

О.Н. Литвин, Л.С. Лобанова, И.В. Нефёдова

**Общий метод построения полиномов с некоторыми свойствами**

Предложен и исследован метод выбора узлов полиномов, которые вместе со своими производными равны нулю на концах определенного отрезка и наименее отклоняются от нуля на нем.

The work offers and researches the method of the choice of knots of polynomials, which together with the differentials equal to zero on the ends definite of a segment and deviate from a zero the least on this segment.

Запропоновано і досліджено метод вибору вузлів поліномів, які разом із своїми похідними дорівнюють нулю на кінцях певного відрізка і найменше відхиляються від нуля на ньому.

**Введение.** В общей теории приближения функций одной переменной интерполяционными полиномами Лагранжа важен выбор узлов интерполяции. Но иногда приближаемая функция имеет нули в заранее заданных точках (например, когда приближаемая функция есть решением многоточечной краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений). В этом случае авторам не удалось найти общую теорию построения полиномов, принимающих заданные значения (вместе со своими производными до  $(m-1)$ -го порядка) в заранее заданной системе точек и наименее отклоняющихся от нуля. В то же время, учитывая большое влияние идей Чебышева П.Л. о построении полиномов, наименее отклоняющихся от нуля, на развитие теории приближения функций полиномами, следует отметить актуальность задачи построения полиномов, наименее отклоняющихся от нуля и удовлетворяющих указанным ограничениям в заданной системе точек. В данной статье на основе использования обобщенной теоремы о чебышевском альтернансе предложен такой алгоритм. С его помощью построено несколько полиномов и приведены примеры приближения конкретных функций интерполяционными полиномами с узлами интерполяции, которые есть корнями найденных полиномов.

**Анализ последних исследований и публикаций**

Авторами статьи проведен поиск работ об оптимизации узлов в методе конечных элемен-

тов [1–5], из которого следует, что теорем, аналогичных теоремам Чебышева [6] о наилучшем приближении функций, которые есть решением краевых задач, на данный момент не существуют.

Как известно [7], для погрешности приближения дифференцируемой функции интерполяционным полиномом Лагранжа

$$L_N y(x) = \sum_{k=0}^N y(X_k) l_{N,k}(x), \quad (1)$$

где  $l_{N,k}(x) = \prod_{\substack{j=0, \\ j \neq k}}^N \frac{x - X_j}{X_k - X_j}$ , справедлива следующая формула:

$$y(x) - L_N y(x) = \frac{y^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} \prod_{j=0}^N (x - X_j), \quad (2)$$

$$a \leq X_0 < \xi < X_N \leq b,$$

из которой для остаточного члена можно сделать существенный вывод: норма погрешности в метрике  $C[a, b]$  определяется следующим неравенством:

$$\|y(\cdot) - L_N y(\cdot)\|_{C[a,b]} \leq \frac{M_{N+1}}{(N+1)!} \prod_{j=0}^N |x - X_j|, \quad (3)$$

$$a \leq x \leq b,$$

для всех функций  $y(x)$  с ограниченной  $(N+1)$ -й производной,  $M_{N+1} = \max_{a \leq x \leq b} |y^{(N+1)}(x)|$ , т.е. наименьшая погрешность на всем отрезке  $[a, b]$  будет зависеть от выбора узлов  $X_j$  ( $j = \overline{1, N}$ ) интерполяционного полинома. Погрешность – наименьшая в случае, когда узлами интерполяции есть корни полиномов Чебышева первого рода  $T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x)$  со старшим коэффициентом единица.

**Ключевые слова:** полиномы, наименее отклоняющиеся от нуля; интерполяция; экстремум функции.

Для практики интересна задача выбора узлов интерполяции в интерполяционном полиноме (1) для случая, когда в виде (1) ищется приближение решения краевой задачи

$$Ay(x) = f(x), \quad a < x < b, \quad (4)$$

$$y^{(s)}(a) = 0, \quad y^{(s)}(b) = 0, \quad s = \overline{0, m-1}, \quad (5)$$

где  $Ay(x) = \sum_{s=0}^m (-1)^s \frac{d^s}{dx^s} \left( p_s(x) \frac{d^s y}{dx^s} \right)$  и неиз-

вестные параметры  $C_1, C_2, \dots, C_{N-1}$  в формуле

$$L_N(x, X, C) = \sum_{k=1}^{N-1} C_k l_{N,k}(x) \quad (6)$$

находятся из условия

$$J(X, C) = \int_a^b \left( \sum_{s=0}^m p_s(x) \left( \frac{d^s}{dx^s} L_N(x, X, C) \right)^2 - 2f(x) L_N(x, X, C) \right) dx \rightarrow \min_{X, C}. \quad (7)$$

Авторам неизвестны утверждения типа (3) для случая, когда приближаемая функция есть решением краевой задачи для дифференциального уравнения, т.е. задана неявно. Хотя, если представить решение задачи (4) и (5) с помощью функции Грина в виде

$$y(x) = \int_a^b G(x, t) f(t) dt,$$

то можно было бы оценить  $y^{(N+1)}$  через соответствующие производные функции Грина. В этом случае можно воспользоваться леммой [8], согласно которой погрешность приближенного решения краевой задачи ограничена сверху произведением некоторой постоянной, зависящей от дифференциального оператора краевой задачи, на погрешность наилучшего приближения точного решения краевой задачи используемыми линейными комбинациями системы линейно-независимых функций (в нашем случае – линейными комбинациями базисных интерполяционных полиномов Лагранжа). Но в формуле (3) для остатка не требовалось, чтобы приближаемая функция на концах интервала равнялась нулю.

В работах [9, 10] рассмотрены другие случаи ограничений на полиномы, наименее от-

клоняющиеся от нуля. Например, коэффициент при  $x^{n-1}$  полинома степени  $n$  фиксированный, а другие коэффициенты полинома находятся так, чтобы его наибольшее отклонение от нуля на отрезке  $[-1, 1]$  было наименьшим.

Поскольку оптимальный выбор узлов – актуальная проблема, в данной работе поставлена и решается следующая задача.

### Постановка задачи

Построить и исследовать метод выбора узлов полиномов, точно удовлетворяющих граничным условиям (5) на концах заданного отрезка  $[-1, 1]$  и наименее отклоняющихся от нуля на этом отрезке.

**Построение полиномов  $P_{2n+2m}(x)$  со свойствами  $P_{2n+2m}^{(s)}(\pm 1) = 0, s = \overline{0, m-1}$ , наименее отклоняющихся от нуля на отрезке  $[-1, 1]$**

Метод, предлагаемый в данной статье, состоит в построении полиномов, точно удовлетворяющих граничным условиям и в то же время наименее отклоняющихся от нуля. Эти полиномы – не полиномы Чебышева, поскольку они должны равняться нулю на концах интервала  $[-1, 1]$ . Для их нахождения в работе используется обобщение чебышевской теоремы об альтернансе.

**Теорема 1** [11, с. 12]. Пусть в произвольном линейном нормированном пространстве  $E$  выбраны какие-нибудь  $n+1$  линейно независимых элементов  $g_0, g_1, \dots, g_n$ . Тогда для любого  $x \in E$  среди «полиномов»  $P_n(c; g)$  вида

$$P_n(c; g) = \sum_0^n c_k g_k,$$

где  $c_k$  – произвольные действительные числа, существует по крайней мере один «полином»

$P_n^*(c^*; g) = \sum_0^n c_k^* g_k$  наилучшего приближения элемента  $x$ , такой, что

$$\inf_{c_k} \left\| x - \sum_0^n c_k g_k \right\| = \left\| x - \sum_0^n c_k^* g_k \right\|.$$

**Теорема 2** (об альтернансе) [10, с. 91]. Для того чтобы полином  $p_0(t) = \sum_{k=1}^{n+1} a_k t^{k-1}, a_{n+1} = 1$  был

полиномом наилучшего приближения для функции  $x(\cdot) \in C[t_0, t_1]$  в пространстве  $C[t_0, t_1]$ , необходимо и достаточно, чтобы нашлись  $n+2$  точки  $t_0 \leq \tau_1 < \dots < \tau_{n+2} \leq t_1$ , где разность  $x(\cdot) - p_0(\cdot)$ , последовательно чередуясь, принимает свои максимальное и минимальное значения.

Для случая, когда полином наилучшего приближения должен удовлетворять однородным граничным условиям, справедливо следующее обобщение теоремы об альтернансе.

**Теорема 3.** Если коэффициенты полинома

$$P_{2n+2m}(x) = (x^2 - 1)^m \left( x^{2n} + \sum_{k=0}^{n-1} a_{2k} x^{2k} \right) \quad (8)$$

находить из условий  $P_{2n+2m}(x_q) = (-1)^q \cdot \varepsilon$ ,  $q = \overline{1, 2n+1}$  и  $\max_{-1 < x < 1} |P_{2n+2m}(x)| = \varepsilon$ , то полученный полином  $P_{2n+2m}(x)$  будет полиномом, равным нулю при  $x = \pm 1$  и наименее отклоняющимся от нуля на интервале  $(-1, 1)$ :

$$\max_{-1 < x < 1} |P_{2n+2m}(x)| = \varepsilon \rightarrow \min_{a_{2p}, p=0, n-1}.$$

Доказательство следует из теоремы об альтернансе.

Алгоритм численной реализации утверждения теоремы 3 продемонстрируем на примерах 1, 2.

**Пример 1.** Найдем полином  $P_4(x)$  ( $n=1, m=1$ ) со свойствами  $P_4(\pm 1) = 0$ , который наименее отклоняется от нуля на интервале  $(-1, 1)$  и есть четным на этом интервале. Будем искать этот полином в виде:  $P_4(x) = (x^2 - 1)(x^2 + a_0)$ . На рис. 1 представлено схематическое изображение полинома  $P_4(x)$ .

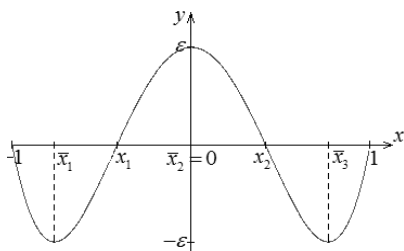


Рис. 1

Его корнями, принадлежащими промежутку  $(-1, 1)$ , есть  $x_{1,2} = \pm \sqrt{-a_0}$ .

Заметим, что  $P_4(0) = -a_0$ . Таким образом, в точках  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ ,  $-1 < \bar{x}_1 < x_1 = -\sqrt{-a_0}$ ,  $\sqrt{-a_0} = x_2 < \bar{x}_3 < 1$ ,  $\bar{x}_3 = -\bar{x}_1$  и  $\bar{x}_2 = 0$  должны выполняться равенства  $P_4(\bar{x}_1) = P_4(\bar{x}_3) = -\varepsilon$ ,  $P_4(\bar{x}_2) = \varepsilon$ . Следовательно, имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} P_4(\bar{x}_1) = -\varepsilon, \\ P_4(\bar{x}_2) = \varepsilon, \\ P_4(\bar{x}_3) = -\varepsilon, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\bar{x}_1^2 - 1)(\bar{x}_1^2 + a_0) = -\varepsilon, \\ P_4(0) = -a_0 = \varepsilon, \\ (\bar{x}_3^2 - 1)(\bar{x}_3^2 + a_0) = -\varepsilon. \end{cases} \quad (9)$$

Очевидно, что первое и третье уравнения совпадают. Учитывая второе уравнение системы (9), получаем

$$P_4(x) = (x^2 - 1)(x^2 - \varepsilon), \text{ где } \varepsilon = \frac{(1 - \bar{x}_1^2)\bar{x}_1^2}{2 - \bar{x}_1^2}.$$

Экстремум функции  $P_4(x)$  достигается в точках

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= -\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{2}} = -\sqrt{\frac{2-\bar{x}_1^4}{2(2-\bar{x}_1^2)}}, \quad \bar{x}_2 = 0, \\ \bar{x}_3 &= \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{2}} = \sqrt{\frac{2-\bar{x}_1^4}{2(2-\bar{x}_1^2)}}. \end{aligned}$$

Следовательно,  $\bar{x}_1^2 = \frac{2 - \bar{x}_1^4}{2(2 - \bar{x}_1^2)}$ , откуда

$$\bar{x}_1 = -\sqrt{2 - \sqrt{2}}, \quad \bar{x}_3 = \sqrt{2 - \sqrt{2}}, \quad \text{а } \varepsilon = (\sqrt{2} - 1)^2.$$

Тогда  $\max_{-1 < x < 1} |P_4(x)| = \varepsilon = (\sqrt{2} - 1)^2$ . Корни полинома  $P_4(x)$  внутри отрезка  $(-1, 1)$  равны  $x_1 = -\sqrt{2} + 1$ ,  $x_2 = \sqrt{2} - 1$ .

Таким образом, найден полином  $P_4(x) = (x^2 - 1)(x - \sqrt{2} + 1)(x + \sqrt{2} - 1)$ , наименее отклоняющийся от нуля на интервале  $(-1, 1)$ , и на его концах равный нулю (рис. 2).

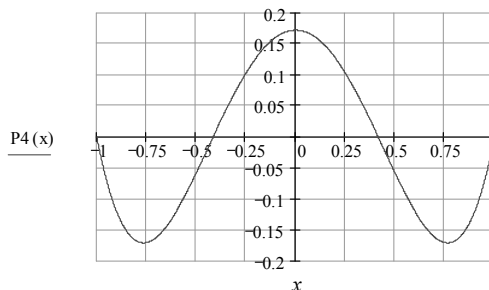


Рис. 2

**Пример 2.** Найдем полином  $P_6(x)$  ( $n=2, m=1$ ) со свойствами  $P_6(\pm 1)=0$ , который наименее отклоняется от нуля на интервале  $(-1, 1)$  и четный на этом интервале. Будем искать этот полином в виде  $P_6(x) = (x^2 - 1)(x^4 + a_2x^2 + a_0)$ . На рис. 3 представлено схематическое изображение полинома  $P_6(x)$ .

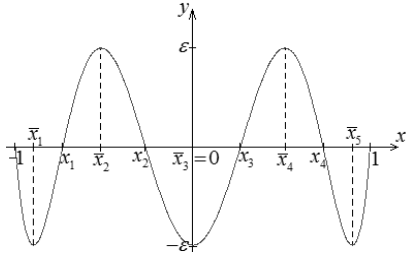


Рис. 3

Корни этого полинома, принадлежащие интервалу  $(-1, 1)$ , будут решением уравнения

$$x^4 + a_2x^2 + a_0 = 0: x_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{-\frac{a_2}{2} \pm \sqrt{\frac{a_2^2}{4} - a_0}}.$$

Заметим, что  $P_6(0) = -a_0 = -\varepsilon$ . В точках  $\bar{x}_k$  ( $k = \overline{1, 5}$ ) ( $\bar{x}_3 = 0, \bar{x}_4 = -\bar{x}_2, \bar{x}_5 = -\bar{x}_1$ ),  $-1 < \bar{x}_1 < x_1 < \bar{x}_2 < x_2 < \bar{x}_3 < x_3 < \bar{x}_4 < x_4 < \bar{x}_5 < 1$  должны выполняться равенства  $P_6(\bar{x}_1) = P_6(\bar{x}_3) = P_6(\bar{x}_5) = -\varepsilon$ ,  $P_6(\bar{x}_2) = P_6(\bar{x}_4) = \varepsilon$ , что приводит к системе уравнений:

$$\begin{cases} P_6(\bar{x}_1) = -\varepsilon, \\ P_6(\bar{x}_2) = \varepsilon, \\ P_6(0) = -\varepsilon, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\bar{x}_1^2 - 1)(\bar{x}_1^4 + a_2\bar{x}_1^2 + a_0) = -\varepsilon, \\ (\bar{x}_2^2 - 1)(\bar{x}_2^4 + a_2\bar{x}_2^2 + a_0) = \varepsilon, \\ P_6(0) = -a_0 = -\varepsilon. \end{cases} \quad (10)$$

Учитывая третье уравнение системы (10), имеем

$$\begin{cases} (\bar{x}_1^2 - 1)(\bar{x}_1^4 + a_2\bar{x}_1^2 + \varepsilon) = -\varepsilon, \\ (\bar{x}_2^2 - 1)(\bar{x}_2^4 + a_2\bar{x}_2^2 + \varepsilon) = \varepsilon \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} a_2\bar{x}_1^2(\bar{x}_1^2 - 1) + \varepsilon\bar{x}_1^2 = -\bar{x}_1^4(\bar{x}_1^2 - 1), \\ a_2\bar{x}_2^2(\bar{x}_2^2 - 1) + \varepsilon(\bar{x}_2^2 - 2) = -\bar{x}_2^4(\bar{x}_2^2 - 1). \end{cases}$$

Решая последнюю систему относительно  $a_2$  и  $\varepsilon$ , получаем

$$a_2 = \frac{\bar{x}_2^4(\bar{x}_2^2 - 1) - \bar{x}_1^2(\bar{x}_1^2 - 1)(\bar{x}_2^2 - 2)}{(\bar{x}_1^2 - 1)(\bar{x}_2^2 - 2) - \bar{x}_2^2(\bar{x}_2^2 - 1)}; \quad (11)$$

$$\varepsilon = \frac{\bar{x}_2^2(\bar{x}_1^2 - 1)(\bar{x}_2^2 - 1)(\bar{x}_1^2 - \bar{x}_2^2)}{(\bar{x}_1^2 - 1)(\bar{x}_2^2 - 2) - \bar{x}_2^2(\bar{x}_2^2 - 1)}. \quad (12)$$

Найдем точки экстремума функции  $P_6(x) = (x^2 - 1)(x^4 + a_2x^2 + a_0)$ , учитывая, что  $a_0 = \varepsilon$ ,  $P_6'(x) = 2x(3x^4 + 2(a_2 - 1)x^2 + \varepsilon - a_2) = 0$ .

Поскольку экстремум функции  $P_6(x)$  достигается в точках  $\bar{x}_k$  ( $k = \overline{1, 5}$ ), причем  $\bar{x}_5 = -\bar{x}_1$ ,  $\bar{x}_4 = -\bar{x}_2$ ,  $\bar{x}_3 = 0$ , можно записать систему двух уравнений

$$\begin{cases} 3\bar{x}_1^{-4} + 2(a_2 - 1)\bar{x}_1^{-2} + \varepsilon - a_2 = 0 \\ 3\bar{x}_2^{-4} + 2(a_2 - 1)\bar{x}_2^{-2} + \varepsilon - a_2 = 0 \end{cases},$$

которая с учетом (11), (12) будет системой уравнений относительно  $\bar{x}_1, \bar{x}_2$  и имеет решение  $\bar{x}_1 = -0,8965754722$ ,  $\bar{x}_2 = -0,5176380902$ , что дает  $a_2 = -0,6076951543$ ,  $\varepsilon = 0,0384757729$ .

Таким образом, найден полином  $P_6(x) = (x^2 - 1)(x^4 - 0,6076951543x^2 + 0,0384757729)$ , наименее отклоняющийся от нуля на интервале  $(-1, 1)$  и на его концах равен нулю (рис. 4).

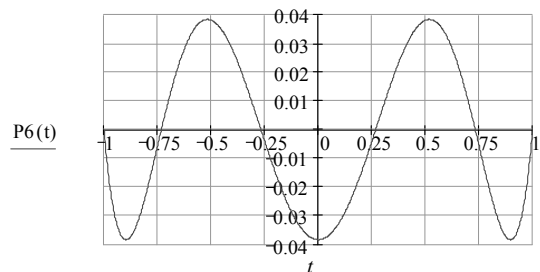


Рис. 4

Сформулируем общий алгоритм для нахождения полинома  $P_{2n+2m}(x)$  степени  $2n+2m$  с коэффициентом, равным единице при старшей степени, удовлетворяющий условию  $P_{2n+2m}(-1) = P_{2n+2m}(1) = 0$  и наименее отклоняющийся от нуля в норме  $C[-1, 1]$  на промежутке  $[-1, 1]$ :

- ищем полином  $P_{2n+2m}(x)$  в виде  $P_{2n+2m}(x) = (x^2 - 1)^m(x^{2n} + \sum_{k=0}^{n-1} a_{2k}x^{2k})$ ;

• неизвестные коэффициенты  $a_{2k} (k = \overline{1, n})$  находим из условий

$$P_{2n+2m}(\bar{x}_k) = (-1)^k \varepsilon, k = \overline{1, 2n+1} \quad (\varepsilon > 0), \quad (13)$$

определяющих систему уравнений, при этом  $P_{2n+2m}(0) = -a_0 = (-1)^{n-1} \varepsilon$ .

Решение системы (13) осуществляется по следующему алгоритму.

Подставляем вместо  $a_0$  во все уравнения системы (13)  $(-1)^n \varepsilon$  и решаем ее относительно коэффициентов полинома и  $\varepsilon$ , которые получатся как функции абсцисс точек экстремума  $\bar{x}_k (k = \overline{1, 2n+2m-1})$ . Используя необходимое условие экстремума и учитывая, что экстремум достигается в точках  $\bar{x}_k (k = \overline{1, 2n+2m-1})$ , получаем систему уравнений для определения  $\bar{x}_k (k = \overline{1, 2n+2m-1})$ . Решив эту систему, найдем точки экстремума полинома, а также его коэффициенты и корни.

По изложенному алгоритму найдены полиномы  $P_8(x) (n = 3, m = 1)$ ,  $P_{10}(x) (n = 4, m = 1)$ :

$$P_8(x) = (x^2 - 1)(x^6 - 1,0791322598x^4 + 0,2717399132x^2 - 0,0091242781);$$

$$P_{10}(x) = (x^2 - 1)(x^8 - 1,5627140773x^6 + 0,7359121274x^4 - 0,1056195488x^2 + 0,0022107049).$$

Графики полиномов  $P_8(x)$ ,  $P_{10}(x)$  представлены на рис. 5 и 6.

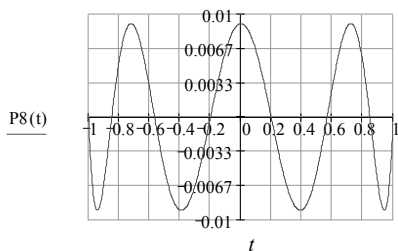


Рис. 5

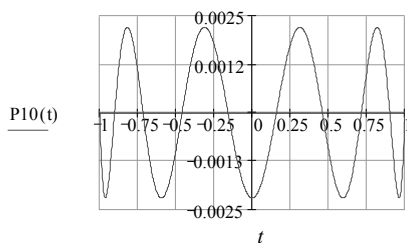


Рис. 6

В табл. 1 приведены абсциссы точек экстремума, корни, принадлежащие интервалу  $(-1, 1)$ , и норма в  $C[-1, 1]$  для построенных полиномов  $P_{2n+2m}(x) (n = 1, 2, 3, 4; m = 1)$ .

Таблица 1

Полином	Абсциссы точек экстремума	Корни полинома, принадлежащие $(-1, 1)$	Норма в $C[-1, 1]$
$P_4(x)$	$-\sqrt{2}-\sqrt{2}$ 0,0000000000 $\sqrt{2}-\sqrt{2}$	$1-\sqrt{2}$ $\sqrt{2}-1$	$(\sqrt{2}-1)^2$
$P_6(x)$	-0,8965754722 -0,5176380902 0,0000000000 0,5176380902 0,8965754722	-0,7320508076 -0,2679491923 0,2679491923 0,7320508076	0,0384757729
$P_8(x)$	-0,9419794124 -0,7209597940 -0,3901806083 0,0000000000 0,3901806083 0,7209597940 0,9419794124	-0,8477590650 -0,5664544974 -0,1989123674 0,1989123674 0,5664544974 0,8477590650	0,0091242781
$P_{10}(x)$	-0,9629115548 -0,8191014896 -0,5951120588 -0,3128689084 0,0000000000 0,3128689084 0,5951120588 0,8191014896 0,9629115548	-0,9021130328 -0,7159209562 -0,4596495484 -0,1583844401 0,1583844401 0,4596495484 0,7159209562 0,9021130328	0,0022107049

Приведем результаты приближения некоторых функций, удовлетворяющих однородным граничным условиям в точках  $x = \pm 1$ , интерполяционными полиномами, узлы интерполяции которых есть корнями построенных нами полиномов, наименее отклоняющихся от нуля. Для сравнения используем также приближение этих же функций интерполяционными полиномами Лагранжа, построенными на равномерной сетке узлов.

**Пример 3.** Интерполяция функции  $y(x) = \frac{2e \cdot \operatorname{ch} x}{1 + e^2} - 1$  на отрезке  $[-1, 1]$ . В табл. 2 приведены результаты вычисления погрешности приближения заданной функции интерполяционным полиномом  $\bar{L}_N y(x)$ , узлы которого – корни полиномов  $P_{2n+2m}(x) (n = \overline{1, 4}; m = 1)$  и который удовлетворяет однородным гранич-

ным условиям в точках  $x = \pm 1$ , а также интерполяционным полиномом Лагранжа  $L_N y(x)$ , построенным на равномерной сетке узлов.

Таблица 2

Количество узлов полинома интерполяции	$\max_{[-1,1]}  y(x) - \bar{L}_N y(x) $	$\max_{[-1,1]}  y(x) - L_N y(x) $
4	$4,9072350446 \cdot 10^{-3}$	$5,6369735873 \cdot 10^{-3}$
6	$3,6124471569 \cdot 10^{-5}$	$6,4731786526 \cdot 10^{-5}$
8	$1,5143068530 \cdot 10^{-7}$	$4,7031213300 \cdot 10^{-7}$
10	$4,0453826399 \cdot 10^{-10}$	$2,2998706134 \cdot 10^{-9}$

**Пример 4.** Интерполяция функции  $y(x) = \sin \pi x + \cosh x - \cosh 1$ ,  $y(-1) = y(1) = 0$ . В табл. 3 приведены результаты вычисления погрешности приближения заданной функции интерполяционными полиномами  $\bar{L}_N y(x)$  и  $L_N y(x)$ .

Таблица 3

Количество узлов полинома интерполяции	$\max_{[-1,1]}  y(x) - \bar{L}_N y(x) $	$\max_{[-1,1]}  y(x) - L_N y(x) $
4	0,2286725852	0,2639401248
6	0,0148322719	0,0268538989
8	$5,3976055322 \cdot 10^{-4}$	$1,6963767845 \cdot 10^{-3}$
10	$1,2469099963 \cdot 10^{-5}$	$7,2217151397 \cdot 10^{-5}$

**Заключение.** Приведенные примеры полиномов, построенных описанным методом, и примеры приближения функций интерполяционными полиномами с узлами интерполяции, которые есть корнями найденных полиномов, подтверждают, что выбор узлов интерполяции, которые есть нулями полиномов, удовлетворяющих заданному граничному условию и одновременно наименее отклоняющиеся от нуля на отрезке  $[-1, 1]$ , дает лучшее приближение в сравнении с тем, которое получено интерполяцией полиномами, и точно удовлетворяют граничным условиям и интерполируют  $y(x)$  на равномерной сетке узлов.

В дальнейшем авторы планируют исследовать возможность использования построенных полиномов для приближенного решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

1. *A posteriori* error analysis and adaptive processes in the finite element method: Part I – Error analysis / D.W. Kelly, J.P. Gago de S.R., O.C. Zienkiewicz et al. // Int. J. for numer. methods in Eng. – 1983. – **19**. – P. 1593–1619.
2. *Ibid*: Part II – Adaptive mesh refinement / D.W. Kelly, J.P. Gago de S.R., O.C. Zienkiewicz et al. // *Ibid*. – P. 1621–1656.
3. Лигун А.А., Сторчай В.Ф. О наилучшем выборе узлов при интерполировании функций эрмитовыми сплайнами // Analysis math. – 1976. – № 2, 3. – P. 267–275.
4. Ильге И.Г. Метод конечных элементов с оптимальной дискретизацией в расчетах элементов строительных и машиностроительных конструкций: Дис. ... канд. техн. наук: 05.02.07. – Харьков, 1995. – 151 с.
5. Rosenbrock H.H. An Automatic Method for Finding the Greatest or Least Value of a Function // The Computer j. – 1960. – **3**. – P. 175–184.
6. Чебышев П.Л. О функциях, наименее отклоняющихся от нуля // Собр. соч. – М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1948. – Т. 3. – С. 24–49.
7. Гаврилюк И.П., Макаров В.Л. Методы вычислений: В 2 т. – Киев: Вышш. шк., 1995. – Т. 1. – 367 с.
8. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. – М.: Мир, 1980. – 520 с.
9. Золотарев Е.И. Приложение эллиптических функций к вопросам о функциях, наименее уклоняющихся от нуля // Полн. собр. соч. – Т. 2. – М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1932. – С. 1–59.
10. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во МГУ, 1976. – 304 с.
11. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 512 с.

Поступила 07.02.2011

Тел. для справок: +38 057 771-0545, 263-5923, 252-4389,  
+38 050 065-9246 (Харків, Артемівськ)

E-mail: academ@kharkov.ua, ludmila\_lobanova@mail.ru,  
niv\_artem@mail.ru

© О.Н. Литвин, Л.С. Лобанова, И.В. Нефедова, 2013