}$ ,  $U_{s\partial E_p}$  можно определить из решения СЛАУ (25).

Для контроля корректности составляемой системы уравнений ЛЛ эквивалентной схемы замещения (25) применяется тот же алгоритм, что и для проверки на корректность составляемых уравнений  $m$ -ой подсхемы. При этом вместо матричного уравнения (8) используется (25) в следующем виде:

$$\begin{cases} I_{\partial cG} = (F_{\partial cGxcG} I_{xcG} + F_{\partial cGsxE_p} I_{sxE_p} + F_{\partial cGxcJ} I_{xcJ}) \\ I_{s\partial E_p} = (F_{s\partial E_pxcG} I_{xcG} + F_{s\partial E_psxE_p} I_{sxE_p} + F_{s\partial E_pxcJ} I_{xcJ}) \end{cases} \quad (39)$$

Учитывая (35) – (38), матричное уравнение (39) нетрудно преобразовать к виду (31) и проверить на корректность систему уравнений (25).

Таким образом, система уравнений (25), описывающая ЛЛ эквивалентную схему замещения, содержит следующие типы переменных:

1. Напряжения компонент  $U_{\partial cG}$ , не входящих в эквивалентные схемы ЛЛ подсхем, но входящих в ветви дерева графа эквивалентной схемы замещения.

2. Напряжения компонент  $U_{s\partial E_p}$  эквивалентных схем ЛЛ подсхем, входящих в ветви дерева графа эквивалентной схемы замещения.

Из вышерассмотренного следует, что в математическую модель ЛЛ эквивалентной схемы замещения входят система уравнений (25), системы уравнений связи (12) – (18), (20) – (22), компонентные уравнения (35) – (38), алгоритм проверки на корректность составленной системы уравнений (25) и алгоритмы выбора дерева, составления и преобразования топологических матриц сечений  $F$  и контуров  $F^t$  графа эквивалентной схемы замещения.

В свою очередь, математическая модель ЛЛ электрической цепи, расщепленной на подсхемы, включает:

- математическую модель ЛЛ эквивалентной схемы замещения;
- $N$  математических моделей ЛЛ подсхем;
- алгоритмы проверки на корректность математической модели ЛЛ эквивалентной схемы замещения и математических моделей ЛЛ подсхем;
- алгоритм выбора дерева графа подсхемы и дерева графа эквивалентной схемы замещения;
- алгоритм составления и преобразования топологических матриц сечений  $F_m$  и контуров  $F_m^t$   $m$ -ой подсхемы и топологических матриц контуров  $F^t$  и сечений  $F$  эквивалентной схемы

замещения.

Переменные математической модели имеют следующие области существования:

- напряжения компонент  $U_{dcG}$  – математическая модель эквивалентной схемы замещения;
- напряжения компонент  $U_{sdE_p}$  – математическая модель эквивалентной схемы замещения

и  $N$  математических моделей подсхем;

- напряжения компонент  $U_{m\partial G}$  – математическая модель  $m$ -ой подсхемы, где  $m = 1, 2, \dots, N$ .

#### 4. Обсуждение результатов

Практика показывает, что подавляющее большинство сложных систем как в природе, так и в технике, в том числе и электрические цепи, имеют иерархическую внутреннюю структуру. Предложенный в данной работе метод позволяет создать иерархическую математическую модель нелинейной электрической цепи, разделенной на подсхемы. Так как каждую подсхему можно разделить на подсхемы и т.д. до самого нижнего "элементарного" уровня, причем выбор уровня, который следует считать элементарным, остается за пользователем.

Анализ математической модели сложной нелинейной электрической цепи по частям позволяет сделать следующие выводы. Вычислительная сложность практически не меняется при вычислении как по математической модели нелинейной электрической цепи, разделенной на подсхемы, так и при вычислении по математической модели нелинейной электрической цепи.

Повысить эффективность моделирования нелинейной электрической цепи по частям, с точки зрения вычислительных и временных затрат на моделирование, можно только за счет применения блочно-матричных методов решения СНАУ. Для увеличения скорости сходимости метода решения и тем самым уменьшения времени решения задачи итерационный шаг метода решения будет содержать целый ряд дополнительных операций. Автоматическое выделение «плохих» блоков уравнений (в данном случае в качестве блока выступает математическая модель подсхемы или эквивалентной схемы замещения), которые обуславливают отсутствие сходимости всей системы уравнений, нахождение начальных приближений для переменных «плохих» блоков уравнений, решение «плохих» уравнений методом относительно своих переменных и операции одного шага метода для оставшихся «хороших» уравнений исходной системы. Если не считать отдельных работ [12], в которых рассматриваются блочно-матричные методы решения СНАУ на уровне теоретических исследований, то для практического применения этих методов требуются дополнительные исследования.

Расщепление ЛЛ электрической цепи на подсхемы можно рассматривать как один из вариантов структурной декомпозиции. Это означает, что вместо решения СЛАУ порядка  $N$ , которая описывает ЛЛ электрическую цепь, решается  $m$  СЛАУ порядка  $N/m$ , описывающих подсхемы электрической цепи, и СЛАУ порядка  $h$ , описывающей эквивалентную схему замещения. Это можно интерпретировать как один из вариантов блочно-матричного метода решения СЛАУ. В данном случае уменьшается не только вычислительная сложность, но и временная. Задача оценки эффек-

тивности такого подхода довольно подробно рассмотрена в литературе [13]. Как следует из литературы, в этом случае вычислительная сложность будет порядка  $o(m(N/m)^3 + h^3)$ .

Расщепление сложной нелинейной электрической цепи на подсхемы следует рассматривать, как распараллеливание математической модели нелинейной электрической цепи на этапе подготовки задачи. При расщеплении цепи используются знание технической задачи и опыт пользователя. Математические модели подсхем и эквивалентной схемы замещения следует рассматривать как отдельные вычислительные процессы. Связь между процессами происходит на уровне обмена переменными после выполнения итерационного процесса. Эффективность алгоритма в этом случае достигается за счет уменьшения времени решения задачи.

## 5. Заключение

В связи с тем, что моделирование – это неотъемлемая часть интеллектуальной деятельности человека, достоверность результатов моделирования становится основным критерием оценки результатов моделирования. Это требует новых подходов к разработке методов и алгоритмов описания сложных объектов и решения составленных описаний.

В данной работе на примере моделирования нелинейной электрической цепи с применением расщепления на подсхемы показано, что можно учесть требования корректной формулировки задачи моделирования нелинейной электрической цепи на этапе составления математической модели. Предложен механизм формирования эквивалентных схем подсхем. Показано, что корректная постановка задачи моделирования достигнута за счет целенаправленного выбора в качестве независимых переменных системы уравнений, описывающей электрическую цепь, напряжений компонент ветвей дерева графа как эквивалентной схемы подсхемы, так и эквивалентной схемы замещения. В качестве критерия выбора переменных используются параметры функциональных зависимостей компонент, т.е. при составлении системы уравнений, описывающих электрическую цепь, учитываются конкретные особенности этой цепи.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Волобоев В.П. Об одном подходе к моделированию сложных систем / В.П. Волобоев, В.П. Клименко // Математичні машини і системи. – 2008. – № 4. – С. 111 – 122.
2. Волобоев В.П. Об одном подходе к моделированию энергосистем / В.П. Волобоев, В.П. Клименко // Математичні машини і системи. – 2009. – № 4. – С. 106 – 118.
3. Крон Г. Исследование сложных систем по частям – диакоптика / Крон Г. – М.: Наука, 1972. – 542 с.
4. Хэпп Х. Диакоптика и электрические цепи / Хэпп Х. – М.: Мир, 1974. – 344 с.
5. Шакиров М.А. Теоретические основы электротехники. Новые идеи и принципы. Схемоанализ и диакоптика / Шакиров М.А. – СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2001. – 212 с.
6. Курганов С.А. Схемно-алгебраическое моделирование и расчет линейных электрических цепей: учебное пособие / С.А. Курганов, В.В. Филаретов. – Ульяновск: Изд-во УлГТУ, 2005. – 320 с.
7. Пухов Г.Е. Избранные вопросы теории математических машин / Пухов Г.Е. – Киев: Изд-во Академии наук УССР, 1964. – 264 с.
8. Неболюбов Е.Ю. Исследование и расчет трансформаторных мостов с дискретным уравниванием / Неболюбов Е.Ю. – Фрунзе: Илим, 1970. – 119 с.
9. Бунь Р.А. Моделирование электрических цепей методом подсхем / Бунь Р.А., Васильев Е.Д., Семотюк В.Н. – Киев: Наукова думка, 1991. – 172 с.
10. Волобоев В.П. Составление уравнений цепи, содержащей зависимые двухполюсники и многополюсники / В.П. Волобоев // Вопросы проектирования математических машин и устройств. Научный совет по кибернетике АН УССР. – Киев: ИК АН УССР, 1972. – С. 3 – 16.
9. Волобоев В.П. К учету сходимости численных методов при составлении уравнений цепи постоянного тока / В.П. Волобоев // Вопросы проектирования математических машин и устройств. Научный совет по кибернетике АН УССР. – Киев: ИК АН УССР, 1972. – С. 17 – 26.

10. Волобоев В.П. О расширении класса схем, моделируемых методом напряжений ветвей дерева / В.П. Волобоев // Проектирование технических средств ЭВМ и систем: сб. научн. тр. – Киев: Изд-во ИК АН УССР, 1982. – С. 32 – 36.
11. Hosoya M. The Straightforward Expansion of Helmholtz – Thevenin’s Theorem to Multi – Terminal Networks / M. Hosoya // Bulletin of the Faculty of Science. University of Ryukyus. – 2001. – N 71. – P. 39 – 45.
12. Годлевский В.С., Годлевский В.В. Блочный гибридный метод решения систем нелинейных конечных уравнений / В.С. Годлевский, В.В. Годлевский // Электронное моделирование. – 2003. – Т. 25, № 6. – С. 99 – 109.
13. Гегель В.П. Теория и практика параллельных вычислений [Электронный ресурс] / В.П. Гегель. – Режим доступа: <http://www.intuit.ru/department/calculate/paralltp/0/>.

*Стаття надійшла до редакції 27.04.2010*