УДК 533.9

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ СВЯЗАННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ПОД ДЕЙСТВИЕМ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ФЛУКТУАЦИЙ

В.А.Буц, И.К.Ковальчук
ННЦ "Харьковский Физико-технический Институт"310108, ул. Академическая,1, Харьков, УкраинаE-mail kovalchuk_ik@kipt.kharkov.ua

Изучается система, состоящая из двух связанных осцилляторов, в которой частота одного из них является флуктуирующей величиной. При этом, как и в случае одного осциллятора с мультипликативным шумом, наблюдается неустойчивость вторых моментов. Однако, появляется новая возможность для увеличения инкремента флуктуационной неустойчивости, физическая природа которой обусловлена увеличением числа степеней свободы. Найдены условия при которых происходит такое увеличение. Рассмотрен пример конкретной физической системы, которую можно рассматривать как два связанных осциллятора. Таковой является цилиндрический резонатор, заполненный плазмой с флуктуирующей плотностью.

1. Введение

Осциллятор представляет собой модель системы, которая широко используется при исследовании различных колебательных процессов. Динамика отдельных линейных и нелинейных осцилляторов изучена достаточно подробно. Разработаны методы исследования динамики как отдельных осцилляторов, так и систем связанных осцилляторов, на которые действуют либо регулярные, либо случайные флуктуационные силы. Влияние аддитивных и мультипликативных случайных сил на динамику осциллятора изучено также достаточно подробно (см. например, [1]). Одним из важных результатов, который был получен при изучении влияния мультипликативных флуктуаций на линейные осцилляторы, является обнаруженная флуктуационная неустойчивость вторых моментов, которая возникает под влиянием случайных сил. Инкремент этой неустойчивости пропорционален интенсивности флуктуаций [2].

Анализ многих физических процессов может быть сведен к исследованию систем связанных осцилляторов. Причем последние могут быть как линейными так и нелинейными. Динамика таких систем также достаточно хорошо изучена. Исследованы также некоторые системы связанных осцилляторов, на которые действуют как аддитивные, так и мультипликативные возмущения [1–2]. Однако, многие важные системы связанных осцилляторов к настоящему времени остались не рассмотренными, это, в частности такие, частоты которых подвержены случайным возмущениям. К анализу таких систем, как мы увидим ниже, приводит исследование динамики многих колебательных систем с плазмой, плотность которой возмущена по случайному закону. В простейшем случае, исследование колебательных систем с плазмой сводится к анализу двух линейных связанных осцилляторов. Частота одного из них («плазменного») возмущена случайной силой, которая обусловлена случайным изменением плотности плазмы. Когда осцилляторы развязаны (коэффициент связи между ними равен нулю) динамика каждого из них в отдельности хорошо известна. Как указывалось выше, в этом случае величина вторых моментов для осциллятора с флуктуирующими параметрами экспоненциально нарастает. Известно, что в общем случае, при развитии неустойчивости, увеличение числа степеней свободы неустойчивой системы может вести к росту инкремента, т.е. система становится более нестабильной. Можно ожидать, что при наличии связи неустойчивого «плазменного» осциллятора с другими, которые в отсутствии такой связи не подвергались воздействию флуктуационных сил, приведет к увеличению инкремента флуктуационной неустойчивости. Возникает вопрос, как меняется динамика осциллятора с флуктуационной неустойчивостью при наличии его связи с другими осцилляторами. Ответу на этот вопрос посвящена данная работа.

Ниже мы рассмотрим, прежде всего раздел 2, динамику системы, состоящей из двух связанных линейных осцилляторов. Частота одного из них подвергается случайному возмущению, а частота второго не изменяется. Кроме того, имея в виду важные конкретные приложения, мы учтем наличие флуктуаций в коэффициенте связи, который учитывает влияние первого осциллятора на второй. Динамика первых и вторых моментов этой системы поддается полному аналитическому исследованию. Найдены условия, при которых наличие второго пассивного осциллятора приводит к существенному увеличению инкремента флуктуационной неустойчивости и условия, при которых такого увеличения не наблюдается. В третьем разделе рассмотрена конкретная, важная для приложений, система, представляющая собой цилиндрический резонатор с идеально проводящими стенками, заполненный плазмой с флуктуирующей плотностью, которая может рассматриваться как система двух связанных осцилляторов.

2. Система двух связанных осцилляторов

Рассмотрим динамику двух связанных осцилляторов, которые могут быть описаны следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} &\ddot{\xi}_1 + \xi_1 = -\mu\Omega^2\xi_2 - \alpha\mu\Delta\xi_2 \\ &\ddot{\xi}_2 + \left(\Omega^2 + \Delta\right)\xi_2 = -\mu\xi_1 , \end{aligned} \qquad (1)$$

где ξ_1, ξ_2 – обобщенные координаты, описывающие колебательный процесс, Ω – безразмерная частота второго осциллятора; μ – коэффициент связи $(0 \le \mu \le 1)$; коэффициент α $(0 \le \alpha \le 1)$ характеризует степень аддитивного влияния флуктуаций второго осциллятора на первый; дифференцирование производится по безразмерному времени τ, нормированному на период собственных колебаний первого осциллятора, частота которого в этом случае равна единице; функцию Δ будем считать гауссовским, дельта-коррелированным случайным процессом, который удовлетворяет условию:

$$\langle \Delta(\tau)\Delta(\tau') \rangle = N\delta(\tau - \tau') , \qquad (2)$$

где N – интенсивность флуктуаций, угловые скобки обозначают операцию усреднения.

Форма записи системы (1) выбрана для удобства сравнения ее с динамикой конкретной системы (см. раздел 3). Решение системы (1) в отсутствии флуктуаций хорошо известно. Известно также решение системы (1) в случае, когда $\mu = 0$, т.е. когда осцилляторы изолированы. Существует два подхода к исследованию системы (1). В первом используется уравнение типа Эйнштейна-Фоккера для плотности вероятности, во втором – получают уравнения для моментов. Если ограничиться рамками корреляционной теории, второй подход оказывается значительно более предпочтительным. Ниже мы будем пользоваться именно этим подходом, причем для получения уравнений для первых и вторых моментов будет использован подход, развитый Фуруцу и Новиковым, и, который описан, например в [2]. Из системы (1) с помощью этой формулы находим:

$$< \Delta(\tau)\xi_2(\tau) >= \frac{1}{2} N \left\langle \frac{\delta\xi_2(\tau)}{\delta\Delta(\tau)} \right\rangle , \qquad (3)$$

где $\left\langle \frac{\delta\xi_2(\tau)}{\delta\Delta(\tau)} \right\rangle$ – вариационная производная от $\xi_2(\tau)$ по $\Delta(\tau)$ в момент времени τ.

Используя (3), легко увидеть, что система уравнений для первых моментов совпадает с (1), если в ней отбросить члены с флуктуациями. Система (1) характеризуется десятью вторыми моментами, которые представляют собой средние значения всех возможных произведений обобщенных координат ξ_1, ξ_2 и их производных $\dot{\xi}_1$, $\dot{\xi}_2$. Система уравнений для них, после исключения некоторых из моментов, может быть приведена к следующему виду:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^3}{d\tau^3}\langle \xi_1^2 \rangle + 4\frac{d}{d\tau}\langle \xi_1^2 \rangle - \mu^2\left(2\Omega^4 \frac{d}{d\tau}\langle \xi_2^2 \rangle + \alpha^2 N \langle \xi_2^2 \rangle\right) - \\
&2\mu\Omega^2\left(\frac{d^2}{d\tau^2}\langle \dot{\xi}_1\xi_2 \rangle - 2\langle \dot{\xi}_1\xi_2 \rangle\right) + 2\mu\Omega^2 \frac{d}{d\tau}\langle \dot{\xi}_1\dot{\xi}_2 \rangle = 0 \\
&-2\mu^2 \frac{d}{d\tau}\langle \xi_1^2 \rangle + \frac{d^3}{d\tau^3}\langle \xi_2^2 \rangle + 4\Omega^2\left(1-\mu^2\right)\frac{d}{d\tau}\langle \xi_2^2 \rangle - \\
&- N\left(1-2\alpha\mu^2\right)\langle \xi_2^2 \rangle - 2\mu\left(\frac{d^2}{d\tau^2}\langle \dot{\xi}_1\xi_2 \rangle + 2\Omega^2\langle \dot{\xi}_1\xi_2 \rangle\right) \\
&-2\mu\langle \dot{\dot{\xi}}_1\dot{\xi}_2 \rangle = 0 \\
&-\frac{\mu}{2}\frac{d}{d\tau}\langle \xi_1^2 \rangle + \frac{\mu}{2}\left(\Omega^2 \frac{d}{d\tau}\langle \xi_2^2 \rangle + \alpha N \langle \xi_2^2 \rangle\right) + \\
&\frac{d^2}{d\tau^2}\langle \dot{\xi}_1\xi_2 \rangle + \left(1-\Omega^2\right)\langle \dot{\xi}_1\xi_2 \rangle - 2\frac{d}{d\tau}\langle \dot{\xi}_1\dot{\xi}_2 \rangle = 0 \\
&\mu\left(\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\tau^2}\langle \xi_1^2 \rangle - \langle \xi_1^2 \rangle\right) + \\
&+\mu\left(\frac{1}{2}\Omega^2 \frac{d^2}{d\tau^2}\langle \xi_2^2 \rangle + \Omega^4\langle \xi_2^2 \rangle - \frac{\alpha}{2} N \frac{d}{d\tau}\langle \xi_2^2 \rangle\right) + \\
&+2\Omega^2 \frac{d}{d\tau}\langle \dot{\xi}_1\xi_2 \rangle + \frac{d^2}{d\tau^2}\langle \dot{\xi}_1\dot{\xi}_2 \rangle + \left(1-\Omega^2\right)\langle \dot{\xi}_1\dot{\xi}_2 \rangle = 0 .
\end{aligned} \qquad (4)$$

Если решение системы (4) искать в виде $\approx \exp(\lambda\tau)$, то для определения собственных чисел λ можно получить характеристическое уравнение. В отсутствии связи между осцилляторами $(\mu = 0)$ характеристические уравнения для второго осциллятора имеет вид:

$$\lambda^3 + 4\Omega^2\lambda - N = 0 . \qquad (5)$$

В отсутствии флуктуаций (5) имеет следующие корни $\lambda_1 = 0,\ \lambda_{2,3} = \pm 2i\Omega$. Полагая флуктуации малыми ($N \ll 1$), можно получить выражения для поправок к этим корням, которые обусловлены мультипликативным шумом. Одна из них, поправка к первому (нулевому) корню положительна и равна $\delta_1 = N/\left(4\Omega^2\right)$. Наличие такой поправки соответствует неустойчивому, нарастающему во времени решению с инкрементом равным этой поправке. Этот результат соответствует известному и описывает флуктуационную неустойчивость изолированного осциллятора с мультипликативным случайным возмущением.

Характеристическое уравнение после громоздких, но простых преобразований может быть приведено к виду:

$$\lambda^2\left(\lambda^2+4\right)\left(\lambda^2+4\Omega^2\right)\left[\lambda^4+2\left(1+\Omega^2\right)\lambda^2+\left(1-\Omega^2\right)\right]-$$
$$4\mu^2\Omega^2\lambda^2\left[3\lambda^4+4\left(1+\Omega^2\right)\lambda^2+4\left(1-6\Omega^2+\Omega^4\right)\right]$$
$$-64\mu^2\Omega^4\lambda^2=$$
$$=N\lambda\left\{\left(\lambda^2+4\right)\left[\lambda^4+2\left(1+\Omega^2\right)\lambda^2+\left(1-\Omega^2\right)\right]+\right.$$
$$\left.+2\mu^2\Omega^2\left(3\lambda^2-6+2\Omega^2\right)\right\}+$$
$$+N\lambda\left\{2\alpha^2\mu^4\left[5\lambda^2+2\left(1+\Omega^2\right)\right]-\right.$$
$$\left.-2\alpha\mu^2\left(\lambda^2+4\right)\left[2\lambda^2+\left(1-\Omega^2\right)\right]-16\mu^4\Omega^2\right\}.$$
(6)

Это алгебраическое уравнение десятой степени относительно собственных чисел λ. Его правая часть содержит только слагаемые, обусловленные наличием флуктуаций. Мы будем считать их малыми ($N \ll 1$). Левая часть уравнения (6) может быть представлена в виде произведения $\prod_{k=1}^{10}\left(\lambda-\lambda_k^{(2)}\right)$, где $\lambda_k^{(2)}$ - корни уравнения (7) в случае отсутствия флуктуации ($N=0$). Значения этих корней могут быть легко найдены с учетом их связи с собственными частотами системы (1) в отсутствии шума. В этом случае характеристическое уравнение для системы (1) имеет вид:

$$\lambda^4+\left(1+\Omega^2\right)\lambda^2+\Omega^2\left(1-\mu^2\right)=0\,, \qquad (7)$$

а его решения:

$$\lambda_{1,2}^{(0)}=\pm\frac{i}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\Omega^2-\sqrt{\left(1-\Omega^2\right)^2+4\mu^2\Omega^2}}$$
$$\lambda_{3,4}^{(0)}=\pm\frac{i}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\Omega^2+\sqrt{\left(1-\Omega^2\right)^2+4\mu^2\Omega^2}}\,, \qquad (8)$$

Выражения (8) без мнимой единицы представляют собой собственные частоты системы, описываемой уравнениями (1), которая состоит из двух связанных осцилляторов. Поскольку вторые моменты, как это было отмечено в начале раздела, образуются путем усреднения всех возможных произведений величин $\xi_1,\dot{\xi}_1,\xi_2,\dot{\xi}_2$, корни уравнения (6) в отсутствии флуктуаций представляют собой комбинацию всех возможных сумм $\lambda_k^{(0)}$ и имеют вид:

$$\lambda_{1,2}^{(2)}=\pm\sqrt{2}i\sqrt{1+\Omega^2-\sqrt{\left(1-\Omega^2\right)^2+4\mu^2\Omega^2}}$$
$$\lambda_{3,4}^{(2)}=\pm\sqrt{2}i\sqrt{1+\Omega^2+\sqrt{\left(1-\Omega^2\right)^2+4\mu^2\Omega^2}}$$
$$\lambda_{5,6}^{(2)}=0$$
$$\lambda_{7,8}^{(2)}=\pm\frac{i}{\sqrt{2}}\left\{\sqrt{1+\Omega^2-\sqrt{\left(1-\Omega^2\right)^2+4\mu^2\Omega^2}}+\sqrt{1+\Omega^2+\sqrt{\left(1-\Omega^2\right)^2+4\mu^2\Omega^2}}\right\}$$
$$\lambda_{9,10}^{(2)}=\pm\frac{i}{\sqrt{2}}\left\{\sqrt{1+\Omega^2-\sqrt{\left(1-\Omega^2\right)^2+4\mu^2\Omega^2}}-\sqrt{1+\Omega^2+\sqrt{\left(1-\Omega^2\right)^2+4\mu^2\Omega^2}}\right\}$$
(9)

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что выражение $\prod_{k=1}^{10}\left(\lambda-\lambda_k^{(2)}\right)$ действительно представляет собой левую часть уравнения (6). Определив значения корней левой части уравнения (6), можно найти добавки к этим корням, обусловленные правой частью уравнения (6) (флуктуациями). Для этого решения (6) будем искать в виде $\lambda_k=\lambda_k^{(2)}+\delta_k$, где δ_k – добавки, обусловленные флуктуациями и которые мы будем находить методом возмущений. При этом, прежде всего, следует различать случаи вырождения и невырожденные случаи. В отсутствии вырождения добавки к корням δ_k пропорциональны интенсивности флуктуаций и в том случае, когда их действительные части положительны, это соответствует развитию флуктуационной неустойчивости. Однако, инкремент при этом не превышает инкремента изолированного осциллятора. При некоторых значениях параметров системы (6) может иметь кратные корни. Если кратность вырождения равна двум, то инкремент неустойчивости существенно возрастает и оказывается пропорциональным корню квадратному из интенсивности флуктуаций ($\sqrt{N}$). В случае трехкратного вырождения инкремент становится еще большим и пропорционален $\sqrt[3]{N}$.

В общем случае при n-кратном вырождении инкремент оказывается пропорциональным корню n-ой степени из интенсивности флуктуаций, т.е. быстро растет с ростом степени вырождения. Аналитическое исследование характеристического уравнения (6) в общем случае очень громоздко. Поэтому ниже мы ограничимся частными, существенными для приложений, случаями, а именно, когда выполняются следующие соотношения: $\Omega^2 \ll 1,\ \Omega^2=1,\ \Omega^2 \gg 1$.

При $\Omega^2 \ll 1$ имеем трехкратно вырожденный корень $\lambda^{(2)}=0$ с $\delta=\sqrt[3]{\left(1-\alpha^2\right)N}$. Кроме корня $\lambda^{(2)}=0$ уравнение (6) имеет два двукратно вырожденных корня. Первый $\lambda^{(2)} = i$ ($\mu = 1$) с инкрементом $\delta = \sqrt{\alpha(\alpha-1)N/2}\cos(\pi/4)$ и второй $\lambda^{(2)} = -i$ ($\mu = 1$) с таким же инкрементом.

При $\Omega = 1$ существует один трехкратно вырожденный корень $\lambda^{(2)} = 0$ ($\mu = 1$) с инкрементом $\delta = \sqrt[3]{(1-\alpha)^2 N}$.

При $\Omega >> 1$ трехкратно вырожденный корень $\lambda^{(2)} = 0$ ($\mu = 1$) имеет инкремент $\delta = \sqrt[3]{(1-\alpha)^2 N/\Omega}$ (11) и два двукратно вырожденных $\lambda^{(2)} = i\Omega$ и $\lambda^{(2)} = -i\Omega$ с инкрементом $\delta = \sqrt{(1-\alpha)N/2\Omega^3}$.

Как видно из полученных формул для инкрементов, все они обращаются в нуль, если параметр связи $\alpha = 1$ равен единице. В этом случае увеличение инкремента не происходит, он оказывается пропорциональным первой степени N и по порядку величины совпадает с инкрементом изолированного осциллятора. Отсутствие роста инкремента системы двух связанных осцилляторов по сравнению с одним для случая, когда $\alpha = 1$ формально объясняется тем, что в этом случае полином правой части характеристического уравнения (6) имеет те же корни, что и полином в левой части.

Таким образом, в общем случае инкремент флуктуационной неустойчивости системы двух связанных осцилляторов может быть значительно выше инкремента изолированного, и неустойчивость при этом развивается значительно быстрее. Исключением является случай, когда параметр $\alpha = 1$. Как будет видно ниже на конкретном примере, это может, в частности, соответствовать случаю, когда флуктуирует тот параметр одного из осцилляторов, который одновременно является элементом связи между осцилляторами.

3. Цилиндрический резонатор, заполненный плазмой

Выше изложенные соображения и выводы, можно применить к конкретной физической системе, представляющей собой цилиндрический резонатор с идеально проводящими торцами и боковой поверхностью, заполненный плазмой, плотность которой флуктуирует. Будем предполагать, что резонатор помещен в бесконечное однородное магнитное поле, параллельное оси резонатора. Это позволяет рассматривать движение электронов плазмы как одномерное. Электромагнитное поле в резонаторе описывается уравнениями Максвелла, а электроны плазмы уравнениями гидродинамики. Электромагнитные колебания будем считать аксиально-симметричными E-типа с компонентами электрического поля E_z, E_r и магнитного H_φ. Для того, чтобы тангенциальные компоненты электрического поля обращались в нуль на внутренней поверхности резонатора, зависимость всех переменных в цилиндрической системе координат выберем в следующем виде:

$$E_z = \sum_{n,m} E_{znm}(t) J_0(\kappa_m r)\cos k_n z\,,$$

$$E_r = \sum_{n,m} E_{rnm}(t) J_1(\kappa_m r)\sin k_n z\,,$$

$$H_\varphi = \sum_{n,m} H_{\varphi nm}(t) J_1(\kappa_m r)\cos k_n z\,,$$

$$v = \sum_{n,m} v_{nm}(t) J_0(\kappa_m r)\cos k_n z\,,$$

где – $k_n = \pi n/L$, $\kappa_m = \mu_m^{(0)}/R$, L и R – длина и радиус резонатора соответственно, $J_0(x)$ и $J_1(x)$ – функции Бесселя нулевого и первого порядков, $\mu_m^{(0)}$ – m-ый корень функции Бесселя нулевого порядка.

Подставив эти выражения в уравнения Максвелла для поля и гидродинамические уравнения, получим следующую систему:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 H_\varphi}{d\tau^2} + H_\varphi = -\mu\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}\zeta \\ &\frac{d^2\zeta}{d\tau^2} + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}\zeta = -\mu H_\varphi\,, \end{aligned} \qquad (10)$$

где $\zeta = m\kappa_m c v/e$, $\mu = \omega_\perp/\omega_0$, $\omega_\perp = \kappa_m c$, $\omega_p^2 = 4\pi e^2 n_0/m$ – плазменная частота, $\omega_0^2 = k_n^2 c^2 + \kappa_m^2 c^2$ – частота собственных колебаний пустого резонатора, n_0 – плотность плазмы, m, e – масса и заряд электрона, $\tau = t\omega_0$ – безразмерное время, которое нормировано на период собственных колебаний резонатора.

Будем предполагать, что плотность плазмы является случайной величиной, такой, что $\omega_p^2 = \overline{\omega}_p^2 + \Delta\omega_p^2$, где $\overline{\omega}_p^2$ – среднее значение квадрата плазменной частоты, $\Delta\omega_p^2$ – случайная добавка, обусловленная флуктуациями плотности плазмы. Если это выражение подставить в (10), получим систему идентичную (1). В этом случае H_φ соответствует ξ_1, ζ – ξ_2, ω_p^2/ω_0^2 соответствует Ω^2, а $\Delta\omega_p^2/\omega_0^2$ – Δ. Т.е собственные колебания пустого резонатора можно интерпретировать как первый осциллятор в системе (1), а плазменные колебания соответствуют второму осциллятору, у которого флуктуирует частота. Эти флуктуации являются мультипликативными. С другой стороны они входят в правую часть первого уравнения системы (10), и, тем самым оказывают аддитивное воздействие на первый осциллятор. Т.е правая часть первого уравнения (10) идентична правой части первого уравнения (1). Параметр α, который характеризует аддитивное влияние флуктуаций первого осциллятора на второй в данном случае равен единице. Как отмечалось ранее в первом разделе, в этом случае увеличение инкремента не происходит, т.е. он остается пропорционален уровню флуктуаций.

Таким образом, резонатор заполненный плазмой с флуктуирующей плотностью представляет собой пример системы, состоящей из двух связанных осцилляторов с мультипликативным шумом в одном из них. И, хотя, в принципе в этом случае могло бы наблюдаться увеличение инкремента, однако, в данном конкретном случае это не происходит.

4. Заключение

Как следует из вышеизложенного, в системе, состоящей из нескольких связанных осцилляторов (в данном случае из двух) может возникнуть ситуация, приводящая к существенному увеличению флуктуационной неустойчивости, обусловленной мультипликативным шумом хотя бы в одном из них. Это происходит при некоторых значениях параметров системы, когда характеристическое уравнение для вторых моментов имеет кратные корни в отсутствие флуктуаций. Как показано в первом разделе, инкремент такой неустойчивости, если она существует, оказывается пропорциональным корню степени кратности соответствующего характеристического числа из уровня флуктуаций. Во втором разделе отмечено, и, как это видно из приведенного в третьем разделе примера, существуют такие значения параметров, при которых увеличение инкремента не наблюдается. Это может быть в том случае, если полиномы в обеих частях уравнения (6) содержат одинаковые корни. При этом инкремент неустойчивости не возрастает.

Можно ожидать, что в более сложных системах, состоящих из большего числа осцилляторов (трех и более) вторые моменты могут нарастать еще быстрее. Наши предварительные оценки подтверждают такую возможность. Так характеристическое уравнение для вторых моментов имеет вид, аналогичный (6), где полином в правой части пропорционален уровню мультипликативного шума. Корни полинома в левой части по аналогии с тем, как это было в первом разделе, можно получить из собственных частот исходной системы. Можно указать критерии, когда существуют кратные корни полинома, стоящего в левой части характеристического уравнения, и определить значения параметров при которых они существуют. При этом, чем больше осцилляторов содержит система (т.е. чем больше у нее степеней свободы), и чем большее число параметров используется для ее описания, тем больше имеется возможностей для существования корней большой кратности в левой части характеристического уравнения. Это приводит к сильной нестабильности, которая обусловлена мультипликативными флуктуациями в системе, состоящей из большого числа связанных осцилляторов. Однако при некоторых значениях параметров увеличение инкремента может не реализоваться или быть слишком ослабленным, в этом случае полином в правой части содержит такие же корни, как и полином в левой.

Список литературы

1. М.Ф.Диментберг. Случайные процессы в динамических системах с переменными параметрами.–М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. 176 с.

2. В.И.Кляцкин. Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами.–М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1975. 240 с.