УДК 519.14+519.168

Н.К. Тимофієва, В.І. Гриценко

Розв'язання задачі планування з теорії розкладів методом структурно-алфавітного пошуку та гібридним алгоритмом

Показано, что задача планирования из теории расписаний разделяется на две подзадачи, а целевая функция зависит от двух переменных, которыми являются комбинаторные конфигурации разных типов. Поиск результата проводится на двух комбинаторных множествах. Подзадачи решаются методом структурно-алфавитного поиска, а основная задача – гибридным алгоритмом, в котором встроенные процедуры, реализованные на основе этого метода, работают в итерационном режиме.

It is shown that a planning problem from the theory of time-table is divided into two subclasses, and an objective function depends on two variables which are combinatorial configurations of different types. The search of the result is found on two combinatorial sets. An optimal decision for these subclasses is a structure-alphabetical search method, and a basic problem gets untied by a hybrid algorithm, in which built-in procedures which are realized on the basis of the suggested method work in the iteration mode.

Показано, що задача планування з теорії розкладів розділяється на дві підзадачі, а цільова функція залежить від двох змінних, якими є комбінаторні конфігурації різних типів. Пошук результату проводиться на двох комбінаторних множинах. Підзадачі розв'язуються методом структурно-алфавітного пошуку, а основна задача – гібридним алгоритмом, у якому вбудовані процедури, реалізовані на основі запропонованого методу, працюють в ітераційному режимі.

Вступ. Задачі з теорії розкладів досить різноманітні і потребують упорядкування в часі фіксованої системи ресурсів для виконання певної сукупності робіт [1–6]. Для їхнього розв'язання використовуються різні підходи і алгоритми, наприклад метод попарних перестановок, упорядкування за мінімумом, жадібний алгоритм [1, 2], генетичні алгоритми [7–10], динамічне програмування [1, 3, 11]. Знаходження оптимального розв'язання в деяких з них проводять на множині перестановок, тому в літературі їх розглядають як задачі упорядкування [1, 2]. Тобто задачі цього класу зводяться до задач комбінаторної оптимізації, в яких аргументом цільової функції є комбінаторні конфігурації. В [12] розглядається задача планування з теорії розкладів конвеєрного типу як задача комбінаторної оптимізації, де оговорено, що аргументом цільової функції в ній є розміщення без повторень. Ця комбінаторна конфігурація утворюється вибиранням елементів із базової множини з наступним їх упорядкуванням. Її можна розглядати як комбінацію сполучення без повторень і перестановок, а цільова функція залежить від двох змінних і результат необхідно знайти на двох множинах комбінаторних конфігурацій. Установлення комбінаторної природи задачі певного класу проводиться побудовою її математичної моделі в межах теорії комбінаторної оптимізації. Для розв'язання задач комбінаторної оптимізації методом структурно-алфавітного пошуку необхідно вхідні дані в них змоделювати двома скінченними послідовностями (функціями натурального аргументу). Далі зведемо задачу планування з теорії розкладів до задачі комбінаторної оптимізації і знайдемо її розв'язання цим методом.

Загальна постановка задачі комбінаторної оптимізації [13]

Задачі цього класу, як правило, задаються однією або кількома множинами, наприклад A і B, елементи яких мають будь-яку природу. Назвемо ці множини базовими. Існує два типи задач. В першому типі кожну з цих множин можна подати у вигляді графа, вершинами якого є її елементи, а кожному ребру поставлено у відповідність число $c_{sl} \in R$, яке називають ва-

***Ключові слова**: теорія розкладів, гібридні алгоритми, комбінаторна оптимізація, цільова функція, метод структурно-алфавітного пошуку, розміщення без повторень, перестановка.

гою ребра (R – множина дійсних чисел). Для зручності вважатимемо, що між елементами цих множин існують зв'язки, числове значення яких назвемо вагами. Величини c_{sl} назвемо вхідними даними і задамо їх матрицями. У другому типі задач між елементами заданої множини зв'язків не існує, а вагами виступають числа $v_j \in R$, яким у відповідність поставлено деякі властивості цих елементів, числові значення яких задаються скінченними послідовностями, які також є вхідними даними. Ці величини визначають значення цільової функції.

Для обох типів задач із елементів однієї із заданих множин, наприклад $a_l \in A$, $l \in \{1,...,n\}$, утворюється комбінаторна множина W – сукупність комбінаторних конфігурацій певного типу (перестановки, вибірки різних типів, розбиття тощо). На елементах w комбінаторної множини W вводиться цільова функція $F(w)$. Необхідно знайти елемент w^* множини W, для якого цільова функція $F(w)$ набуває екстремального значення при виконанні заданих обмежень, тобто $F(w^*) = glob \operatorname*{extr}_{w \in W^0 \subset W} F(w)$, де $\mathrm{extr} = \{\min, \max\}$, W^0 – підмножина, яка визначається обмеженнями задачі.

Задача планування з теорії розкладів відноситься до першого типу.

Аргумент цільової функції в задачі планування з теорії розкладів

Аргументом цільової функції в задачах комбінаторної оптимізації є комбінаторні конфігурації (перестановки, сполучення, розбиття множини на підмножини тощо).

Комбінаторною конфігурацією назвемо будь-яку сукупність елементів, яка утворюється з усіх або з деяких елементів заданої множини $A = \{a_1, ..., a_n\}$ [13]. Позначимо її упорядкованою множиною $w^k = (w_1^k, ..., w_{\eta^k}^k)$. Множину $A = \{a_1, ..., a_n\}$ назвемо базовою. Під символом $w_l^k \in A$ розуміємо як окремі елементи, так і підмножини (блоки), $\eta^k \in \{1,...,n\}$ – кількість елементів у w^k, $W = \{w^k\}_1^q$ – множина комбінаторних конфігурацій. Залежно від умови задачі η позначатимемо без індексу або з верхнім індексом η^k. Верхній індекс k ($k \in \{1,...,q\}$) у w^k означає порядковий номер w^k у W, q – кількість w^k у W.

Рекурентним комбінаторним оператором назвемо сукупність правил, за допомогою яких з елементів базової множини A утворюється комбінаторна конфігурація w^k. Різноманітні типи комбінаторних конфігурацій утворюються за допомогою трьох рекурентних комбінаторних операторів: вибирання, транспозиція, арифметичний. Комбінаторні конфігурації, одна з яких утворена з $A = \{a_1, ..., a_n\}$ вибиранням, можуть утворюватися одна з однієї певною операцією.

Дві нетотожні комбінаторні конфігурації w^k і w^i назвемо ізоморфними, якщо $\eta^k = \eta^i$.

Підмножину $W_\eta \subset W$ назвемо підмножиною ізоморфних комбінаторних конфігурацій, якщо її елементи – ізоморфні комбінаторні конфігурації.

Рекурентні комбінаторні оператори вибирання і арифметичний породжують як ізоморфні, так і неізоморфні комбінаторні конфігурації $w^k \in W$.

Оскільки в задачі планування з теорії розкладів аргументом цільової функції може бути розміщення без повторень, розглянемо таку комбінаторну конфігурацію як вибірки. З поняттям вибірки пов'язують як саму операцію виділення підмножин заданої множини, так і її результат: вибрану підмножину. В подальшому маємо на увазі друге поняття.

Нехай задано базову множину $A = \{a_1, ..., a_n\}$. З неї одержимо η-вибірку. Число η називають об'ємом вибірки. В η-вибірках в залежності від умови задачі або ураховується порядок розташування в них елементів (тоді їх називають η-перестановками або η-розміщеннями), або не ураховують. У цьому випадку вони називаються η-сполученнями [14].

Отже існують такі типи вибірок: упорядковані і неупорядковані. Неупорядковані це –

сполучення без повторень і сполучення з повтореннями. Упорядковані це – розміщення з повтореннями і розміщення без повторень. Множина будь-якого типу вибірок складається з підмножин ізоморфних вибірок.

Теорема 1 [13]**.** Для певного впорядкування вибірок закономірність зміни значень цільової функції на підмножині ізоморфних вибірок таке, як і на множині перестановок.

Математична постановка задачі планування з теорії розкладів як задача комбінаторної оптимізації

Одна із задач цього класу формулюється так [12]. Задано n деталей. Їхню множину позначимо $A=\{a_1,...,a_n\}$. Кожна із деталей a_l має пройти послідовну обробку на $\tilde{n}$ машинах $B=\{b_1,...,b_{\tilde{n}}\}$. Необхідно скласти такий розклад обробки деталей, щоб використаний на ці операції час був би мінімальний за умови, що він не перевищує заданої величини T. В цій задачі кожна деталь потребує для свого обробітку одну операцію. Кожна машина також виконує одну операцію. Це – найпростіша задача з теорії розкладів, яка належить до конвеєрного типу (в подальшому задача КТ).

У цій задачі задано дві множини A і B, між елементами яких існує певна залежність, числові значення якої назвемо вагами. Подамо їх несиметричною матрицею C розмірністю $\tilde{n}\times n$, де величина c_{sl} відповідає значенню часу, який необхідно витратити на обробку l-ї деталі s-ю машиною. Час послідовної обробки всіх n елементів множини A за будь-якого розкладів, який би не перевищував заданої величини T, невідомий, тому спочатку для вибірки із n елементів $a_l\in A$ по n знаходимо перестановку, для якої значення цільової функції – мінімальне і не перевищує величини T. Якщо одержаний розв'язок не задовольняє цю умову, то задача розв'язується для вибірки із n елементів $a_l\in A$ по η. З цього випливає, що аргументом цільової функції в розглянутій задачі є розміщення без повторень, яке утворюється шляхом знаходження сполучення із n елементів по η, для якого генеруються $\eta!$ перестановок, $\eta\in\{1,...,n\}$.

Для i-го сполучення введемо комбінаторну матрицю $Q(\mu^i)$ розмірністю $\tilde{n}\times\eta$, в яку входять стовпці матриці C, номера яких збігаються з номерами елементів множини A, з яких утворено сполучення без повторень $\mu^i\in\mathrm{M}$, $i\in\{1,...,2^n-1\}$, M – множина сполучень. Із фіксованої матриці $Q(\mu^{i*})$ утворимо $\eta!$ комбінаторних матриць $Q'(\mu^{i*},\omega^k)$, залежних від перестановки $\omega^k=(\omega_1^k,...,\omega_\eta^k)\in\Omega$, $k\in\{1,...,\eta!\}$, $\eta\in\{1,...,n\}$, Ω – множина перестановок. Цільова функція в задачі планування з теорії розкладів набуде вигляду

$$F_1(\mu^{i*},\omega^k)=\sum_{l=1}^{\eta}\sum_{s=1}^{\tilde{n}}g_{sl}(\mu^{i*}),\qquad(1)$$

$$F_2(\mu^{i*},\omega^k)=$$
$$=\sum_{l=1}^{\eta-1}\sum_{s=2}^{\tilde{n}}\left|g'_{sl}(\mu^{i*},\omega^k)-g'_{s-1\,l+1}(\mu^{i*},\omega^k)\right|,\qquad(2)$$

$$F(\mu^{i*},\omega^k)=F_1(\mu^{i*},\omega^k)+F_2(\mu^{i*},\omega^k),\qquad(3)$$

де $\sum_{l=1}^{\eta}\sum_{s=1}^{\tilde{n}}g_{sl}(\mu^{i*})$ – постійна для будь-якої із $\eta!$ перестановок величина, що визначає витрачений час на обробку деталей, заданий умовою. Вона не залежить від перестановки, а змінюється в залежності від варіанту сполучення μ^i;

$\sum_{l=1}^{\eta-1}\sum_{s=2}^{\tilde{n}}\left|g'_{sl}(\mu^{i*},\omega^k)-g'_{s-1\,l+1}(\mu^{i*},\omega^k)\right|$ – сумарний час простою машин. Ця величина – змінна і залежить як від варіанту сполучення μ^i, так і від перестановки $\omega^k=(\omega_1^k,...,\omega_\eta^k)$. За виразом (3) визначається сумарне значення цільової функції.

Для вибраної пари елементів $a_l,a_\xi\in A$ часткове значення цільової функції обчислюється так:

$$\tilde{F}_h(\mu^{i*},\omega^k)=\tilde{F}_{h-1}(\mu^{i*},\omega^k)+$$
$$+\sum_{s=1}^{\tilde{n}}g_{s\xi}(\mu^{i*})+\sum_{s=1}^{\tilde{n}}g_{sl}(\mu^{i*})+$$

$$+\sum_{s=2}^{\tilde{n}} \left| g'_{s\,l}(\mu^{i*},\omega^k) - g'_{s-1\,\xi}(\mu^{i*},\omega^k) \right|, \qquad (4)$$

де $\xi, l \in \{1,...,n\}$ і $l < \xi$; $h \in \{2,...,q'\}$, q' – кількість часткових цільових функцій; $\sum_{s=1}^{\tilde{n}} g_{s\xi}(\mu^{i*})$, $\sum_{s=1}^{\tilde{n}} g_{sl}(\mu^{i*})$ – постійні величини, що визначають витрачений на обробку l-ї і ξ-ї деталей час, заданий умовою, $\sum_{s=2}^{\tilde{n}} \left| g'_{s\,l}(\mu^{i*},\omega^k) - g'_{s-1\,\xi}(\mu^{i*},\omega^k) \right|$ – значення часу простою машин для двох деталей.

Задачі комбінаторної оптимізації, в яких цільова функція залежить від кількох змінних, за цією ознакою розділяються на незалежні підзадачі, які можуть належати до різних класів. Її розв'язання визначається на множинах комбінаторних конфігурацій різних типів. Тобто, задача КТ полягає у знаходженні таких μ^{i*} і ω^{k*}, для яких значення $F(\mu^{i*}, \omega^{k*})$ було б мінімальним і $F(\mu^{i*},\omega^{k*}) \le T$.

Розв'язання задачі КТ методом структурно-алфавітного пошуку

Знаходження оптимального розв'язання в задачах комбінаторної оптимізації методом структурно-алфавітного пошуку проводиться за функціями натурального аргументу, упорядкованими за зростанням або спаданням їхніх значень [13, 15]. За розробленими правилами відшукується послідовність локальних екстремумів $F = (F(w^1),...,F(w^{k*}),...,F(w^{q^*}))$ таких, що $F(w^{k*}) = \operatorname{glob} \operatorname{extr}_{w^k \in W} F(w^k)$, де $\operatorname{extr} = \{\min, \max\}$, $w^{q^*}, w^{k*} \in W$, $k, k^*, q^* \in \{1,...,n!\}$, q^* – кількість локальних екстремумів.

Метод структурно-алфавітного пошуку ефективний для задач, аргументом цільової функції в яких є перестановка, а також на підмножині ізоморфних комбінаторних конфігурацій, оскільки цільова функція, згідно з теоремою 1, на цих підмножинах змінюється так, як і на множині перестановок. В задачі КТ цим методом знаходимо розв'язок на підмножині ізоморфних розміщень, які утворюються шляхом пошуку сполучення із n елементів по η, для якого генеруються $\eta!$ перестановок. Оптимальне розв'язання для цієї задачі визначається на двох комбінаторних множинах: на множині сполучень відшукується за однією обчислювальною схемою, а на множині перестановок – за іншою.

Для пошуку оптимального розв'язання на множині сполучень, яке задовольняє задане обмеження, обчислимо сумарне значення часу обробки l-ї деталі на $\tilde{n}$ машинах. Послідовність знайдених величин подамо функцією натурального аргументу $\varphi(j)|_1^n = (\varphi(1),...,\varphi(n))$, де $\varphi(j) = \sum_{s=1}^{\tilde{n}} g_{sl}(\mu^i)$, $l \in \{1,...,n\}$. Уведемо комбінаторну функцію $\beta(f(j),\mu^i)|_1^n = (\beta_j(f(1),\mu^i),...$ $...,\ \beta_j(f(n),\mu^i))$, де $\beta_j(f(j),\mu^i) = 1$, якщо із базової множини A вибирається елемент a_j, і $\beta_j(f(j),\mu^i) = 0$ в іншому випадку. Вважатимемо, що задача КТ, задана функціями $\varphi(j)|_1^n$ і $\beta_j(f(j),\mu^i)|_1^n$ – базова. Для неї запишемо цільову функцію $F(\mu^i) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j(f(j),\mu^i)\varphi(j).$

Задачу, вхідні дані в якій задано функціями

$$\overleftarrow{\beta}(f(j),\mu^*)|_1^n \quad (\text{або} \quad \vec{\beta}(f(j),\mu^{**})|_1^n\ ),$$

де $\overleftarrow{\beta}_j(f(j),\mu^*) \ge \overleftarrow{\beta}_j(f(j+1),\mu^*)$ (або $\vec{\beta}_j(f(j),\mu^{**}) \le \vec{\beta}_j(f(j+1),\mu^{**})$), та $\vec{\varphi}(j)|_1^n$ (або $\overleftarrow{\varphi}(j)|_1^n$), де $\vec{\varphi}(j) \le \vec{\varphi}(j+1)$ (або $\overleftarrow{\varphi}(j) \ge$ $\ge \overleftarrow{\varphi}(j+1)$), утворених із $\beta(f(j),w^k)|_1^n$ і $\varphi(j)|_1^n$, назвемо упорядкованою. Тоді для підмножини ізоморфних сполучень M_η глобальні максимум і мінімум обчислюються за такими виразами: $\max_{\mu^{**} \in M_\eta} F(\mu^{**}) = \sum_{j=1}^{n} \vec{\beta}_j(f(j),\mu^{**})\vec{\varphi}(j)$ і $\min_{\mu^* \in M_\eta} F(\mu^*) = \sum_{j=1}^{n} \overleftarrow{\beta}_j(f(j),\mu^*)\vec{\varphi}(j)$. Значення цільової функції для довільного $\mu^i \in M_\eta$ на підмножині ізоморфних сполучень без повторень знаходиться в межах: $\max\limits_{\mu^{**}\in \mathrm{M}_\eta} F(\mu^{**}) \geq$ $\geq F(\mu^i) \geq \min\limits_{\mu^{*}\in \mathrm{M}_\eta} F(\mu^{*})$. В процесі розв'язання задачі знаходимо підмножину M_η, яка містить сполучення μ^{i*}, для якого $\min\limits_{\mu^{i*}\in \mathrm{M}_\eta} F(\mu^{*}) \leq F(\mu^{i*}) \leq T$.

Розглянемо знаходження оптимального розв'язання в задачі планування з теорії розкладів методом структурно-алфавітного пошуку на підмножині $\eta!$ перестановок при фіксованому μ^{i*}. На підмножині перестановок цільова функція (1) для будь-якої перестановки – постійна, змінюється лише функція (2). Матриця $Q^{'}(\mu^{i*},\omega^1)$ розмірністю $\eta\times\widetilde{n}$ містить стовпці матриці C, сумарне значення елементів яких для μ^* є мінімальним. Для знаходження підмножини, що містить розв'язок, який задовольняє задане обмеження, вхідні дані змоделюємо функціями натурального аргументу. Елементи матриці $Q^{'}(\mu^{i*},\omega^1)$ задамо комбінаторною функцією $\widetilde{\beta}(\,f(j),\mu^{i*},\omega^k)|_1^m$, залежною від перестановки ω^k при фіксованому μ^{i*}, $m=\eta\cdot\widetilde{n}$. Розміщення елементів матриці в ній таке: спочатку – елементи першого стовпця, потім другого і т.д.

Для множини перестановок уведемо системи комбінаторних функцій H і $H^{'}$, де $\widetilde{\beta}(\,f(j),\mu^*,\omega^k)|_1^m\in H$ – комбінаторна функція, аргументом якої є перестановка $\omega^k\in\Omega$, утворена з елементів базової множини $A_\eta=\{a_1,...,a_\eta\}$; $\beta^*(\,f(j),\mu^*,\omega^{'t})|_1^m\in H^{'}$ – комбінаторна функція, аргументом якої є перестановка $\omega^{'i}\in\Omega^{'}$, утворена з елементів базової множини $A_m=\{a_1,...,a_m\}$. Якщо $\widetilde{\beta}(\,f(j),\mu^*,\omega^1)|_1^m=\beta^*(\,f(j),\mu^*,\omega^{'1})|_1^m$, де $\omega^1,\omega^{'1}$ – початкові перестановки в Ω, $\Omega^{'}$ і $\widetilde{\beta}(\,f(j),\mu^*,\omega^1)|_1^m\in H$, $\beta^*(\,f(j),\mu^*,\omega^{'1})|_1^m\in H^{'}$, то $H\subset H^{'}$.

Оскільки на підмножині перестановок змінне значення цільової функції обчислюється за виразом (2), то визначення глобального мінімуму (максимуму) простою машин проводиться за однією упорядкованою скінченною послідовністю. Визначимо, для яких комбінаторних функцій цільова функція в задачі планування з теорії розкладів набуває глобальних мінімуму і максимуму.

Задачу планування з теорії розкладів на підмножині $\eta!$ перестановок при фіксованому μ^{i*}, вхідні дані в якій задано комбінаторною функцією $\widetilde{\beta}(\,f(j),\mu^*,\omega^k)|_1^m\in H$, назвемо базовою (або задачею системи H). Задачу, вхідні дані в якій задано комбінаторною функцією $\vec{\beta}^*(f(j),\mu^*,\omega^{'*})|_1^m\in H^{'}$ (або $\overleftarrow{\beta}^*(f(j),\mu^*,\omega^{'**})|_1^m\in$ $\in H^{'}$) де $\vec{\beta}_j^*(f(j),\mu^*,\omega^{'*})\leq\vec{\beta}_j^*(f(j+1),\mu^*,\omega^{'*})$ (або $\overleftarrow{\beta}_j^*(f(j),\mu^*,\omega^{'**})\geq\overleftarrow{\beta}_j^*(\,f(j+1),\mu^*,\omega^{'**})$), назвемо впорядкованою (або задачею системи $H^{'}$).

Розмістимо значення упорядкованої комбінаторної функції $\vec{\beta}^*(\,f(j),\mu^*,\omega^{'*})|_1^m\in H^{'}$ (або $\overleftarrow{\beta}^*(\,f(j),\mu^*,\omega^{'**})|_1^m\in H^{'}$) послідовно в матриці $\widetilde{C}=\|\widetilde{c}_{sl}\|_{\widetilde{n}\times\eta}$ на наддіагоналях, піддіагоналях побічної діагоналі і на самій побічній діагоналі, починаючи з побічної та її суміжних таким чином: $c_{n1}, c_{n-12}, \ldots, c_{1n}, c_{n-11}, c_{n-22}, \ldots, c_{1n-1}, \ldots, c_{n2}, c_{n-13}, \ldots, c_{mn}$. Поряд розміщуються ті значення комбінаторної функції, між якими різниця – найменша. Якщо $\widetilde{n}\neq n$, то наступні значення $\vec{\beta}_j^*(\,f(j),\mu^*,\omega^{'*})$ розміщуються на піддіагоналях c_{n+11}, c_{n2} і т.д.

Виділимо в системі $H^{'}$ комбінаторну функцію $\beta^*(\,f(j),\mu^*,\omega^{'***})|_1^m\in H^{'}$, у першій позиції якої знаходиться найменше значення, а в другій – найбільше, у третій – найменше із тих, що залишилися, а в четвертій – найбільше з тих, що залишилися, і т. д. Аналогічно матриці $\widetilde{C}$ розмістимо значення $\beta_j^*(\,f(j),\mu^*,\omega^{'***})$ на наддіагоналях, піддіагоналях побічної діагоналі і на самій побічній діагоналі в матриці $C^*=\|c_{sl}^*\|_{\widetilde{n}\times\eta}$.

Сформулюємо таку теорему.

Теорема 2. Якщо упорядкована задача задана комбінаторною функцією $\vec{\beta}^*(f(j), \mu^*, \omega^{'*})|_1^m \in H^'$ (або $\overleftarrow{\beta}^*(f(j), \mu^*, \omega^{'**})|_1^m \in H^'$), значення яких подано матрицею $\widetilde{C} = \|\widetilde{c}_{sl}\|_{\widetilde{n}\times\eta}$, то час простою машин для задачі планування з теорії розкладів конвеєрного типу для перестановки $\omega^{'*} \in \Omega^'$ (або $\omega^{'**} \in \Omega^'$), який обчислюється за виразом (2), є глобальний мінімум.

Якщо упорядкована задача задана комбінаторною функцією $\beta^*(f(j), \mu^*, \omega^{'***})|_1^m \in H^'$, значення якої подано матрицею $C^* = \|c_{sl}^*\|_{\widetilde{n}\times\eta}$, то час простою машин для задачі планування з теорії розкладів конвеєрного типу для перестановки $\omega^{'***} \in \Omega^'$, який обчислюється за виразом (2), є глобальний максимум.

Доведення очевидне.

Отже, матриця $\widetilde{C} = \|\widetilde{c}_{ls}\|_{m\times n}$ є глобальний мінімальний розв'язок для упорядкованої задачі КТ (для системи $H^'$). Перестановку ω^{k*}, для якої цільова функція (2) набуває оптимального значення для базової задачі (система H), знаходимо за упорядкованою комбінаторною функцією $\vec{\beta}^*(f(j), \mu^*, \omega^{'*})|_1^m \in H^'$ (або $\overleftarrow{\beta}^*(f(j), \mu^*, \omega^{'**})|_1^m \in H^'$) з використанням правил, описаних у [15]. За знайденою із $\vec{\beta}^*(f(j), \mu^*, \omega^{'*})|_1^m \in H^'$ комбінаторною функцією $\widetilde{\beta}(f(j), \mu^*, \omega^k)|_1^m$ знаходимо перестановку ω^k. Для неї побудуємо матрицю $Q^'(\mu^{i*}, \omega^k)$, за якою за виразом (2) обчислюється сумарний простій машин. Знаходження локальних розв'язків проводиться доти, поки значення цільової функції (2) не буде збільшуватися. Оптимальне розв'язання – перестановка ω^{k*}, для якої цільова функція із знайдених набуває найменшого значення.

Наведемо приклад задачі КТ та її розв'язання методом структурно-алфавітного пошуку. Задано $n = 3$, $\widetilde{n} = 3$, $T = 50$. Вхідні дані в базовій задачі задамо комбінаторною функцією $\tilde{\beta}(f(j), \mu^*, \omega^k)|_1^m = (2, 3, 1, 4, 5, 3, 6, 8, 4)$, де перші три значення – елементи першого стовпця матриці, наступні три – елементи другого стовпця, останні три – елементи третього стовпця матриці. З базової задачі утворимо упорядковану, виділивши з системи $H^'$ упорядковану комбінаторну функцію $\vec{\beta}^*(f(j), \mu^*, \omega^{'*})|_1^m = (1, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 6, 8)$ (або $\overleftarrow{\beta}^*(f(j), \mu^*, \omega^{'*})|_1^m = (8, 6, 5, 4, 4, 3, 3, 2, 1)$). Використовуючи теорему 2, побудуємо матрицю $\widetilde{C} = \|\widetilde{c}_{ls}\|_{m\times n}$, для якої час простою машин дорівнює 2, що є глобальним мінімумом для упорядкованої задачі. З комбінаторної функції $\vec{\beta}^*(f(j), \mu^*, \omega^{'*})|_1^m = (1, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 6, 8)$ за правилами [15], за чотири кроки знайдемо перестановку ω^{k*}, яка є глобальним мінімумом для базової задачі (системи H) і дорівнює 8. Той же розв'язок за функцією $\overleftarrow{\beta}^*(f(j), \mu^*, \omega^{'*})|_1^m = (8, 6, 5, 4, 4, 3, 3, 2, 1)$ знаходимо за один крок.

Оскільки знаходження сполучення і перестановки методом структурно-алфавітного пошуку, для яких цільова функція набуває оптимального значення, потребує розроблення незалежних процедур, ця задача розв'язується гібридним алгоритмом.

Розв'язання задачі планування з теорії розкладів гібридним алгоритмом

Задачі комбінаторної оптимізації, в яких цільова функція залежить від кількох змінних, за цією ознакою розділяються на незалежні підзадачі, які можуть належати до різних класів. Оптимальне розв'язання для них визначається на множинах комбінаторних конфігурацій різних типів. Для їхнього розв'язання розробляються гібридні алгоритми, що ґрунтуються на організації покрокових обчислень – ітераційного процесу, який породжує послідовність розв'язань у відповідності з вбудованими процедурами (незалежними алгоритмами, орієнтованими на розв'язання задач різних класів) [16, 17]. До того ж суть гібридного алгоритму полягає у поєднанні таких методів для знаходження оптимального розв'язання, дійсного для кожної із заданих комбінаторних множин [18, 19].

Подамо обчислювальну схему розв'язання описаної задачі з теорії розкладів, в основі якої лежить гібридний алгоритм. Підзадачі в ньому розв'язуються методом струкурно-алфавітного пошуку.

1. Задаємо $n \in N$, $\tilde{n} \in N$, $\tilde{\eta} = n$, $\eta = n$, $t = 1$, $A = (a_1,...,a_n)$, $\tilde{A} = A$, де N – множина натуральних чисел, $\tilde{A}$ і $\tilde{\eta}$ – додаткові множина і змінна, які використовуються в процесі роботи алгоритму. Переходимо до п. 2.

2. Методом структурно-алфавітного пошуку за описаними вище правилами знаходимо сполучення $\mu^{i*} = (\mu_1^{i*},...,\mu_\eta^{i*})$, для якого $\min\limits_{\mu^{i*} \in M_\eta} F(\mu^*) \le$ $\le F(\mu^{i*}) \le T$. Переходимо до п. 3.

3. Для елементів із $\mu_1^{i*},...,\mu_\eta^{i*}$ описаним вище методом структурно-алфавітного пошуку знаходимо перестановку $\omega^{k*} = (\omega_1^{k*},...,\omega_\eta^{k*})$, для якої цільова функція (2) набуває мінімального значення. Переходимо до п. 4.

4. Якщо $F(\mu^{i*}, \omega^{k*}) \le T$, за розв'язання задачі на t-му кроці приймаємо знайдене сполучення μ^{i*} і перестановку $\omega^{k*} = (\omega_1^{k*},...,\omega_\eta^{k*})$. Покладаємо $t = t + 1$, переходимо до п. 5. В іншому разі задаємо наступне значення $\eta = \eta - 1$. Якщо $\eta > 1$, переходимо до п. 2. В іншому разі за t-е розв'язання задачі приймаємо сполучення, що складається з одного елемента. Переходимо до п. 6.

5. З множини $\tilde{A}$ вилучаємо елементи $\mu_1^{i*},...$ $...,\mu_\eta^{i*}$, задаємо $\tilde{\eta} = \tilde{\eta} - \eta$, $\eta = \tilde{\eta}$. Якщо $\eta \ge 2$, переходимо до п. 2. В іншому разі переходимо до п. 6.

6. Кінець роботи алгоритму.

Із обчислювальної схеми видно, що в процесі її роботи алгоритми знаходження сполучення без повторень і перестановки працюють як вбудовані процедури в ітераційному режимі, а значення цільової функції визначається на двох різних комбінаторних множинах, що характерно для гібридних алгоритмів.

Алгоритм розв'язання задачі КТ динамічним програмуванням

Для розв'язання задачі планування з теорії розкладів динамічним програмуванням деякі автори зводять її до задачі комівояжера, яку розв'язують цим методом [1, 3, 11]. Але цільова функція в задачі КТ залежить від розміщення без повторень, яке є комбінацією сполучення без повторень і перестановки, а їхня множина складається з підмножин ізоморфних комбінаторних конфігурацій. Використовуючи цю властивість, покажемо, що для цієї задачі характерні ознаки, завдяки яким вона досить просто розв'язується динамічним програмуванням. Процес її розв'язання описується орієнтованим ациклічним графом (у літературі – сітковий графік [2]), а часткові значення цільової функції, як видно з виразу (4), змінюються в часі і обчислюються за рекурентними правилами. Доведемо, що при обчисленні часткової цільової функції для неї виконується принцип Беллмана.

В ациклічному орієнтованому графі, яким задається процес розв'язання задачі КТ, виділимо вершини першого рівня, другого рівня і до n-го рівня. Кожна вершина першого рівня містить один елемент $a_l \in A$, другого рівня – два елементи із множини A і т.д. Сформулюємо таку теорему.

Теорема 3. Для задачі планування з теорії розкладів конвеєрного типу, в якій кожна із заданих робіт послідовно виконується на певних машинах, причому роботи складаються з однієї операції і кожна машина також виконує одну операцію, справедливий принцип Беллмана.

Доведення. Нехай задано множину A, де a_l-му елементу відповідає l-та робота, і множину B, де b_s-му елементу відповідає s-та машина, на якій необхідно виконати задані роботи. Із n елементів множини A виберемо по два. Для кожної такої пари за частковою цільовою функцією (2) обчислимо час простою машин. З вершини d другого рівня, якій у відповідність поставлено значення часткових цільових функцій для n пар елементів $a_l \in A$, виберемо пару $a_s, a_l \in A$, для якої значення цільової функції (3) – найменше; $d = \overline{1,n}$. На наступному кроці виберемо по три елементи із множини A таким чином: вибираємо два елементи тих пар, для яких у вершині другого рівня значення часткової цільової функції – найменше, і один елемент із $n-2$, що залишилися у множині A. В кожній вершині третього рівня за виразом (4) обчислюємо значення часткових цільових функцій для упорядкованих пар із трьох елементів і виберемо для кожної з них ту послідовність елементів по три, для яких значення цільової функції (3) найменше, тобто на кожному кроці розв'язується задача оптимізації невеликої розмірності. Як видно з обчислень, наступні результати складають оптимальну стратегію, починаючи з останнього часткового оптимального розв'язку і не залежать від попередніх способів його знаходження, тобто виконується принцип Беллмана, що і доводить теорему 3.

Наслідок. В процесі обчислення часткової цільової функції проводиться порівняння її значення із заданим обмеженням T, тому динамічним програмуванням знаходиться сполучення і перестановка у вершині d η-го рівня, для яких цільова функція набуває оптимального значення.

Оскільки множина розміщень без повторень складається з підмножин ізоморфних комбінаторних конфігурацій, то, використовуючи цю властивість, оптимальний розв'язок, згідно з наслідком, знайдемо на окремих підмножинах, починаючи із сполучень, кількість елементів у яких дорівнює одиниці. Наведемо обчислювальну схему розв'язання цієї задачі динамічним програмуванням. Розміщення без повторень позначимо як $\mu' = (\mu'_1,...,\mu'_n)$.

1. Задамо: $n \in N$, $\tilde{n} \in N$, $\tilde{\eta} = n$. Уведемо множини: $A = (1, 2, 3,..., n)$, $B = (1, 2, 3,..., \tilde{n})$, $E = (e_1,...,e_n)$; $\tilde{f}^{(d)} = (\tilde{f}_1^{(d)},...,\tilde{f}_n^{(d)})$, $\tilde{\varphi} = (\tilde{\varphi}_1,...,\tilde{\varphi}_n)$, де $\tilde{f}^{(d)}$ – множина значень часткової цільової функції в d-й вершині, $\tilde{\varphi}_j$ – найменше значення часткової цільової функції в d-й вершині, e_r – підмножина, яка містить частковий розв'язок (розміщення μ'); $t \in \{1,...,n\}$, $\tilde{f}_j^{(d)} = 0$, $\tilde{\varphi}_j = 0$ для $j = \overline{1, n}$; $\mu' = (\mu'_1,...,\mu'_n)$ – розміщення, $\eta = 2$, $\mu_j^{'k} = 0$ для $j = \overline{1, n}$, $t = 1$. Перехід до п. 2.

2. Покладемо $l = 1$, $s = 2$, $j = 1$.

3. Якщо $s = l$, переходимо до п 4. В іншому разі для пари (a_l, a_s) із $\mu' = (\mu_1,...,\mu_\eta)$ за виразом (4) обчислюємо часткове значення цільової функції $\tilde{F}$. Покладемо $\tilde{f}_j^{(d)} = \tilde{F}$, $j = j+1$. Переходимо до п. 4.

4. Покладаємо $s = s+1$. Якщо $s \le n$, переходимо до п. 3. В іншому разі – до п. 5.

5. Із множини $\tilde{f}^{(d)}$ виберемо найменше значення $\tilde{f}_r^{(d)*}$, покладемо $\tilde{\varphi}_t = \tilde{f}_r^{(d)*}$, а μ', для якого значення $\tilde{f}_r^{(d)*}$ – найменше, занесемо у підмножину e_t, $r \in \{1,...,n\}$, $t = t+1$. Переходимо до п. 6.

6. Покладаємо $l = l+1$, $s = 1$. Якщо $l \le n$, переходимо до п. 3, в іншому разі – до п. 7.

7. Із множини $\tilde{\varphi}$ вибираємо найменше значення $\tilde{\varphi}_r^*$. Якщо $\tilde{\varphi}_r^* < T$ або $\eta \le n$, переходимо до п. 8. В іншому разі покладемо $\mu' = e_r$, $\tilde{\eta} = \tilde{\eta} - \eta$, перейдемо до п. 9.

8. Покладаємо $\eta = \eta + 1$, $t = t+1$. Якщо $\eta > n$, переходимо до п 7. В іншому разі – до п. 2.

9. За розв'язок задачі приймаємо послідовність $\mu'^* = (\mu_1'^*,...,\mu_\eta'^*)$, для якої часткове значення цільової функції – найменше. Перехід до п. 10.

10. Кінець роботи алгоритму.

Якщо $\tilde{\eta} = \tilde{\eta} - \eta$ більше нуля, то для елементів із множини А, що залишилися, проводимо обчислення за описаною обчислювальною схемою (пп. 1–10).

Приклад задачі КТ та її розв'язання динамічним програмуванням

Наведемо ту ж саму задачу, що і при розв'язанні методом структурно-алфавітного пошуку ($n = 3$, $\tilde{n} = 3$, $T = 50$, $\tilde{\beta}(f(j), \mu^*, \omega^k)|_1^m = (2, 3, 1, 4, 5, 3, 6, 8, 4)$). В табл. 1–6 подано результати розв'язання наведеного прикладу повним перебором. Для $\mu^7 = (\mu_1^7, \mu_2^7, \mu_3^7)$ цільова функція набуває глобального мінімуму. В усіх таблицях подано змінне значення цільової функції, що визначає простій машин. Постійне значення $F_1(\mu^1) = 36$.

Таблиця 1

$F_2(\mu^7, \omega^1) = 11$

	1	**2**	**3**
1	2	4	6
2	3	5	8
3	1	3	4

Таблиця 2

$F_2(\mu^7, \omega^2) = 13$

	2	**1**	**3**
1	4	2	6
2	5	3	8
3	3	1	4

Таблиця 3

$F_2(\mu^7, \omega^3) = 13$

	2	**3**	**1**
1	4	6	2
2	5	8	3
3	3	4	1

Таблиця 4

$F_2(\mu^7, \omega^4) = 8$

	3	**2**	**1**
1	6	4	2
2	8	5	3
3	4	3	1

Таблиця 5

$F_2(\mu^7, \omega^5) = 12$

	3	**1**	**2**
1	6	2	4
2	8	3	5
3	4	1	3

Таблиця 6

$F_2(\mu^7, \omega^6) = 15$

	1	**3**	**2**
1	2	6	4
2	3	8	5
3	1	4	3

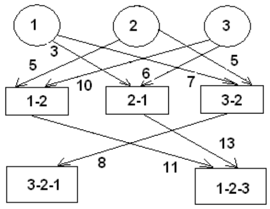

Схема розв'язання наведеного прикладу задачі КТ динамічним програмуванням

Глобальний розв'язок для заданого прикладу, який знайдено динамічним програмуванням – розміщення без повторень $\mu^* = (3, 2, 1)$, що збігається з результатом повного перебору перестановок для $\mu^7 = (\mu_1^7, \mu_2^7, \mu_3^7)$ (перестановка $\omega^4 = (3, 2, 1)$). Значення цільової функції для нього $F(\mu^7, \omega^4) = 36 + 8 = 44$, яке не перевищує заданої величини $T = 50$.

Висновок. Отже, аргументом цільової функції в розглянутій задачі планування з теорії розкладів є розміщення без повторень. Ця комбінаторна конфігурація утворюється вибиранням елементів із базової множини з наступним їх упорядкуванням. Тобто, її можна розглядати як комбінацію сполучення без повторень і перестановки, а цільова функція залежить від двох змінних і результат необхідно знайти на двох множинах комбінаторних конфігурацій. Оптимальний розв'язок для підзадач, на які розбивається основна задача, знаходимо методом структурно-алфавітного пошуку за функціями натурального аргументу, якими моделюються вхідні дані. Враховуючи характерні властивості задачі, пошук розв'язку на множині сполучень проводиться за двома функціями натурального аргументу, а на перестановках – за однією. При цьому за певними правилами моделюється матриця, за якою обчислюється значення цільової функції. Розроблені незалежні алгоритми розв'язання задачі планування з теорії розкладів працюють як вбудовані процедури в ітераційному режимі, що характерно для гібридних алгоритмів.

До того ж процес розв'язання цієї задачі описується орієнтованим ациклічним графом, а часткові значення цільової функції змінюються в часі, обчислюються за рекурентними правилами і для неї виконується принцип Беллмана. Завдяки оговореним властивостям вона нескладно розв'язується динамічним програмуванням без попереднього її зведення до задачі комівояжера.

1. *Конвей Р.В.*, *Максвелл В.Л.*, *Миллер Л.В.* Теория расписаний. – М.: Наука, 1975. – 359 с.
2. *Танаев В.С.*, *Шкурба В.В.* Введение в теорию расписаний. – Там же. – 256 с.
3. *Михалевич В.С.*, *Кукса А.И.* Методы последовательной оптимизации в дискретных сетевых задачах оптимального распределения ресурсов. – Там же, 1983. – 208 с.
4. *Кононов А.В*. Задачи теории расписаний на одной машине с длительностями работ, пропорциональными произвольной функции // Дискретный анализ и исследование операций. Сер 2. – 2003. – **10**, № 2. – С. 25–55.
5. *Кочетов Ю.А.*, *Столяр А.А*. Использование окрестностей для приближенного решения задачи календарного планирования с ограниченными ресурсами // Там же. Сер 1. – 1998. – **5**, № 3. – С. 17–37.
6. *Кузюрин Н.Н.* Многопроцессорные расписаний и комбинаторные конфигурации // Дискретная математика. – 1998. – **7**, вып. 1. – С. 77–84.
7. *Глибовец Н.Н.*, *Медведь С.А.* Генетические алгоритмы и их использование для решения задачи составления расписания // Кибернетика и системный анализ. – 2003. – № 1. – С. 95–108.
8. *Ібрагім С.А.* Паралельна реалізація генетичних алгоритмів для задач теорії розкладів, заданих на перестановках: Автореф. дис... канд. техн. наук: Харк. нац. ун-т радіоелектрон. – Харків, 2007. – 20 с.
9. *Береговых Ю.В.*, *Васильев Б.А.*, *Володин Н.А.* Алгоритм составления расписания занятий // Искусственный интеллект. – 2009. – № 2.– С. 50–56.
10. *Сінко О.М.* Вибір типу кросоверу в еволюційній технології розв'язання задачі складання розкладів

навчальних занять // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики. XVI Всеукр. наук. конф., Львів, 8–9 жовтня 2009 року. – Львів, 2009. – С. 193.
11. *Кукса А.И.*, *Лаптин Ю.П.* Динамическое программирование в сетевой задаче теории расписаний // Кибернетика. – 1978. – № 1. – С. 111–113.
12. *Сергиенко И.В.*, *Каспшицкая М.Ф.* Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. – К.: Наук. думка, 1981. – 281 с.
13. *Тимофієва Н.К.* Теоретико-числові методи розв'язання задач комбінаторної оптимізації: Автореф. дис... докт. техн. наук / Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України. – Київ, 2007. – 32 с.
14. *Рыбников К.А.* Введение в комбинаторный анализ. – М.: Изд-во МГУ, 1985. – 308 с.
15. *Тимофієва Н.К.* Метод структурно-алфавітного пошуку та підкласи розв'язних задач із класу задачі комівояжера // УСиМ. – 2008. – № 4. – С. 20–36.
16. *Гуляницкий Л.Ф.*, *Тимофеева Н.К.* О размещении разногабаритных элементов на печатных платах // УСиМ. – 1982. – № 3. – С. 50–53.
17. *Гуляницкий Л.Ф.* Разработка гибридных методов дискретной оптимизации на основе *G*-алгоритмов // Компьютерная математика. – К.: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины. – 2005. – № 1. – С. 143–151.
18. *Тимофієва Н.К.* Задачі комбінаторної оптимізації та гібридні алгоритми // Intrern. Conf. «Problems of decision making under uncertainties (PDMU-2010)». Abstracts. May 17–21, 2010. – Lviv, Ukraine, 2010. – С. 164.
19. *Тимофієва Н.К.* Залежність цільової функції в задачах комбінаторної оптимізації від багатьох змінних та гібридні алгоритми // Вісн. Вінницьк. політех. ін-ту. – 2009. – № 2. – С. 130–136.

Поступила 24.11.2010
Тел. для справок: (044) 526-1175 (Киев)
E-mail: *tymnad@gmail.com*

●

Н.К. Тимофеева, В.И. Гриценко

Решение задачи планирования из теории расписаний методом структурно-алфавитного поиска и гибридным алгоритмом

Введение. Задачи из теории расписаний довольно разнообразны и требуют упорядочения во времени фиксированной системы ресурсов для выполнения определенной совокупности работ [1–6]. Для их решения используются различные подходы и алгоритмы, например метод попарных перестановок, упорядочение по минимуму, «жадный» алгоритм [1, 2], генетические алгоритмы [7–10], динамическое программирование [1, 3, 11]. Поиск оптимального решения для некоторых из них проводят на множестве перестановок, поэтому в литературе их рассматривают как задачи упорядочения [1, 2], т.е. задачи этого класса сводятся к задачам комбинаторной оптимизации, в которых аргумент целевой функции – комбинаторные конфигурации. В [12] рассматривается задача планирования из теории расписаний конвейерного типа как задача комбинаторной оптимизации, где оговорено, что аргумент целевой функции в ней – размещение без повторов. Эта комбинаторная конфигурация образуется выбиранием элементов из базового множества с последующим их упорядочением. Ее можно рассматривать как комбинацию сочетания без повторений и перестановок, а целевая функция зависит от двух переменных и результат необходимо найти на двух множествах комбинаторных конфигураций. Установление комбинаторной природы задачи определенного класса проводится построением ее математической модели в рамках теории комбинаторной оптимизации. Для решения задач такого типа методом структурно-алфавитного поиска необходимо входные данные в них смоделировать двумя конечными последовательностями (функциями натурального аргумента). Далее сведем задачу планирования из теории расписаний к задаче комбинаторной оптимизации и найдем ее решение этим методом.

Общая постановка задачи комбинаторной оптимизации [13]

Задачи этого класса, как правило, задаются одним или несколькими множествами, например A и B, элементы которых имеют любую природу. Назовем эти множества базовыми. Имеется два типа задач. В первом типе каждое из этих множеств можно представить в виде графа, вершинами которого являются его элементы, а каждому ребру поставлено в соответствие число $c_{sl} \in R$, называемое весом ребра (R – множество вещественных чисел). Для удобства будем полагать, что между элементами этих множеств существуют связи, числовое значение которых назовем весами. Величины c_{sl} назовем входными данными и зададим их матрицами. Во втором типе задач между элементами заданного множества связей не существует, а весами выступают числа $v_j \in R$, которым в соответствие поставлены некоторые свойства этих элементов, числовые значения которых задаются конечными последовательностями, которые также являются входными данными. Эти величины определяют значение целевой функции.

Для обоих типов задач из элементов одного из заданных множеств, например $a_l \in A$, $l \in \{1,...,n\}$, образуется комбинаторное множество W – совокупность комбинаторных конфигураций определенного типа (перестановки, выборки разных типов, разбиения и др.). На элементах w комбинаторного множества W вводится целевая функция $F(w)$. Необходимо найти элемент w^* множества W, для которого целевая функция $F(w)$ принимает экстремальное значение при выполнении заданных ограничений, т.е. $F(w^*) = \text{glob} \underset{w \in W^0 \subset W}{\text{extr}} F(w)$, где $\text{extr} = \{\min, \max\}$, W^0 – подмножество, определяемое ограничениями задачи.

Задача планирования из теории расписаний относится к первому типу.

Аргумент целевой функции в задаче планирования из теории расписаний

Аргументом целевой функции в задачах комбинаторной оптимизации являются комбинаторные конфигурации (перестановки, сочетания, разбиения множества на подмножества и др.).

Комбинаторной конфигурацией назовем любую совокупность элементов, образуемую из всех или из некоторых элементов заданного множества $A = \{a_1, ..., a_n\}$ [13]. Обозначим ее упорядоченным множеством $w^k = (w_1^k, ..., w_{\eta^k}^k)$. Множество $A = \{a_1, ..., a_n\}$ назовем базовым. Под символом $w_l^k \in A$ понимаем как отдельные элементы, так и подмножества (блоки), $\eta^k \in \{1, ..., n\}$ – количество элементов в w^k, $W = \{w^k\}_1^q$ – множество комбинаторных конфигураций. В зависимости от условия задачи η будем обозначать без индекса или с верхним индексом η^k. Верхний индекс k ($k \in \{1, ..., q\}$) в w^k обозначает порядковый номер w^k в W, q – количество w^k в W.

Рекуррентным комбинаторным оператором назовем совокупность правил, с помощью которых из элементов базового множества A образуется комбинаторная конфигурация w^k. Разнообразные типы комбинаторных конфигураций образуются с помощью трех рекуррентных комбинаторных операторов: выбирание, транспозиция, арифметический. Комбинаторные конфигурации, одна из которых образована из $A = \{a_1, ..., a_n\}$ выбиранием, могут образовываться один из другого определенной операцией.

Две нетождественных комбинаторных конфигурации w^k и w^i назовем изоморфными, если $\eta^k = \eta^i$.

Подмножество $W_\eta \subset W$ назовем подмножеством изоморфных комбинаторных конфигураций, если ее элементы – изоморфные комбинаторные конфигурации.

Рекуррентные комбинаторные операторы выбирания и арифметический порождают как изоморфные, так и неизоморфные комбинаторные конфигурации $w^k \in W$.

Поскольку в задаче планирования из теории расписаний аргументом целевой функции может быть размещение без повторений, рассмотрим такую комбинаторную конфигурацию, как выборки. С понятием выборки связывают как собственно операцию выделения подмножеств заданного множества, так и ее результат: выбранное подмножество. В дальнейшем подразумеваем второе понятие.

Пусть задано базовое множество $A = \{a_1, ..., a_n\}$, из которого получим η-выборку. Число η называют объемом выборки. В η-выборках в зависимости от условия задачи или учитывается порядок расположения в них элементов (тогда их называют η-перестановками или η-размещениями), или не учитывается. В этом случае они называются η-сочетанием [14].

Следовательно, существуют такие типы выборок: упорядоченные и неупорядоченные. Неупорядоченные это – сочетания без повторений и сочетания с повторениями. Упорядоченные это – размещение с повторениями и размещение без повторений. Множество любого типа выборок состоит из подмножеств изоморфных выборок.

Теорема 1 [13]. Для определенного упорядочения выборок закономерность изменения значений целевой функции на подмножестве изоморфных выборок такое же, как и на множестве перестановок.

Математическая постановка задачи планирования из теории расписаний как задача комбинаторной оптимизации

Одна из задач этого класса формулируется так [12]. Задано n деталей. Их множество обозначим $A = \{a_1, ..., a_n\}$. Каждая из деталей a_l должна пройти последовательную обработку на $\tilde{n}$ машинах $B = \{b_1, ..., b_{\tilde{n}}\}$. Необходимо составить такое расписание обработки деталей, чтобы затраченное на эти операции время было бы минимальным при условии, что оно не превышает заданной величины T. В этой задаче каждая деталь требует для обработки одну операцию. Каждая машина также выполняет одну операцию. Это – самая простая задача из теории расписаний, которая относится к конвейерному типу (в дальнейшем задача КТ).

В этой задаче заданы два множества A и B, между элементами которых существует определенная зависимость, числовые значения которой назовем *весами*. Представим их несимметрической матрицей C размерностью $\tilde{n} \times n$, где величина c_{sl} соответствует значению времени, необходимого для обработки l-й детали s-й машиной. Время последовательной обработки всех n элементов множества A при любом расписании, которое бы не превышало заданной величины, неизвестно, поэтому сначала для выборки из n элементов $a_l \in A$ по n находим перестановку, для которой значение целевой функции – минимально и не превышает величины T. Если полученное решение не удовлетворяет этому условию, то задача решается для выборки из n элементов $a_l \in A$ по η. Из этого следует, что аргументом целевой функции в рассмотренной задаче есть размещение без повторений, которое образуется путем нахождения сочетания из n элементов по η, для которого генерируются η! перестановок $\eta \in \{1,..., n\}$.

Для i-го сочетания введем комбинаторную матрицу $Q(\mu^i)$ размерностью $\tilde{n} \times \eta$, в которую входят столбцы матрицы C, номера которых совпадают с номерами элементов множества A, из которых образовано сочетание без повторений $\mu^i \in \mathrm{M}$, $i \in \{1,..., 2^n - 1\}$, M – множество сочетаний. Из фиксированной матрицы $Q(\mu^{i*})$ образуем η! комбинаторных матриц $Q'(\mu^{i*}, \omega^k)$, зависящих от перестановки $\omega^k = (\omega_1^k,...,\omega_\eta^k) \in \Omega$, $k \in \{1,..., \eta!\}$, $\eta \in \{1,..., n\}$, Ω – множество перестановок. Целевая функция в задаче планирования из теории расписаний примет вид

$$F_1(\mu^{i*},\omega^k) = \sum_{l=1}^{\eta}\sum_{s=1}^{\tilde n} g_{sl}(\mu^{i*}), \qquad (1)$$

$$F_2(\mu^{i*},\omega^k) = \sum_{l=1}^{\eta-1}\sum_{s=2}^{\tilde n}\left|g'_{sl}(\mu^{i*},\omega^k) - g'_{s-1\,l+1}(\mu^{i*},\omega^k)\right|, \qquad (2)$$

$$F(\mu^{i*},\omega^k) = F_1(\mu^{i*},\omega^k)+F_2(\mu^{i*},\omega^k), \qquad (3)$$

где $\sum_{l=1}^{\eta}\sum_{s=1}^{\tilde n} g_{sl}(\mu^{i*})$ – постоянная для любой из η! перестановок величина, определяющая заданное затраченное время на обработку деталей. Оно зависит не от перестановки, а от варианта сочетания μ^i;

$\sum_{l=1}^{\eta-1}\sum_{s=2}^{\tilde n}\left|g'_{sl}(\mu^{i*},\omega^k) - g'_{s-1\,l+1}(\mu^{i*},\omega^k)\right|$ – суммарное время простоя машин. Эта величина – переменная и зависит как от варианта сочетания μ^i, так и от перестановки $\omega^k = (\omega_1^k,...,\omega_\eta^k)$. По выражению (3) определяется суммарное значение целевой функции.

Для выбранной пары элементов $a_l, a_\xi \in A$ частичное значение целевой функции вычисляется так:

$$\tilde F_h(\mu^{i*},\omega^k) = \tilde F_{h-1}(\mu^{i*},\omega^k) + \sum_{s=1}^{\tilde n} g_{s\xi}(\mu^{i*}) + \sum_{s=1}^{\tilde n} g_{sl}(\mu^{i*}) + \sum_{s=2}^{\tilde n}\left|g'_{s\,l}(\mu^{i*},\omega^k) - g'_{s-1\,\xi}(\mu^{i*},\omega^k)\right|, \qquad (4)$$

где $\xi, l \in \{1,...,n\}$ и $l<\xi$; $h \in \{1,...,q'\}$, q' – количество частичных целевых функций; $\sum_{s=1}^{\tilde n} g_{s\xi}(\mu^{i*})$, $\sum_{s=1}^{\tilde n} g_{sl}(\mu^{i*})$ – постоянные величины, определяющие затраченное на обработку l-й и ξ-й деталей время, заданное по условию, $\sum_{s=2}^{\tilde n}\left|g'_{s\,l}(\mu^{i*},\omega^k) - g'_{s-1\,\xi}(\mu^{i*},\omega^k)\right|$ – значение времени простоя машин для двух деталей.

Задачи комбинаторной оптимизации, в которых целевая функция зависит от нескольких переменных, разделяются на независимые подзадачи, которые могут принадлежать к разным классам. Ее решение определяется на множестве комбинаторных конфигураций разных типов, т.е. задача КТ заключается в нахождении таких μ^{i*} и ω^{k*}, для которых значение $F(\mu^{i*}, \omega^{k*})$ было бы минимальным и $F(\mu^{i*},\omega^{k*}) \le T$.

Решение задачи КТ методом структурно-алфавитного поиска

Нахождение оптимального решения в задачах комбинаторной оптимизации методом структурно-алфавитного поиска проводится по функциям натурального аргумента, упорядоченных по возрастанию или убыванию их значений [13, 15]. По разработанным правилам находится последовательность локальных экстремумов $F = (F(w^1),..., F(w^{k*}),..., F(w^{q^*}))$ таких, что $F(w^{k^*}) = \operatorname{glob} \operatorname{extr}_{w^k \in W} F(w^k)$, где $\mathrm{extr} = \{\min, \max\}$, $w^{q^*}, w^{k^*} \in W$, $k, k^*, q^* \in \{1..., n!\}$, q^* – количество локальных экстремумов.

Метод структурно-алфавитного поиска эффективен для задач, аргументом целевой функции которых есть перестановка, а также на подмножестве изоморфных комбинаторных конфигураций, поскольку целевая функция, согласно с теоремой 1, на этих подмножествах изменяется так, как и на множестве перестановок. В задаче КТ этим методом находим решение на подмножестве изоморфных размещений, которые образуются путем нахождения сочетания из n элементов по η, для которого генерируются η! перестановок. Оптимальное решение для этой задачи определяется на двух комбинаторных множествах: на множестве сочетаний находится по одной вычислительной схеме, а на множестве перестановок – по другой.

Для нахождения оптимального решения на множестве сочетаний, которое удовлетворяет заданному ограничению, вычислим суммарное значение времени обработки l-й детали на $\tilde n$ машинах. Последовательность найденных величин представим функцией натурального аргумента $\varphi(j)|_1^n = (\varphi(1),...,\varphi(n))$, где $\varphi(j) = \sum_{s=1}^{\tilde n} g_{sl}(\mu^i)$ $l \in \{1,...,n\}$.

Введем комбинаторную функцию $\beta(f(j), \mu^i)|_1^n = (\beta_j(f(1),\mu^i),...,\beta_j(f(n),\mu^i))$, где $\beta_j(f(j),\mu^i)=1$, если из базового множества A выбирается элемент a_j, и $\beta_j(f(j),\mu^i)=0$ в другом случае. Положим, что задача КТ, заданная функциями $\varphi(j)|_1^n$ и $\beta_j(f(j),\mu^i)|_1^n$ – базовая. Для нее запишем целевую функцию

$$F(\mu^i) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j(f(j),\mu^i)\,\varphi(j).$$

Задачу, входные данные которой заданы функциями $\overleftarrow{\beta}(f(j),\mu^*)|_1^n$ (или $\vec\beta(f(j),\mu^{**})|_1^n$), где $\overleftarrow{\beta}_j(f(j),\mu^*) \ge \overleftarrow{\beta}_j(f(j+1),\mu^*)$ (или $\vec\beta_j(f(j),\mu^{**}) \le \vec\beta_j(f(j+1),\mu^{**})$), и $\vec\varphi(j)|_1^n$ (или $\overleftarrow{\varphi}(j)|_1^n$), где $\vec\varphi(j) \le \vec\varphi(j+1)$ (или

$\bar{\varphi}(j) \ge \bar{\varphi}(j+1)$), образованных из $\beta(f(j), w^k)|_1^n$ и $\varphi(j)|_1^n$, назовем *упорядоченной*. Тогда для подмножества изоморфных сочетаний M_η глобальные максимум и минимум вычисляются по таким выражениям:

$$\max_{\mu^{**}\in M_\eta} F(\mu^{**}) = \sum_{j=1}^{n} \vec{\beta}_j\,(f\,(j), \mu^{**})\,\vec{\varphi}(\,j\,) \text{ и}$$

$$\min_{\mu^{*}\in M_\eta} F(\mu^{*}) = \sum_{j=1}^{n} \bar{\beta}_j\,(f\,(j), \mu^{*})\,\vec{\varphi}(\,j\,).$$

Значение целевой функции для произвольного $\mu^i \in M_\eta$ на подмножестве изоморфных сочетаний без повторений находится в пределах: $\max\limits_{\mu^{**}\in M_\eta} F(\mu^{**}) \ge F(\mu^i) \ge \min\limits_{\mu^{*}\in M_\eta} F(\mu^*)$.

В процессе решения задачи находим подмножество M_η, содержащие сочетание μ^{i*}, для которого $\min\limits_{\mu^{i*}\in M_\eta} F(\mu^*) \le$ $\le F(\mu^{i*}) \le T$.

Рассмотрим нахождение оптимального решения задачи планирования из теории расписаний методом структурно-алфавитного поиска на подмножестве $\eta!$ перестановок при фиксированном μ^{i*}. На подмножестве перестановок целевая функция (1) для любой перестановки – постоянна, изменяется лишь функция (2). Матрица $Q'(\mu^{i*}, \omega^1)$ размерностью $\eta \times \tilde{n}$ содержит столбцы матрицы *C*, суммарное значение элементов которых для μ^* минимально. Для нахождения подмножества, содержащего решение, удовлетворяющее заданному ограничению, входные данные смоделируем функциями натурального аргумента. Элементы матрицы $Q'(\mu^{i*}, \omega^1)$ зададим комбинаторной функцией $\tilde{\beta}(\,f\,(\,j\,), \mu^{i*}, \omega^k)|_1^m$, зависящей от перестановки ω^k при фиксированном μ^{i*}, $m = \eta \cdot \tilde{n}$. Размещение элементов матрицы в ней таково: сначала идут элементы первого столбца, потом второго и т.д. Для множества перестановок введем системы комбинаторных функций H и H', где $\tilde{\beta}(\,f\,(\,j\,), \mu^*, \omega^k)|_1^m \in H$ – комбинаторная функция, аргумент которой – перестановка $\omega^k \in \Omega$, образованная из элементов базового множества $A_\eta = \{a_1, ..., a_\eta\}$; $\beta^*(\,f\,(\,j\,), \mu^*, \omega'^t)|_1^m \in H'$ – комбинаторная функция, аргумент которой – перестановка $\omega'^i \in \Omega'$, образованная из элементов базового множества $A_m = \{a_1, ..., a_m\}$. Если $\tilde{\beta}(\,f\,(\,j\,), \mu^*, \omega^1)|_1^m =$ $= \beta^*(f(j), \mu^*, \omega'^1)|_1^m$, где ω^1, ω'^1 – первые перестановки в Ω, Ω' и $\tilde{\beta}(\,f\,(\,j\,), \mu^*, \omega^1)|_1^m \in H$, $\beta^*(\,f\,(\,j\,), \mu^*, \omega'^1)|_1^m \in H'$, то $H \subset H'$.

Поскольку на подмножестве перестановок переменное значение целевой функции вычисляется по выражению (2), то определение глобального минимума (максимума) простоя машин проводится по одной упорядоченной конечной последовательности. Определим, для каких комбинаторных функций целевая функция в задаче планирования из теории расписаний принимает глобальные минимум и максимум.

Задачу планирования из теории расписаний на подмножестве $\eta!$ перестановок при фиксированном μ^{i*}, входные данные в которой заданы комбинаторной функцией $\tilde{\beta}(\,f\,(\,j\,), \mu^*, \omega^k)|_1^m$, назовем *базовой* (или задачей системы *H*). Задачу, входные данные в которой заданы комбинаторной функцией $\vec{\beta}^*(\,f\,(\,j\,), \mu^*, \omega'^*)|_1^m \in H'$ (или $\bar{\beta}^*(\,f\,(\,j\,), \mu^*, \omega'^{**})|_1^m \in H'$), где $\vec{\beta}_j^*(\,f\,(\,j\,), \mu^*, \omega'^*) \le$ $\le \vec{\beta}_j^*(\,f\,(\,j+1), \mu^*, \omega'^*)$ (или $\bar{\beta}_j^*(\,f\,(\,j\,), \mu^*, \omega'^{**}) \ge$ $\ge \bar{\beta}_j^*(\,f\,(\,j+1), \mu^*, \omega'^{**})$), назовем *упорядоченной* (или задачей системы H').

Расположим значения упорядоченной комбинаторной функции $\vec{\beta}^*(\,f\,(\,j\,), \mu^*, \omega'^*)|_1^m \in H'$ (или $\bar{\beta}^*(\,f\,(\,j\,), \mu^*,$ $\omega'^{**})|_1^m \in H'$) последовательно в матрице $\tilde{C} = \|\tilde{c}_{sl}\|_{\tilde{n}\times\eta}$ на наддиагоналях, поддиагоналях побочной диагонали и на собственно побочной диагонали, начиная с побочной и ей смежных, таким образом: $c_{n1}, c_{n-12}, ..., c_{1n}, c_{n-11}, c_{n-22}, ...$ $..., c_{1n-1}, ..., c_{n2}, c_{n-13}, ..., c_{mn}$. Рядом располагаются те значения комбинаторной функции, разница между которыми – минимальная. Если $\tilde{n} \ne n$, то последующие значения $\vec{\beta}_j^*(\,f\,(\,j\,), \mu^*, \omega'^*)$ размещаются на поддиагоналях c_{n+11}, c_{n2} и т.д.

Выделим в системе H' комбинаторную функцию $\beta^*(\,f\,(\,j\,), \mu^*, \omega'^{***})|_1^m \in H'$, в первой позиции которой находится наименьшее значение, а во второй – наибольшее, в третьей – наименьшее из оставшихся, а в четвертой – наибольшее из оставшихся и т.д. Аналогично матрице $\tilde{C}$ расположим значение $\beta_j^*(\,f\,(\,j\,), \mu^*, \omega'^{***})$ на наддиагоналях, поддиагоналях побочной диагонали и на собственно побочной диагонали в матрице $C^* = \|c_{sl}^*\|_{\tilde{n}\times\eta}$.

Сформулируем такую теорему.

Теорема 2. Если упорядоченная задача задается комбинаторной функцией $\vec{\beta}^*(\,f\,(\,j\,), \mu^*, \omega'^*)|_1^m \in H'$ (или $\bar{\beta}^*(\,f\,(\,j\,), \mu^*, \omega'^{**})|_1^m \in H'$), значение которых представлено матрицей $\tilde{C} = \|\tilde{c}_{sl}\|_{\tilde{n}\times\eta}$, то время простоя машин для задачи планирования из теории расписаний конвейерного типа для перестановки $\omega'^* \in \Omega'$ (или $\omega'^{**} \in \Omega'$), вычисляемое по выражению (2), есть глобальный минимум.

Если упорядоченная задача задается комбинаторной функцией $\beta^*(\,f\,(\,j\,), \mu^*, \omega'^{***})|_1^m \in H'$, значение которой представлено матрицей $C^* = \|c_{sl}^*\|_{\tilde{n}\times\eta}$, то время простоя машин для задачи планирования из теории расписаний конвейерного типа для перестановки $\omega'^{***} \in \Omega'$, вычисляемое по выражению (2), есть глобальный максимум.

Доказательство очевидно.

Следовательно, матрица $\widetilde{C} = \left\|\widetilde{c}_{sl}\right\|_{\widetilde{n}\times\eta}$ – глобальное минимальное решение для упорядоченной задачи (для системы H'). Перестановку ω^{k*}, для которой целевая функция (2) принимает оптимальное значение для базовой задачи (система H), находим по упорядоченной комбинаторной функции $\vec{\beta}^*(f(j), \mu^*, \omega'^*)|_1^m \in H'$ (или $\vec{\beta}^*(f(j),$ $\mu^*, \omega'^{**})|_1^m \in H'$) с использованием правил, описанных в [15]. По вычисленной из $\vec{\beta}^*(f(j), \mu^*, \omega'^*)|_1^m \in H'$ комбинаторной функции $\widetilde{\beta}(f(j), \mu^*, \omega^k)|_1^m$ находим перестановку ω^k. Для нее строим матрицу $Q'(\mu^{i*}, \omega^k)$, по которой по выражению (2) вычисляем суммарный простой машин. Поиск локальных решений проводится до тех пор, пока значение целевой функции (2) не будет увеличиваться. Оптимальное решение – перестановка ω^{k*}, для которой целевая функция из найденных принимает наименьшее значение.

Приведем пример задачи КТ и ее решение методом структурно-алфавитного поиска**.** Задано $n = 3$ $\widetilde{n} = 3$, $T = 50$. Входные данные в базовой задаче зададим комбинаторной функцией $\widetilde{\beta}(f(j), \mu^*, \omega^k)|_1^m$ = (2, 3, 1, 4, 5, 3, 6, 8, 4), где первые три значения – элементы первого столбца матрицы, следующие три значения – элементы второго столбца матрицы, последние три – элементы третьего столбца матрицы. Из базовой задачи образуем упорядоченную, выделив из системы H' упорядоченную комбинаторную функцию $\vec{\beta}^*(f(j), \mu^*, \omega'^*)|_1^m$ = (1, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 6, 8) (или $\overleftarrow{\beta}^*(f(j), \mu^*, \omega'^*)|_1^m$ = (8, 6, 5, 4, 4, 3, 3, 2, 1)). Используя теорему 2, построим матрицу $\widetilde{C} = \left\|\widetilde{c}_{sl}\right\|_{\widetilde{n}\times\eta}$, для которой время простоя машин равно 2, что есть глобальным минимумом для упорядоченной задачи. По комбинаторной функции $\vec{\beta}^*(f(j), \mu^*, \omega'^*)|_1^m =$ $= (1, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 6, 8)$ по правилам, описанным в [15], за четыре шага находим перестановку ω^{k*}, которая есть глобальным минимумом для базовой задачи (системы H) и равна 8. То же решение по функции $\overleftarrow{\beta}^*(f(j), \mu^*, \omega'^*)|_1^m = (8, 6, 5, 4, 4, 3, 3, 2, 1)$ находим за один шаг.

Поскольку определение сочетания и перестановки методом структурно-алфавитного поиска, для которых целевая функция принимает оптимальное значение, требует разработки независимых процедур, эта задача решается гибридным алгоритмом.

Решение задачи планирования из теории расписаний гибридным алгоритмом

Задачи комбинаторной оптимизации, в которых целевая функция зависит от нескольких переменных, разделяются на независимые подзадачи, которые могут принадлежать разным классам. Оптимальное решение для них определяется на множестве комбинаторных конфигураций разных типов. Для их решения разрабатываются гибридные алгоритмы, основанные на организации пошаговых вычислений – итерационного процесса, порождающего последовательность решений в соответствии со встроенными процедурами (независимыми алгоритмами, ориентированными на решение задач разных классов) [16, 17]. К тому же суть гибридного алгоритма заключается в сочетании таких методов для нахождения оптимального решения, которые были бы Действительными для каждого из заданных комбинаторных множеств [18, 19].

Представим вычислительную схему решения описанной задачи, в основе которой лежит гибридный алгоритм. Подзадачи в нем решаются методом струкурно-алфавитного поиска.

1. Зададим $n \in N$, $\widetilde{n} \in N$, $\widetilde{\eta} = n$, $\eta = n$, $t = 1$, $A = (a_1, ..., a_n)$, $\widetilde{A} = A$, где N – множество натуральных чисел, $\widetilde{A}$ и $\widetilde{\eta}$ – дополнительные множество и переменная, которые используются в процессе работы алгоритма. Переходим к п. 2.

2. Методом структурно-алфавитного поиска по описанным выше правилам находим сочетание $\mu^{i*} = (\mu_1^{i*}, ..., \mu_\eta^{i*})$, для которого $\min\limits_{\mu^{i*} \in M_\eta} F(\mu^*) \le F(\mu^{i*}) \le T$. Переходим к п. 3.

3. Для элементов из $\mu_1^{i*}, ..., \mu_\eta^{i*}$, описанным методом структурно-алфавитного поиска, находим перестановку, для которой целевая функция (2) принимает минимальное значение. Переходим к п. 4.

4. Если $F(\mu^{i*}, \omega^{k*}) \le T$, решением задачи на t-м шаге есть найденное сочетание μ^{i*} и перестановка $\omega^{k*} = (\omega_1^{k*}, ..., \omega_\eta^{k*})$. Положим $t = t + 1$, перейдем к п. 5. Иначе зададим следующее значение $\eta = \eta - 1$. Если $\eta > 1$, переходим к п. 2. Иначе t-м решением задачи есть сочетание, состоящее из одного элемента. Переходим к п. 6.

5. Из множества $\widetilde{A}$ убираем элементы $\mu_1^{i*}, ..., \mu_\eta^{i*}$, задаем $\widetilde{\eta} = \widetilde{\eta} - \eta$, $\eta = \widetilde{\eta}$. Если $\eta \ge 2$, переходим к п. 2. Иначе переходим к п. 6.

6. Конец работы алгоритма.

Из вычислительной схемы видно, что в процессе ее работы алгоритмы нахождения сочетания без повторений и перестановки работают как встроенные процедуры в итерационном режиме, а значение целевой функции определяется на двух разных комбинаторных множествах, что характерно для гибридных алгоритмов.

Алгоритм решения задачи КТ динамическим программированием

Для решения задачи планирования из теории расписаний динамическим программированием некоторые авторы сводят ее к задаче коммивояжера, которую решают этим методом [1, 3, 11]. Но целевая функция в задаче КТ зависит от размещения без повторений, которое есть комбинацией сочетания без повторений и перестановки, а их множество состоит из подмножеств изоморфных комбинаторных конфигураций. Используя это свойство, покажем, что для данной задачи характерны признаки, благодаря которым она достаточно просто решается динамическим программированием. Процесс ее решения описывается ориентированным ациклическим графом (в литературе – сетевой график [2]), а частичные значения целевой функции, как видно из выражения (4), изменяются во времени и вычисляются по рекуррентным правилам. Докажем, что при вычислении частичной целевой функции для нее выполняется принцип Беллмана.

В ациклическом ориентированном графе, которым задается процесс решения задачи КТ, выделим вершины первого уровня, второго уровня и до n-го уровня. Каждая вершина первого уровня содержит один элемент $a_l \in A$, второго уровня – два элемента из множества A и т.д. Сформулируем такую теорему.

Теорема 3. Для задачи планирования из теории расписаний конвейерного типа, в которой каждая из заданных работ последовательно выполняется на определенных машинах, причем работы состоят из одной операции и каждая машина также выполняет одну операцию, справедлив принцип Беллмана.

Доказательство. Пусть задано множество A, где a_i-му элементу соответствует l-я работа и множество B, где b_s-му элементу соответствует s-я машина, на которой необходимо выполнить заданные работы. Из n элементов множества A выберем по два. Для каждой такой пары по частичной целевой функции (2) вычислим время простоя машин. Из вершины d второго уровня, которой в соответствие поставлено значение частичных целевых функций, для n пар элементов $a_l \in A$ выберем пару $a_s, a_l \in A$, для которой значение целевой функции (3) – наименьшее; $d = \overline{1, n}$. На следующем шаге выберем по три элемента из множества A таким образом: выберем два элемента тех пар, для которых в вершине 2-го уровня значение частичной целевой функции – наименьшее, и один элемент из $n-2$, оставшихся во множестве A. В каждой вершине третьего уровня по выражению (4) вычисляем значение частичных целевых функций для упорядоченных пар из трех элементов и выбираем для каждой из них ту последовательность элементов по три, для которых значение целевой функции (3) – наименьшее, т.е. на каждом шаге решается задача оптимизации небольшой размерности. Как видно из вычислений, следующие решения есть оптимальной стратегией, начиная с последнего частичного оптимального решения, и не зависят от предыдущих способов его нахождения, т.е. выполняется принцип Беллмана, что и доказывает теорему 3.

Следствие. В процессе вычисления частичной целевой функции проводится сравнение ее значения с заданным ограничением, поэтому динамическим программированием находится сочетание и перестановка в вершине d η-го уровня, для которых целевая функция принимает оптимальное значение.

Поскольку множество размещений без повторений состоит из подмножеств изоморфных комбинаторных конфигураций, то используя это свойство, оптимальное решение, согласно следствию, найдем на отдельных подмножествах, начиная из сочетания, количество элементов в которых равно единице. Далее приведем вычислительную схему решения этой задачи динамическим программированием. Размещение без повторений обозначим как $\mu' = (\mu'_1, ..., \mu'_n)$.

1. Зададим: $n \in N$, $\widetilde{n} \in N$, $\widetilde{\eta} = n$. Введем множества: $A = (1, 2, 3, ..., n)$, $B = (1, 2, 3, ..., \widetilde{n})$, $E = (e_1, ..., e_n)$; $\widetilde{f}^{(d)} = (\widetilde{f}_1^{(d)}, ..., \widetilde{f}_n^{(d)})$, $\widetilde{\varphi} = (\widetilde{\varphi}_1, ..., \widetilde{\varphi}_n)$, где $\widetilde{f}^{(d)}$ – множество значений частичной целевой функции в d-й вершине, $\widetilde{\varphi}_j$ – наименьшее значение частичной целевой функции в d-й вершине, e_r – подмножество, содержащее частичное решение (размещение μ'); $\widetilde{f}_j^{(d)} = 0$, $\widetilde{\varphi}_j = 0$ для $j = \overline{1, n}$; $\mu' = (\mu'_1, ..., \mu'_n)$ – размещение, $\eta = 2$, $\mu_j^{'k} = 0$ для $j = \overline{1, n}$, $t = 1$. Переход к п. 2.

2. Положим $l = 1$, $s = 2$, $j = 1$.

3. Если $s = l$, переходим к п. 4. Иначе для пары (a_l, a_s) из $\mu' = (\mu_1, ..., \mu_\eta)$ по выражению (4) вычисляем частичное значение целевой функции $\widetilde{F}$. Положим $\widetilde{f}_j^{(d)} = \widetilde{F}$, $j = j + 1$. Переход к п. 4.

4. Положим $s = s + 1$. Если $s \le n$, переходим к п. 3. Иначе – к п. 5.

5. Из множества $\widetilde{f}^{(d)}$ выберем наименьшее значение $\widetilde{f}_r^{(d)*}$, положим $\widetilde{\varphi}_t = \widetilde{f}_r^{(d)*}$, а μ', для которого значение $\widetilde{f}_r^{(d)*}$ – наименьшее, занесем в подмножество e_t, $r \in \{1, ..., n\}$, $t = t + 1$. Переходим к п. 6.

6. Положим $l = l + 1$, $s = 1$. Если $l \le n$, переходим к п. 3, иначе – к п. 7.

7. Из множества $\widetilde{\varphi}$ выберем наименьшее значение $\widetilde{\varphi}_r^*$. Если $\widetilde{\varphi}_r^* < T$ или $\eta \le n$, переходим к п. 8. Иначе полагаем $\mu' = e_r$, $\widetilde{\eta} = \widetilde{\eta} - \eta$, переходим к п. 9.

8. Положим $\eta = \eta + 1$, $t = t + 1$. Если $\eta > n$, переходим к п 7. Иначе – к п. 2.

9. В качестве решения задачи принимаем последовательность $\mu'^* = (\mu_1'^*, ..., \mu_\eta'^*)$, для которой частичное значение целевой функции – наименьшее. Переходим к п. 10.

10. Конец работы алгоритма.

Если $\tilde{\eta}=\tilde{\eta}-\eta$ больше нуля, то для оставшихся элементов из множества A проведем вычисления по описанной вычислительной схеме (пп. 1–10).

Пример задачи КТ и ее решение динамическим программированием

Приведем ту же задачу, что и при решении методом структурно-алфавитного поиска ($n=3$, $\tilde{n}=3$ $T=50$, $\tilde{\beta}(f(j),\mu^*,\omega^k)|_1^m$ = (2, 3, 1, 4, 5, 3, 6, 8, 4)). В табл. 1–6 представлены результаты решения приведенного примера полным перебором. Для $\mu^7=(\mu_1^7,\mu_2^7,\mu_3^7)$ целевая функция – глобальный минимум. Во всех таблицах представлено переменное значение целевой функции, определяющее простой машин. Постоянное значение $F_1(\mu^1)=36$.

Таблица 1

$F_2(\mu^7,\omega^1)=11$

	1	2	3
1	2	4	6
2	3	5	8
3	1	3	4

Таблица 2

$F_2(\mu^7,\omega^2)=13$

	2	1	3
1	4	2	6
2	5	3	8
3	3	1	4

Таблица 3

$F_2(\mu^7,\omega^3)=13$

	2	3	1
1	4	6	2
2	5	8	3
3	3	4	1

Таблица 4

$F_2(\mu^7,\omega^4)=8$

	3	2	1
1	6	4	2
2	8	5	3
3	4	3	1

Таблица 5

$F_2(\mu^7,\omega^5)=12$

	3	1	2
1	6	2	4
2	8	3	5
3	4	1	3

Таблица 6

$F_2(\mu^7,\omega^6)=15$

	1	3	2
1	2	6	4
2	3	8	5
3	1	4	3

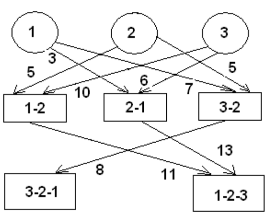

Схема решения приведенного примера задачи КТ динамическим программированием

Глобальное решение для заданного примера, найденное динамическим программированием – размещение без повторений, что совпадает с результатом полного перебора перестановок для $\mu^7=(\mu_1^7,\mu_2^7,\mu_3^7)$ (перестановка $\omega^4=(3,2,1)$). Значение целевой функции для него $F(\mu^7,\omega^4)=36+8=44$, не превышающее заданной величины $T=50$.

Заключение. Итак, аргументом целевой функции в рассмотренной задаче планирования из теории расписаний есть размещение без повторений. Эта комбинаторная конфигурация образуется выбиранием элементов из базового множества со следующим их упорядочением, т.е. ее можно рассматривать как комбинацию сочетания без повторений и перестановки, а целевая функция зависит от двух переменных и результат необходимо найти на двух множествах комбинаторных конфигураций. Оптимальное решение для подзадач, на которые разбивается основная задача, находится методом структурно-алфавитного поиска по функциям натурального аргумента, которыми моделируются входные данные. Учитывая характерные свойства задачи, поиск решения на множестве сочетаний проводится по двум функциям натурального аргумента, а на перестановках – по одной. При этом по определенным правилам моделируется матрица, по которой вычисляется значение целевой функции. Разработанные независимые алгоритмы решения задачи планирования из теории расписаний работают как встроенные процедуры в итерационном режиме, что характерно для гибридных алгоритмов.

К тому же процесс решения этой задачи описывается ориентированным ациклическим графом, а частичные значения целевой функции изменяются во времени, вычисляются по рекуррентным правилам и для нее выполняется принцип Беллмана. Благодаря оговоренным свойствам она несложно решается динамическим программированием без предыдущего ее сведения к задаче коммивояжера.

●