

В.И. Гриценко, А.А. Родионов, Е.Ф. Перлов

Некоторые аспекты динамики переходных процессов поворотного рабочего элемента, действующего без упругих и вязкоупругих сил

Получены дифференциальные уравнения, описывающие динамику переходных процессов разгона и торможения поворотного рабочего элемента, работающего, как правило, с высокими линейными и угловыми скоростями и ускорениями и выполняющего при этом высокоточную координатную ориентацию. Проведено аналитическое исследование такого элемента по критерию максимального быстродействия. Возможен анализ и синтез подобных механизмов с целью получения заранее заданного закона движения поворотного рабочего механизма в режиме разгона–торможения.

The differential equations are obtained which describe the dynamics of transitional processes of acceleration and braking of turn working element generally operating with high linear and angular velocities and accelerations and executing at the same time highly precise coordinate orientation are created. The analytical investigation of such element by maximum fast-acting criterion was carried out. The result of such examination is that not only the analysis of similar mechanisms may be conducted, but also their synthesis with a purpose of obtaining the established law of motion for turn working element in a mode of acceleration and braking.

Отримано диференціальні рівняння, що описують динаміку перехідних процесів розгону та гальмування поворотного робочого елементу, який, як правило, працює з високими лінійними і кутовими швидкостями та прискореннями і при цьому виконує високоточну координатну орієнтацію. Проведено аналітичне дослідження такого елемента за критерієм максимальної швидкодії. Можливий аналіз і синтез подібних механізмів з метою отримання наперед заданого закону руху поворотного робочого елементу у режимі розгону–гальмування.

Введение. Изучение динамики переходных процессов различных рабочих элементов, особенно применительно к роботам, манипуляторам и другим исполнительным элементам, работающим, как правило, с высокими линейными и угловыми скоростями и ускорениями и выполняющими при этом высокоточную координатную ориентацию, представляется актуальным.

Изучение этих процессов может быть тем более полезным, что на выходе математических моделей поведения этих рабочих элементов получены передаточные коэффициенты, передаточные функции и ряд частотных характеристик (амплитудно-фазовая частотная, амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики), используемые обычно в системах автоматического регулирования (САР).

В совокупности это позволяет проводить не только анализ поведения поворотного рабочего элемента, но и добиваться выполнения заранее заданного закона его движения, т.е. выполнять синтез изделия.

Математическая модель переходных процессов

Рассмотрим уравнение движения поворотного рабочего элемента

$$I_{\Sigma} \varepsilon = M_{\Sigma}, \quad (1)$$

где ε – угловое ускорение поворота рабочего элемента c^{-2} ; I_{Σ} – суммарный, приведенный к источнику поворота (например, выходному валу электродвигателя), момент инерции, Нм c^2 ; M_{Σ} – полезный крутящий момент, действующий на элемент Нм (рис. 1).

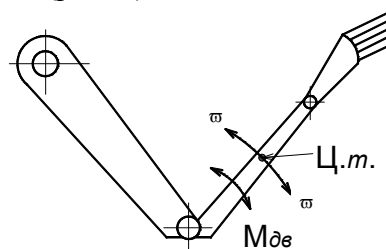


Рис. 1

Суммарный приведенный момент инерции можно представить в таком виде

$$I_{\Sigma} = I_{дв} + \sum (i_1^2 \cdot i_2^2 \cdot \dots \cdot i_j^2) I_j, \quad (2)$$

где j – число ступеней приводного редуктора; i – передаточные отношения j -й ступени редуктора; I_j – собственный суммарный момент инерции на j -м валу редуктора;

$$M_{\Sigma} = M_{дв} + M_{ст}, \quad (3)$$

$M_{дв}$ – крутящий момент, создаваемый двигателем, Нм; $M_{ст}$ – статический момент сопротивления, входящий в выражение (3) как алгебраическая величина со своим знаком: (–) – в режиме разгона, (+) – в режиме торможения.

$M_{дв}$ может быть найден с помощью характеристики двигателя постоянного тока, наиболее удобен в управлении. Эти двигатели имеют мягкие характеристики, достаточно близко аппроксимируемые уравнениями в отрезках (рис. 2):

$$\frac{M}{M_0} + \frac{\omega}{\omega_0} = 1.$$

Здесь M_0 – пусковой момент двигателя Нм; ω_0 – угловая скорость холостого хода, c^{-1} ; λ – жесткость характеристики двигателя, Нмс.

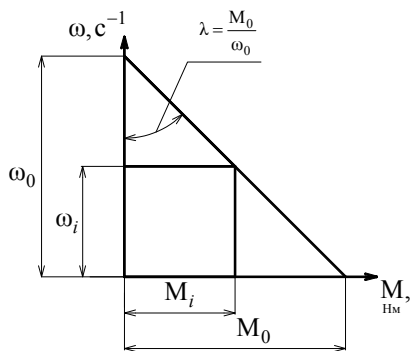


Рис. 2

$$\lambda = \frac{M_0}{\omega_0}, \quad (4)$$

тогда

$$M_{дв} = \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right) M_0. \quad (5)$$

Подставив (2), (3), (5) в (1), получим

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{\tau} \omega = \varepsilon, \quad (6)$$

где τ – постоянная времени рабочего элемента, с;

$$\tau = \frac{\omega_0 I_\Sigma}{M_0} \quad (7)$$

ε – угловое ускорение, c^{-2} , действующее на поворотный рабочий орган.

$$\varepsilon = \pm \frac{M_0 \mp M_{ст}}{I_\Sigma}. \quad (8)$$

Уравнение (6) с учетом (8) представляет собой линейное неоднородное дифференциаль-

ное уравнение первого порядка, разбиваемое фактически на два независимых уравнения: для разгона (верхние знаки в равенстве (8)); для торможения (нижние знаки в равенстве (8)).

Рассмотрим каждый из режимов – разгона и торможения.

Разгон. Уравнение изменения угловой скорости ω_p в режиме разгона:

$$\omega_p' + \frac{\omega}{\tau} = \omega_p = \frac{M_0 - M_{ст}}{I_\Sigma} = \varepsilon_1. \quad (9)$$

Уравнение имеет общий интегрирующий множитель $\mu = e^{\int r dt}$, где r – корень характеристического уравнения: $r = -\frac{1}{\tau}$. Общее решение

(9) находим в виде, представленном в [1]:

$$\omega_p = e^{-\int \frac{dt}{\tau}} \left[\int \varepsilon_1 e^{\int \frac{1}{\tau} dt} dt + C \right]. \quad (10)$$

После интегрирования получим

$$\omega_p = e^{-\frac{t}{\tau}} (\varepsilon_1 \tau e^{\frac{t}{\tau}} + C_1) = \varepsilon_1 \tau + C_1 e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (11)$$

C_1 найдем из начальных условий: при $t = 0$ и $\omega = 0$ $C_1 = -\varepsilon_1 \tau$. Тогда уравнение (11) окончательно примет вид

$$\omega_p = \varepsilon_1 \tau (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}). \quad (12)$$

Уравнение (12) представляет собой функцию, стремящуюся в пределе к $\omega_p = \omega_{pmax} = \varepsilon_1 \tau$, что непосредственно следует из (12) при $t \rightarrow \infty$.

Подставив в последнее равенство значения ε_1 и τ , из (6) и (9) соответственно получим

$$\varepsilon_1 \tau = \omega_{pmax} = \omega_0 (1 - \xi), \quad (13)$$

где $\xi = M_{ст} / M_0$ – коэффициент диссипативного воздействия.

Введем полученное выражение для $\varepsilon_1 \tau$ в уравнение (12) и получим окончательное решение общего вида для линейного неоднородного уравнения первого порядка, описывающего закон изменения угловой скорости в режиме разгона, в виде

$$\omega_p = \omega_0 (1 - \xi) (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}). \quad (14)$$

На рис. 3 показаны кривые $\omega_p = f(t)$

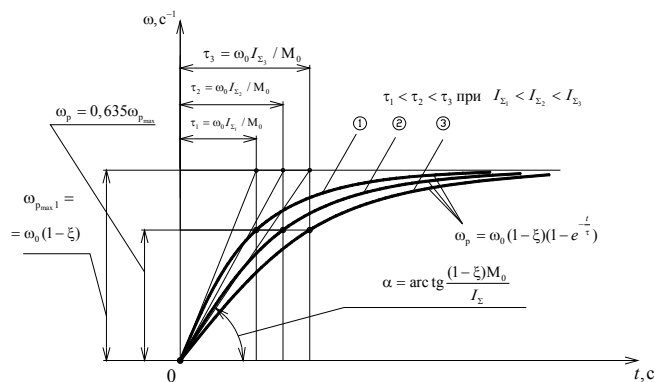


Рис. 3

На основании (14) кривые скоростей разгона можно построить по трем реперным точкам:

- при $t = 0$ $\omega_p = 0$;
- при $t = \tau$ $\omega_p = 0,635\omega_0(1 - \xi)$;
- при $t = \infty$ $\omega_p = \omega_0(1 - \xi)$.

На рис. 3 показано семейство экспоненциально возрастающих кривых, характеризующих нарастание угловых скоростей рабочего элемента в режиме разгона.

Угол подъема касательной к экспоненте в начале координат имеет вид

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega_{p\max}}{\tau} \quad (15)$$

или, подставив в (15) значения $\omega_{p\max}$ и τ из (13) и (7), получим:

$$\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{(1 - \xi)M_0}{I_\Sigma}. \quad (16)$$

Постоянная времени τ рабочего элемента характеризует скорость нарастания угловой скорости, а угол подъема α – касательной к экспоненте при $t = 0$ и $\omega_p = 0$ – угловое ускорение ε , т.е. постоянная времени характеризует динамику переходного процесса разгона: чем меньше τ , тем более динамична система и наоборот. Из выражения (7) следует:

- чем меньше момент инерции и больше полезный крутящий момент, тем меньше постоянная времени, выше динамичность системы и быстрее достигается максимум скорости;
- чем меньше устанавливаемое значение угловой скорости, т.е. предел, к которому стремится экспонента, тем быстрее будет достиг-

нут этот предел и, следовательно, будет выше динамичность системы.

Торможение рабочего элемента, в отличие от разгона, – более разнообразный режим: если разгон принципиально может выполняться только с помощью привода, то торможение может осуществляться как с участием привода, так и без него (свободный выбег).

Рассмотрим оба случая.

Торможение под действием диссипации (перехода трения в тепло – свободный выбег)

Уравнение движения получим из (1) и (3) при $M_{\text{дв}} = 0$:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{M_{\text{ср}}}{I_\Sigma} = -\varepsilon_2. \quad (17)$$

Воспользуемся методом разделения переменных: $d\omega = -\varepsilon_2 dt$; интегрируя, получаем

$$\omega + A = -\varepsilon_2 t. \quad (18)$$

Начальные условия: $t = 0$; $\omega_{T\max} = \omega_{p\max} = \omega_0(1 - \xi)$, тогда

$$A = -\omega_0(1 - \xi);$$

$$\omega_T - \omega_0(1 - \xi) = -\varepsilon_2 t;$$

$$\omega_T + \varepsilon_2 t = \omega_0(1 - \xi) = \omega_{p\max}. \quad (19)$$

Уравнение (19) представляет собой уравнение прямой, которое может быть приведено к классическому виду – уравнению прямой в отрезках (рис. 4):

$$\frac{\omega_T}{\omega_{p\max}} + \frac{t}{T} = 1, \quad (20)$$

где

$$T = \frac{\omega_0(1 - \xi)}{\varepsilon_2} = \frac{\omega_0(1 - \xi)I_\Sigma}{M_{\text{ср}}}. \quad (21)$$

Из рис. 4 видно, что торможение в режиме свободного выбега происходит по нисходящей наклонной прямой и под действием сил трения может полностью затухнуть при

$$t = T = \frac{\omega_0(1 - \xi)I_\Sigma}{M_{\text{ср}}}.$$

При этом не исключается возможность перехода рабочего элемента через отметку нулевой скорости и начала движения в обратном направлении – «откат» (рис. 4 – пунктирные линии).

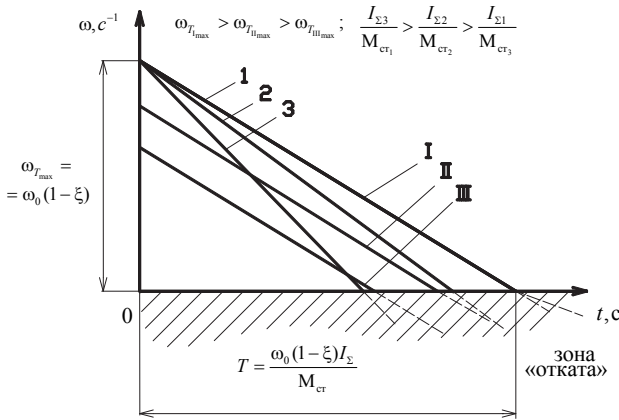


Рис. 4

Из выражений (18), (21) и рис. 4 видно, что:

- чем меньше момент инерции или больше статический момент трения, тем быстрее осуществляется торможение рабочего элемента (прямые 1, 2, 3);

- чем с меньшего значения угловой скорости начинается торможение, тем быстрее оно осуществляется (прямые I, II, III).

Торможение под действием торможения двигателем и диссипативных сил

Уравнение движения с учетом (6), (7), (8) выглядит так:

$$\omega' + \frac{1}{\tau} \omega = -\varepsilon_2, \quad (22)$$

где

$$\varepsilon_2 = -\frac{M_0 + M_{cr}}{I_\Sigma}. \quad (23)$$

Решение, как и для режима разгона, представляется в виде:

$$\omega_T = e^{-\frac{t}{\tau}} \left[-\varepsilon_2 \int e^{\frac{t}{\tau}} dt + C_2 \right] = \quad (24)$$

$$= e^{-\frac{t}{\tau}} (-\varepsilon_2 \tau e^{\frac{t}{\tau}} + C_2) = -\varepsilon_2 \tau + C_2 e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

С помощью (7) и (23) представим $\varepsilon_2 \tau$:

$$\varepsilon_2 \tau = \omega_0(1 + \xi). \quad (25)$$

Тогда (24) с учетом (25) примет вид

$$\omega_T = -\omega_0(1 + \xi) + C_2 e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (26)$$

При начальных условиях $t = 0$ $\omega_T = \omega_{pmax} = \omega_0(1 - \xi)$ неизвестное $C_2 = 2\omega_0$ и уравнение (26) окончательно примет вид

$$\omega_T = -\omega_0(1 + \xi) + 2\omega_0 e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (27)$$

Аппроксимированная характеристика двигателя в режиме торможения представлена на рис. 5, а кривые торможения рабочего элемента (затухающие экспоненты) – на рис. 6.

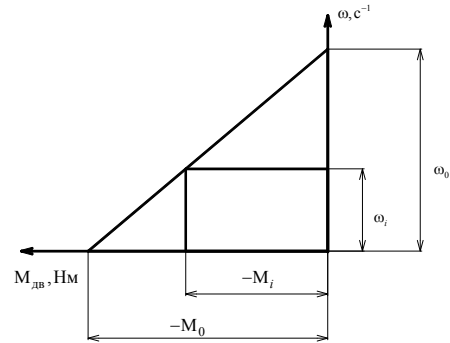


Рис. 5

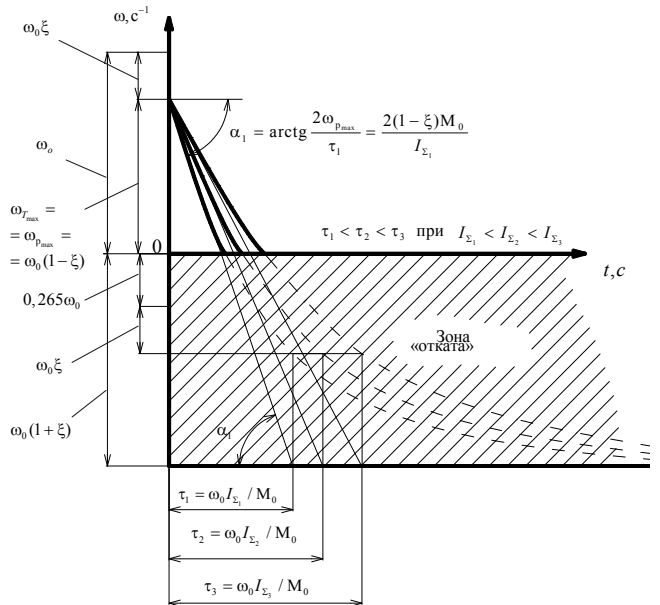


Рис. 6

На основании (27) кривые скорости торможения можно построить, как показано, по трем реперным точкам: при $t = 0$, $\omega_T = -\omega_0(1 + \xi) + 2\omega_0 = \omega_0(1 - \xi) = \omega_{pmax}$ задает значение наибольшей угловой скорости при разгоне, с которой начинается торможение; при $t = \tau$ $\omega_T = -\omega_0(1 + \xi) + \frac{2\omega_0}{e} = -\omega_0(0,265 + \xi)$; $t = \infty$ $\omega_T = -\omega_0(1 + \xi)$

Части кривых, расположенные ниже оси абсцисс, показаны пунктирными линиями.

Это означает, что рабочий элемент входит в эту зону «отката», т.е. может начать некоторое движение в обратную сторону, что крайне нежелательно.

Аналитическое исследование поворотного рабочего элемента по критерию максимального быстродействия

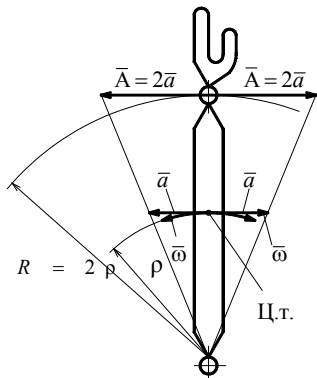


Рис. 7

Обратимся к (1): умножив обе его части на ρ , получим

$$\varepsilon\rho = \frac{M_\Sigma\rho}{I_\Sigma(\rho)}; \quad (28)$$

$$I_\Sigma = m\rho^2; \quad \varepsilon\rho = a, \quad (29)$$

где m – масса поворотного рабочего элемента, сосредоточенная в центре его тяжести, кг; \bar{a} – линейное ускорение, приложенное в центре тяжести поворотного элемента, находящегося под действием момента M_Σ , м с^{-2} ; ρ – радиус инерции, м.

Тогда (28) примет вид:

$$m\rho^2 a = M_\Sigma \rho = 0. \quad (30)$$

Для исследования поворотного рабочего элемента по критерию наибольшего линейного ускорения необходимо продифференцировать (30)

$\frac{\partial \rho}{\partial a}$ и $\frac{\partial a}{\partial a}$ и полученное выражение приравнять

к нулю: $m\rho^2 + 2a m \rho - M_\Sigma = 0$ или $\rho^2 + 2a\rho -$

$$-\frac{M_\Sigma}{m} = 0; \quad \rho_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 + \frac{M_\Sigma}{m}}.$$

Радиус инерции – положительное число, следовательно, из двух значений ρ требуемым будет

$$\rho = \sqrt{a^2 + \frac{M_\Sigma}{m}} - a = a \left(\sqrt{1 + \frac{L}{a^2}} - 1 \right), \quad (31)$$

где $\frac{M_\Sigma}{m} = L$.

Для построения кривой $\rho = f(a)$ примем условно $L = 1$, т.е. построим кривую $\hat{\rho} = f(\hat{a})$ в относительных единицах

при:	$a = 0$	$\rho = 0$
	$a = 1$	$\rho = 0,41$
	$a = 2$	$\rho = 0,23$
	$a = 3$	$\rho = 0,16$
	$a = 4$	$\rho = 0,12$
	$a = 5$	$\rho = 0,09$.

На рис. 8. кривая 1 соответствует уравнению (31).

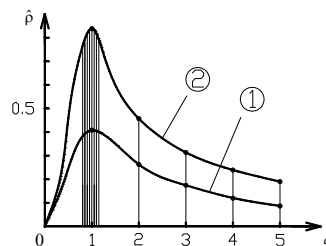


Рис. 8

Если представляет интерес линейное ускорение A на конце поворотного элемента, как видно из (29), линейное ускорение будет прямо пропорционально радиусу поворота (длине поворотного звена), и тогда (31) примет следующий вид:

$$R = 2a \left(\sqrt{1 + \frac{1}{a^2}} - 1 \right). \quad (32)$$

Кривая 2 соответствует уравнению (32) в относительных единицах. Заштрихованная зона – это зона значений радиусов инерции (длины звена), при которых достигается наибольшее ускорение (отклонение в быстродействии не превышает 10 процентов).

Поворотный рабочий элемент как звено системы автоматического регулирования

Из курса теории автоматического регулирования (ТАР) известно [2], что любая САР может быть представлена звеньями, причем сами эти системы могут быть:

- системами стабилизации регулируемого параметра и программируемого регулирования;

- системами, построенными по принципу измерения регулируемого параметра и измерения возмущаемого воздействия;

- системами прямого или косвенного действия;

- системами непрерывного и прерывистого действия (реальные, импульсные);

- системами с обратной связью и без таковой.

При обозначениях $\frac{d\omega}{dt} = p\omega$; $\frac{d^2\omega}{dt^2} = p^2\omega$; ...

... $\frac{d^n\omega}{dt^n} = p^n\omega$ полученное дифференциальное

уравнение (6) может быть представлено в сим-

волическом виде: $\int \omega dt = \frac{\omega}{p}$; $\int [\int \omega dt] dt = \frac{\omega}{p^2}$

и т.д. для уравнений более высоких порядков.

Уравнение (6), умноженное в обеих его частях на τ с учетом отключений Δ входного ε и выходного ω параметров, можно представить в виде

$$(\tau p + 1)\Delta\omega = \tau\Delta\varepsilon; \quad (33)$$

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta\varepsilon} = \frac{A_{\text{вых}}}{A_{\text{вх}}} = W(p), \quad (34)$$

где $A_{\text{вых}}$, $A_{\text{вх}}$ – соответственно амплитуды выходной и входной величин; $W(p)$ – передаточная функция по регулируемому воздействию.

Разделим обе части (33) на $\Delta\varepsilon$ и, с учетом (34), получим:

$$W(p) = \frac{\tau}{\tau p + 1}. \quad (35)$$

Полученная передаточная функция известна в ТАР как передаточная функция инерционного звена.

Заменив оператор p на $j\omega$, получим спектр частотных характеристик поворотного элемента как звена САР:

- амплитудно-фазовую частотную характеристику

$$W(j\omega) = \frac{\tau}{\tau j\omega + 1}; \quad (36)$$

- амплитудно-частотную характеристику

$$|W(j\omega)| = \frac{\tau}{\sqrt{(\tau\omega)^2 + 1}}; \quad (37)$$

- фазо-частотную характеристику $\text{arctg}|W(j\omega)| = \zeta = -\text{arctg}\omega\tau$. (38)

Рассмотрим каждую из этих характеристик.

Амплитудно-фазовую частотную характеристику представим в следующем виде:

$$W(j\omega) = \frac{\tau}{1 + j\omega\tau} = \tau \frac{1 - j\omega\tau}{1 + (\tau\omega)^2} = \tau[U + jV],$$

где $U = \frac{1}{1 + (\tau\omega)^2}$; $V = \frac{\tau\omega}{1 + (\tau\omega)^2}$.

Значения U и V удовлетворяют уравнению

$$\text{окружности } \left(U - \frac{1}{2}\right)^2 + V^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Амплитудно-фазовая частотная характеристика представлена на рис. 9.

При $\omega = 0$, $W(j\omega) = \tau$; $\omega = \infty$, $W(j\omega) = 0$, $\omega = 1/\tau$, $W(j\omega) = \tau/2$.

Амплитудно-частотную и фазо-частотную характеристики поворотного рабочего элемента как звена САР можно представить в логарифмическом масштабе.

Прологарифмировав выражение (37), получим

$$\lg|W(j\omega)| = \lg\tau - \lg\sqrt{(\tau\omega)^2 + 1}. \quad (39)$$

Величину затухания колебаний по аналогии с теорией усилителей удобно оценивать в децибелах.

Для этого выражение (39) умножим на 20 и получим

$$20\lg|W(j\omega)| = 20\lg\tau - 20\lg\sqrt{(\tau\omega)^2 + 1}. \quad (40)$$

Если $\tau = 1$, то $20\lg|W(j\omega)| = -20\lg\sqrt{(\tau\omega)^2 + 1}$.

Знак *минус* перед правой частью указывает на затухающий характер амплитуды колебания.

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика представлена на рис. 9 (кривая *a*). Эта характеристика может быть представлена асимптотической ломаной линией (кривая *b*):

при $\omega \ll 1/\tau$, $\sqrt{(\omega\tau)^2 + 1} \approx 1$ и

$$20\lg\sqrt{(\omega\tau)^2 + 1} = 0;$$

при $\omega = 1/\tau$, $\sqrt{(\omega\tau)^2 + 1} = \sqrt{2}$ и
 $20\lg\sqrt{(\omega\tau)^2 + 1} = 3$;
 при $\omega \gg 1/\tau$, $\sqrt{(\omega\tau)^2 + 1} \approx \omega\tau$ и
 $20\lg\sqrt{(\omega\tau)^2 + 1} = 20\lg\omega\tau$.

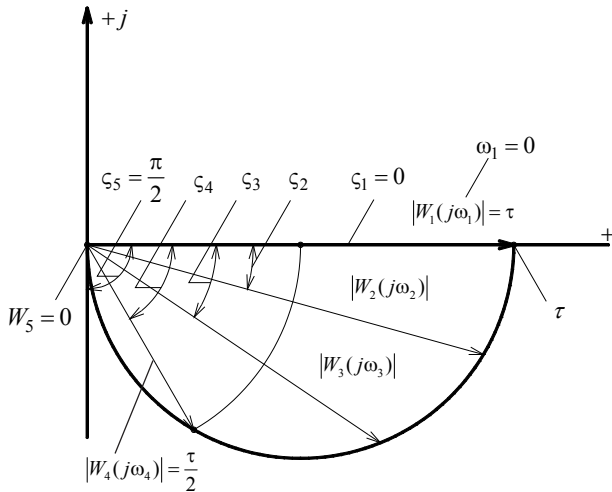


Рис. 9

При $\omega \ll 1/\tau$, амплитудно-частотная характеристика приблизительно совпадает с осью абсцисс; если $\omega \gg 1/\tau$, то характеристика почти совпадает с наклонной прямой. Определим наклон этой прямой: при увеличении частоты в два раза, т.е. на октаву, величина $20\lg\omega\tau$ станет равной $20\lg 2\omega\tau = 20\lg\omega\tau + 20\lg 2$, т.е. произошло увеличение амплитуды на $20\lg 2 = 6$ дБ. Если увеличить частоту в 10 раз, т.е. на декаду, амплитуда возрастет на 20 дБ. Для того, чтобы учесть слагаемое $20\lg\tau$ достаточно условно перенести ось абсцисс вниз на $20\lg\tau$. Наибольшее отклонение точной характеристики от приблизительной наблюдается при $\omega = 1/\tau$ и составляет 3 дБ.

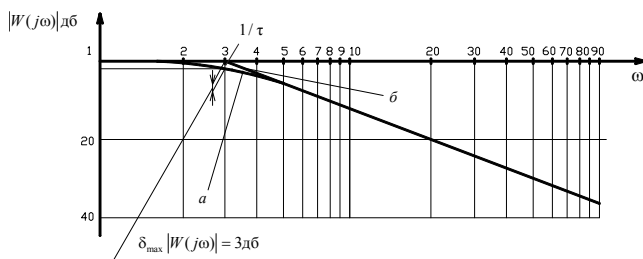


Рис. 10

Логарифмическая фазо-частотная характеристика представлена на рис. 11 при:

$$\omega \ll 1/\tau, \zeta = 0$$

$$\omega = 1/\tau, \zeta = -45^\circ$$

$$\omega \gg 1/\tau, \zeta \rightarrow \infty.$$

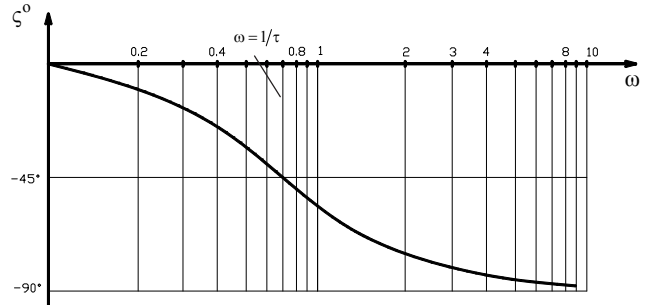


Рис. 11

Рассмотрев поворотный рабочий элемент как звено САР, можно найти его роль в составе самой САР.

1 – объект регулирования (поворотный рабочий элемент); 2 – чувствительный элемент; 3 – элемент сравнения; 4 – усилитель; 5, 6 – звенья исполнительного элемента (электродвигателя); 7 – звено обратной связи.

Для этого представим простейшую структурную схему САР (рис. 12).

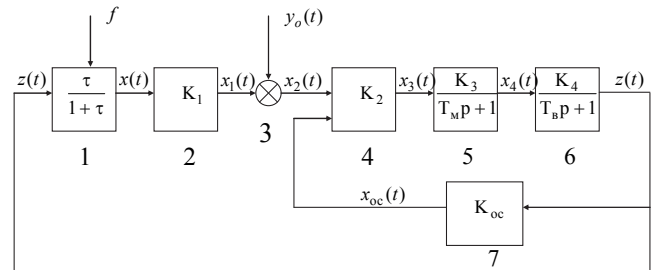


Рис. 12

Используя [2], можно записать передаточные функции каждого из звеньев в отклонениях:

– объект регулирования:

$$\Delta x = K_z \Delta z + K_f \Delta f = \frac{\tau}{1 + \tau p} \Delta z + K_f \Delta f; \quad (41)$$

– чувствительный элемент:

$$\Delta x_1 = K_1 \Delta x; \quad (42)$$

– элемент сравнения:

$$\Delta x_2 = (y_0 - x_1) - (y_0 - x_1^o) = -\Delta x; \quad (43)$$

– усилитель:

$$\Delta x_3 = K_2 (\Delta x_2 - \Delta x_{oc}); \quad (44)$$

– двигатель:

$$\Delta x_4 = \frac{K_2}{T_b p + 1} \Delta x_3; \quad (45)$$

$$\Delta x_5 = \Delta z = \frac{K_4}{T_m p + 1} \Delta x_4; \quad (46)$$

– обратная связь:

$$\Delta x_{oc} = K_{oc} \Delta z. \quad (47)$$

Проведем ряд преобразований и подстановок. Из (46) получим

$$\Delta x_4 = \frac{(T_m p + 1)}{K_4} \Delta z.$$

Подставим полученное выражение в (45):

$$\frac{(T_m p + 1)}{K_4} \Delta z = \frac{K_3}{T_b p + 1} \Delta x_3. \quad (48)$$

Последовательно подставляя (43), (42), (48) в (44), получим:

$$(T_m p + 1)(T_b p + 1) \Delta z = -K_2 K_3 K_4 (K_1 \Delta x + \Delta x_{oc}). \quad (49)$$

Подставив (47) в (49) и сгруппировав члены по входной Δz и выходной Δx величинам, получим:

$$\Delta z = -\frac{K_1 K_2 K_3 K_4}{(T_m p + 1)(T_b p + 1) + K_1 K_2 K_3 K_4 K_{oc}} \Delta x$$

или в упрощенном виде

$$\Delta z = -K_{per} \Delta x, \quad (50)$$

где

$$K_{per} = \frac{K_1 K_2 K_3 K_4}{(T_m p + 1)(T_b p + 1) + K_1 K_2 K_3 K_4 K_{oc}} \quad (51)$$

– передаточный коэффициент регулятора.

Подставим (50) в уравнение (41)

$$\Delta X = -K_z K_{per} \Delta X + K_f \Delta f$$

или окончательно

$$\Delta X = \frac{K_f}{1 + K_z K_{per}} \Delta f. \quad (52)$$

Произведение $K_z K_{per}$ – передаточный коэффициент цепи, составленной из объекта и регулятора при условии, что $\Delta f = 0$. Этот коэффициент есть передаточным коэффициентом разомкнутой цепи САР.

Если регулятор отсутствует или отключен ($K_{per} = 0$), то при изменении возмущающего воздействия на величину Δf регулируемый па-

раметр изменится на $\Delta X = K_f \Delta f$; величина ΔX есть отклонение регулируемого параметра нестабилизированной системы $\Delta X = \Delta X_{nc}$.

Если регулятор включен, то отклонение регулируемого параметра равно

$$\Delta X = \frac{\Delta X_{nc}}{1 + K_z K_{per}}, \quad (53)$$

т.е. ΔX стабилизированной системы значительно меньше в сравнении с нестабилизированной системой, так как K_z и K_{per} – величины больше нуля.

Введем в уравнение (52) полученный передаточный коэффициент $K_z = \frac{\tau}{1 + \tau p}$ по регули-

рующему воздействию в символическом виде и получим

$$\Delta X = \frac{K_f (T_m p + 1)(T_b p + 1)}{1 + \left(\frac{\tau}{1 + \tau p} \right) \frac{K_1 K_2 K_3 K_4 K_{oc}}{(T_m p + 1)(T_b p + 1) + K_1 K_2 K_3 K_4 K_{oc}}} \Delta f.$$

Учитывая, что $K_1 = f(p)$, $K_3 = f(p)$, $K_4 = f(p)$, их произведение даст p^3 , т.е. получим символичный аналог дифференциального уравнения третьего порядка, которое, в свою очередь, можно представить как произведение уравнения первого порядка и уравнения второго порядка. Как показано ранее, уравнение первого порядка дает экспоненциальный затухающий переходный процесс разгона – торможения. Что же касается уравнения второго порядка вида

$$(T_1 p^2 + T_2 p + 1) \Delta X_{вых} = K \Delta_{вх}, \quad (54)$$

где $T_1 = T_m T_b$, $T_2 = T_b + T_m$, то корни характеристического уравнения третьего порядка

$$Z_{1,2} = -\frac{T_2}{2T_1} \pm \sqrt{\left(\frac{T_2}{2T_1} \right)^2 - \frac{1}{T_1}},$$

где T_m, T_b – соответственно электромеханическая и электромагнитная постоянные времени двигателя, составляющие доли секунды, а это означает, что $T_1 \ll T_2$ и, следовательно, корни будут комплексными.

Решение дифференциального уравнения для переходных процессов объекта регулирования САР в этом случае имеет вид [3]:

$$\Delta X_{\text{вых}} = (\Delta X_{\text{вых}})_{\text{уст}} + C \sin(\Omega t + \Psi) e^{-\alpha t}, \quad (55)$$

где

$$\Omega = \sqrt{\frac{1}{T_1} - \left(\frac{T_2}{2T_1^2}\right)^2}; \quad (56)$$

$$\alpha = \frac{T_2}{2T_1}.$$

$(X_{\text{вых}})_{\text{уст}} = \omega_{\text{pmax}} \rho$ (см. рис. 3 и 7), откуда

$$(\Delta X_{\text{вых}})_{\text{уст}} = \Delta \omega \rho_{\text{max}} \rho.$$

Уравнение (55) примет такой вид:

$$X_{\text{вых}} = \omega_{\text{pmax}} \rho + C \sin(\Omega t + \Psi) e^{-\alpha t}. \quad (57)$$

Постоянную C определим из начальных условий: при $t = 0$ $X_{\text{вых}} = 0$ и тогда $C = -\frac{\omega_{\text{pmax}} \rho}{M}$,

где $M = \sin \Psi = \text{Const}$. Из выражения (56) следует, что при постоянных для данного двигателя T_1 и T_2 $\Omega = \text{Const}$. Следовательно, угол Ψ рассогласования между вводимым воздействием и реакцией на это воздействие – также величина постоянная:

$$\Psi = \text{Const} = M.$$

Окончательно уравнение (57) примет вид

$$X_{\text{вых}} = \omega_{\text{pmax}} \rho - \frac{\omega_{\text{pmax}} \rho}{M} \sin(\Omega t + \Psi) e^{-\alpha t}. \quad (58)$$

Функция переходного процесса представлена на рис. 13. Здесь экспоненты 1 изображены согласно (58) и выполняют роль асимптот для синусоиды 2 – $(\sin \Omega t)$; экспоненты 3 – результирующие от экспоненты 4, действующие при разгоне (см. рис. 3 и выражение (12)) и экспонент 1; 5 – результирующая синусоида.

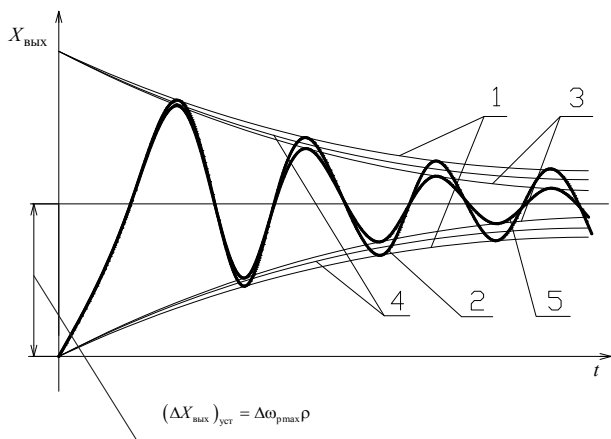


Рис. 13

Результаты

В результате аналитического рассмотрения поведения поворотного рабочего элемента, например, рабочего органа робота, действующего в отсутствие упругих и вязко-упругих звеньев, получено:

1. Аппроксимированную характеристику двигателя $\mu = f(\omega)$, позволившую получить неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка, решение которого дало возможность изучить закон движения рабочего элемента в переходных режимах разгона – торможения.

2. Закон движения разгона, выполняемого под действием внешних сил (например, от электродвигателя), осуществляется по восходящей экспоненте вида $\omega_p = \omega_0(1 - \xi)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$, при этом быстродействие будет тем выше, чем меньше постоянная времени τ рабочего элемента, а это достигается при условиях:

- снижения момента инерции элемента;
- снижения массы этого элемента;
- уменьшения статического момента трения;
- увеличения крутящего момента двигателя;
- снижения «потолка» скорости.

3. Закон движения при торможении, которое может осуществляться как без внешних сил (в отсутствие крутящего тормозного момента двигателя), так и с активным воздействием со стороны двигателя.

В первом случае торможение выполняется по закону «падающей» наклонной прямой

$$\frac{\omega_T}{\omega_{\text{pmax}}} + \frac{t}{T} = 1.$$

Во втором – торможение происходит по закону убывающей экспоненты

$$\omega_T = -\omega_0(1 + \xi) + 2\omega_0 e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

В обоих случаях торможение происходит тем быстрее, чем:

- больше статический момент трения;
- меньше момент инерции элемента;
- меньше масса элемента;
- больше тормозной крутящий момент двигателя;

– ниже «потолок» скорости, с которого нужно выполнить торможение.

В обоих случаях торможения возможен переход скорости через нулевую отметку, и тогда рабочий элемент может выполнять некоторое движение назад – откат, что нежелательно.

4. Проведен математический анализ поворотного рабочего элемента по критерию максимального быстродействия этого элемента. Получена кривая зависимости радиуса инерции от линейного ускорения, т.е. $\rho = f(a)$, имеющая явно выраженный экстремальный характер. С помощью указанной зависимости и графической его интерпретации можно определить, насколько близок (или удален) выбранный рабочий элемент от оптимальной рабочей зоны.

5. Поворотный рабочий элемент рассмотрен как автономное звено САР, показано, в частности, что это – инерционное звено; получен весь спектр частотных характеристик этого звена (амплитудно-фазовая частотная, амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики). Рассмотрена одна из возможных САР с участием поворотного рабочего элемента как звена этой САР. Показано, что вследствие наличия в САР двух инерционных звеньев электродвигателя постоянного тока переходный процесс рабочего элемента описывается дифференциальным уравнением третьего порядка, вследствие чего должны возникать затухающие гармонические колебания, которые не только необходимо учитывать, но и демпфировать.

6. Все полученные уравнения дают возможность не только оценить достигаемый по факту результат, но и активно моделировать наперед заданный результат. Для этого получены необходимые математические зависимости и весь арсенал параметров (средств): крутящий момент двигателя и, при необходимости, его замена; соответствующее конструирование рабочего элемента с целью обеспечения требуемой его прочности и жесткости при минимальной массе и моменте инерции; выбор оптимальной по критерию наибольшего быстродействия конструкции поворотного рабочего элемента; необходимость гашения затухающих гармонических колебаний, возникающих при разгоне–торможении поворотного рабочего элемента с помощью варьирования конструктивными параметрами самого элемента и его привода (масса, момент инерции, крутящий момент электродвигателя, жесткость его характеристики, силовые воздействия).

1. *Кронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Наука, 1984. – 831 с.
2. *Солодовников В.В., Плотников В.А., Яковлев А.В.* Основы теории и элементы системы автоматического регулирования. – М.: Машиностроение, 1985. – 536 с.
3. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1981. – 720 с.

Поступила 10.04.2012

Тел. для справок: +380 44 526-0688 (Киев)

© В.И. Гриценко, А.А. Родионов, Е.Ф. Перлов, 2012

Внимание !

**Оформление подписки для желающих
опубликовать статьи в нашем журнале обязательно.**

В розничную продажу журнал не поступает.

Подписной индекс 71008