УДК 621.373.826

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ УСИЛЕНИЕ РЕНТГЕНОВСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В КРИСТАЛЛАХ

В.А.Буц

Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт», 61108, Харьков, Украина

Рассматривается возможность параметрического усиления рентгеновского излучения в кристаллах. Усиление осуществляется путем создания периодической пространственно-временной неоднородности кристалла. Период этой неоднородности по порядку величины равен длине экстинкции. Найден пространственный инкремент усиления рентгеновского излучения. Показано, что неоднородность кристалла с необходимыми для усиления параметрами может быть создана лазерным излучением.

Трудности генерирования и усиления когерентного рентгеновского излучения обусловлены чрезвычайно высокой частотой этого излучения. Действительно, при реализации традиционных лазерных схем необходимо преодолеть трудность, связанную с тем, что мощность источника накачки (P), необходимая для создания инверсной населенности, быстро растет с уменьшением длины генерированного излучения ($P \sim \lambda^{-3}$) (см., например, [1,2]). Кроме того, в рентгеновском диапазоне отсутствуют резонаторы, что приводит к необходимости осуществлять однопроходные лазерные схемы. Минимальная длина волны, которая может быть возбуждена в результате индуцированных процессов излучения в приборах типа ЛСЭ, может быть оценена выражением $\lambda_{\min} \sim \sqrt{1/nD}$, где n - плотность осцилляторов; D - период ондулятора [3] . Как видно из этой оценки, даже использование ускорителей следующего поколения не позволяет индуцировано возбудить колебание в рентгеновском диапазоне. Поэтому любые альтернативные подходы к возможности усиления и генерирования рентгеновского излучения представляют значительный интерес.

В настоящей работе мы покажем, что рентгеновское излучение, которое распространяется в кристалле, может быть усилено путем периодического пространственно-временного изменения параметров кристалла. Характерный пространственный период этих изменений (L) значительно больше длины рентгеновского излучения (L>> λ) и по порядку величины равен длине экстинкции рентгеновского излучения при его распространении в идеальном кристалле.

Основную идею предлагаемого механизма параметрического усиления можно пояснить на следующем простом примере. Рассмотрим систему, состоящую из двух связанных одинаковых линейных осцилляторов. Динамика такой системы описывается следующей системой уравнений

$$\ddot{x}_1 + x_1 = \mu_1(t) \cdot x_2 \qquad (1)$$
$$\ddot{x}_2 + x_2 = \mu_2(t) \cdot x_1 .$$

При малых коэффициентах связи ($\mu_i << 1$) для определения медленно меняющихся амплитуд $a_i(t)$ колебаний маятника, для решения $x_i = a_i(t) \cdot \exp(it)$ получим следующую систему укороченных уравнений:

$$\dot{a}_1 = \frac{1}{2i}\mu_1 \cdot a_2 , \qquad (2)$$
$$\dot{a}_2 = \frac{1}{2i}\mu_2 \cdot a_1 .$$

Пусть коэффициенты связи имеют вид $\mu_i = \alpha_i + \beta_i \cdot \cos(\gamma \cdot t)$, где α_i, β_i - постоянные. Если $\beta_i = 0$, то возникает периодическая модуляция амплитуд a_i с частотой $\Omega = \sqrt{\alpha_1 \cdot \alpha_2} / 2$, т.е. энергия одного маятника перекачивается в энергию другого и обратно. При $\beta_i \neq 0$ система уравнений (2) эквивалентна уравнению Хилла. При этом возможен рост амплитуды взаимодействующих осцилляторов. Отметим, что из системы (2), в частности, следует

$$d\left(a_1^2\right) = \frac{\mu_1}{\mu_2} d\left(a_2^2\right) . \qquad (3)$$

Из (3) следует, что если $\left(\mu_1/\mu_2\right) = const$, то система (2) имеет интеграл

$$a_1^2 - \left(\mu_1/\mu_2\right) a_2^2 = const \qquad (4)$$

При выполнении (4) система (2) имеет решение в элементарных функциях. Усиление при этом отсутствует. Из (3) также следует, что в первом приближении по параметру β_i/α_i существует интеграл (4), если $\beta_1/\alpha_1 \to \beta_2/\alpha_2$. Чем больше различие в величинах β_1/α_1 и β_2/α_2 , тем большим будет инкремент параметрического усиления. Пусть для определенности $\beta_1/\alpha_1 >> \beta_2/\alpha_2$ и выполнено условие параметрического резонанса: $\gamma = 2\Omega$. Тогда, воспользовавшись теорией возмущения, найдем, что амплитуды связанных осцилляторов экспоненциально увеличиваются

$$a_1 \sim a_2 \sim \exp(\Phi t), \qquad (5)$$

где $\Phi = \left(\beta_1 / 2 \cdot \alpha_1\right)$.

Для иллюстрации сказанного на рис. 1-2 представлены результаты численного расчета системы уравнений (1). На рис.1 представлен случай, когда система (1) имеет интеграл (4) и полностью интегрируется. На рис.2 - случай, когда интеграл (4) отсутствует. Видно, что в этом случае имеется экспоненциальный рост амплитуд колебаний взаимодействующих осцилляторов. На этих рисунках $Z^{<1>} \equiv \dot{x}_1$.

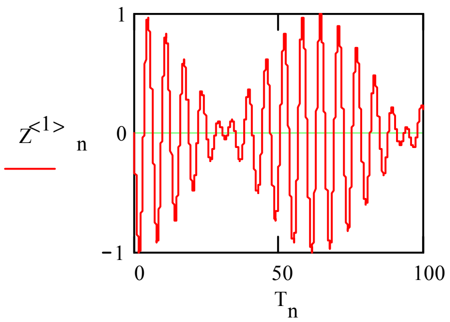

Рис. 1. $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.1, \quad \beta_1 = \beta_2 = 0.01, \quad \gamma = 0.1$

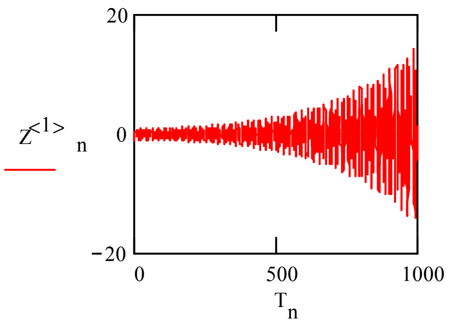

Рис. 2. $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.3, \quad \beta_1 = 0.03, \quad \beta_2 = 0.001, \quad \gamma = 0.3$

Поясним теперь механизм усиления рентгеновского излучения в кристаллах. При распространении излучения в однородном, идеальном, без затухания кристалле структура поля меняется. Можно выделить две наиболее важные стороны этих изменений. Прежде всего, появляется серия виртуальных волн с волновыми векторами $\vec{k}_n = \vec{k}_0 + n\vec{\kappa}$, где $\vec{k}_0$ - волновой вектор первичной волны, $\vec{\kappa}$ - вектор обратной решетки. Амплитуды виртуальных волн малы $E_n \sim q^n \cdot E_0$, где $q -$ степень периодической неоднородности кристалла. С той из виртуальных волн, фазовая скорость которой меньше скорости света, возможно взаимодействие заряженных частиц. На этой особенности поля в кристалле основано параметрическое черенковское излучение [4], или, как его часто называют, параметрическое рентгеновское излучение (см., например, [5,6]). Вторая особенность связана с динамической дифракцией рентгеновского излучения в идеальных кристаллах, и которая приводит в схеме дифракции Лауэ к периодической модуляции амплитуд, взаимодействующих в кристалле первичной волны с волновым вектором $\vec{k}_0$ и ее минус первым порядком дифракции с волновым вектором $\vec{k}_1 = \vec{k}_0 - \vec{\kappa}$ ($|k_1|^2 = |k_0|^2$). Модуляция амплитуды поля в идеальном кристалле для полностью когерентного излучения является полной. Пространственный период модуляции (длина экстинкции) по порядку величины равна $L_{ext} \sim \lambda / q$. Таким образом, при распространении в кристалле рентгеновское излучение приобретает некоторую новую пространственную характеристику. Такая особенность излучения в периодически неоднородных средах, в частности, в кристаллах, была использована в работе [7] для осуществления квазичеренковского взаимодействия заряженных частиц с полем. Кроме того, можно ожидать, что если свойства кристалла будут периодически меняться с неким характерным пространственным периодом, близким к периоду изменения рентгеновского излучения (L_{ext}), то эти изменения могут существенно изменить свойства излучения, в частности, привести к параметрическому усилению этого излучения. Ниже мы покажем, что действительно такая возможность имеется. Необходимая для усиления излучения длинноволновая периодическая неоднородность в кристалле может быть создана, например, с помощью лазерного излучения. Таким образом, в кристалле рентгеновское и лазерное излучение могут эффективно взаимодействовать.

Пусть кристалл занимает нижнее полупространство z>0 и может быть описан следующей восприимчивостью:

$$\chi = \chi_0 + q\cos(\vec{\kappa} \cdot \vec{r}) + q_1 \cos(\mathrm{K} \cdot z - \Omega t). \quad (6)$$

Здесь $\vec{\kappa}$ - вектор обратной решетки кристалла; $q \sim \chi_0 >> q_1$ - степень пространственно-временной периодической неоднородности, созданной внешним источником; $\mathrm{K} << |\kappa|$.

Ограничимся рамками двухволновой динамической теории дифракции. Тогда поле в кристалле можно искать в виде

$$\vec{E} = \sum_{j=0}^{1} A_j(\vec{r}, t) \cdot \exp(-i\vec{k}_j \vec{r} + i\omega t) \;, \quad (7)$$

где $\vec{k}_1 = \vec{k}_0 + \vec{\kappa}; \quad k_1^2 = k_0^2 = \omega^2 / c^2$.

Будем считать, что радиус падающего на кристалл первичного пучка излучения бесконечен и $\Omega << \omega$. Тогда изменения амплитуд взаимодействующих волн зависят только от времени и от z. Из уравнений Максвелла легко получить укороченные уравнения, описывающие динамику изменения этих амплитуд. В безразмерных переменных

$\tau = \Omega t; z = k_0 z = \omega z/c$ эти уравнения можно записать в виде

$$\begin{aligned}\alpha_0 \frac{\partial A_0}{\partial z} + \mu \frac{\partial A_0}{\partial \tau} &= \frac{1}{2i}(Q \cdot A_0 + \frac{q}{2} A_1),\\ \alpha_1 \frac{\partial A_1}{\partial z} + \mu \frac{\partial A_1}{\partial \tau} &= \frac{1}{2i}[(Q + 2\delta) A_1 + \frac{q}{2} A_0],\end{aligned} \qquad (8)$$

где $\mu \equiv \dfrac{\Omega}{\omega} \sim q; \quad Q \equiv \chi_0 + q_1 \cdot \cos(\mathrm{K}z - \tau)$,

$\alpha_i \equiv \dfrac{k_{iz}}{k_0} = \cos\theta_i$, $k_0^2 - k_1^2 = 2\delta \cdot k_0^2$.

Если в системе уравнений (8) положить $\mu = q_1 = 0$, то эта система переходит в известную, которая имеет маятниковые решения. Решения системы (8) при $\mu \neq 0, q_1 \neq 0$ будем искать в виде

$$A_j = \sum a_{j,n} \exp(in\tau); \qquad j = (0;1) \qquad (9)$$

Тогда для нахождения компонент Фурье $a_{j,n}$ можно получить следующую систему уравнений второго порядка:

$$v_n^{//} + \lambda_n^2 \cdot v_n = q_1.F \qquad (10)$$

Здесь $a_{o,n} = v_n \exp(-iR_n z/2); v_n^{/} = dv_n/dz$;

$\lambda_n^2 \equiv (B_n + \frac{1}{4} R_n^2)$;

$$F \equiv \frac{1}{2}\{ [C_n^+ - iD\frac{1}{2} \cdot R_{n+1}] v_{n+1} \cdot$$
$$\cdot \exp(i\mathrm{K} \cdot z - iR_{n+1} / 2) +$$
$$+ \left[C_n^- - \frac{1}{2} DR_{n-1}\right] v_{n-1} \exp(-i\mathrm{K} \cdot z - iR_{n-1} \cdot z / 2) \cdot$$
$$\cdot \exp(iR_n z / 2);$$

$$R_n \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\chi_0}{\alpha_0} + \frac{\chi_0 + 2\delta}{\alpha_1}\right) + n\mu\left(\frac{1}{\alpha_0} + \frac{1}{\alpha_1}\right) \quad ;$$

$$D \equiv -\frac{i}{2\alpha_1}\left(1 + \frac{1}{\alpha_0}\right);$$

$$B_n = \frac{1}{4\alpha_0\alpha_1}\left[\begin{array}{l}\left(\dfrac{q^2}{n} - \chi_0\left(\chi_0 + \delta\right)\right) - \\ -2n\mu\left(\chi_0 + 2n\mu + \left(\chi_0 + 2\delta\right)\right)\end{array}\right];$$

$$C_n^\tau = \pm \frac{\mathrm{K}}{2\alpha_0^2} + \frac{n\mu}{2\alpha_0^2\alpha_1} + \frac{\left(\chi_0 + 2\delta\right)}{4\alpha_0^2\alpha_1} +$$
$$+ \frac{1}{2\alpha_1}\left(\frac{\chi_0}{2\alpha_0} + \frac{(n \pm 1)\mu}{\alpha_0}\right).$$

Амплитуды Фурье $a_{1,n}$ определяются через $a_{0,n}$ выражениями:

$$a_{1,n} = \frac{4 \cdot i}{q}\left\{\begin{array}{l}\alpha_0 \dfrac{\partial a_{0,n}}{\partial z} + in\mu a_{0,n} - \dfrac{\chi_0 \cdot a_{0,n}}{2i} \\ -\dfrac{q_1}{4i}\left[\begin{array}{l}a_{0,n+1} \exp(i\mathrm{K} \cdot z) + \\ + a_{0,n-1} \exp(-i\mathrm{K} \cdot z)\end{array}\right]\end{array}\right\}. \qquad (11)$$

Учитывая, что $\lambda_n \sim q \sim \chi_0 >> q_1$, решение системы (10) будем искать в виде

$$v_n = w_n(z) \exp(i\lambda_n z) + \varsigma_n(z) \exp(-i\lambda_n z), \qquad (12)$$

где w_n, ς_n - медленно меняющиеся функции, изменения которых обусловлены наличием пространственно-временной модуляцией восприимчивости кристалла.

Особенно сильное изменение функций будет происходить при таких параметрах системы, когда будет выполнено одно из следующих резонансных условий

$$\mathrm{K} - (\lambda_{n+1} + \lambda_n) - \frac{1}{2}\left(R_{n+1} - R_n\right) = 0. \qquad (13)$$

Если, например, условие (13) выполнено при $n = 0$, эффективно связанными оказываются функции w_0 и ς_1 , а для отыскания w_0 получим следующее уравнение:

$$w_0^{//} - \Gamma^2 w_0 = 0, \qquad (14)$$

где

$$\Gamma^2 = \frac{q_1^2}{16\lambda_0\lambda_1}\left\{\left[C_0^+ - \frac{1}{2} D \cdot R_1\right]\left[C_0^- - \frac{i}{2} DR_0\right]\right\}.$$

Если выполнено условие $\mathrm{Re}\,\Gamma \neq 0$, то функции w_0, ς_1, а вместе с ними $a_{0,0}; a_{0,1}$ и амплитуды A_0, A_1 будут экспоненциально нарастать с ростом координаты z. Инкремент пространственного усиления пропорционален степени неоднородности q_1, и в общем случае выражение для него громоздкое. Его вычисление следует проводить для конкретных значений параметров.

Чтобы получить представление о различных возможностях и о характерных величинах, рассмотрим наиболее простой частный случай. Пусть $\chi_0 = \delta = 0$ и $\alpha_0 = \alpha_1 \equiv \alpha$, т.е. имеем симметричную схему дифракции Лауэ. Учтем также резонансное условие (13): $K = \left(\lambda_0 + \lambda_1\right) + \mu / \alpha$. В этом случае находим

$$\Gamma = \frac{q_1}{8\alpha \sqrt{\lambda_0 \cdot \lambda_1}}\left[\left(\lambda_0 - \lambda_1\right) - \frac{\mu}{\alpha}\right]. \qquad (15)$$

Мы видим, что происходит экспоненциальное усиление амплитуд как первичного рентгеновского излучения, так и минус первого порядка дифракции. С учетом условий на границе ($A_1(z = 0) = 0$) решения для w_0, ς_1 можно записать в виде

$w_0 = \exp(\Gamma z)$,

$$\varsigma_1 = i \cdot \sqrt{\lambda_0 / \lambda_1} \cdot \left(\exp(\Gamma z) - 1\right). \qquad (16)$$

Используя (15), можно получить формулы, описывающие эволюцию амплитуды первичного пучка при его распространении в кристалле. Если его амплитуда на поверхности кристалла нормирована на единицу $(A_0(z = 0) = 1)$, то это выражение приобретает вид

$$\begin{aligned} A_0 &= \exp\left[i\left(\lambda_0\right)z\right] \cdot \exp(\Gamma z) + \\ &+ i \cdot \sqrt{\lambda_0 / \lambda_1} \cdot \exp\left[-i\left(\lambda_1 + R_1/2\right)z\right] \cdot \\ &\cdot \left(\exp(\Gamma z) - 1\right) \cdot \exp(i\tau) \end{aligned} \qquad (17)$$

Таким образом, на расстоянии, составляющем несколько длин экстинкции, интенсивность первичного пучка может существенно увеличиться. Особый интерес представляет возможность усиления нулевых колебаний вакуума. В этом случае на выходе из кристалла интенсивность рентгеновского излучения будет равна

$$I = I_0 \cdot \left(\exp(2\Gamma L) - 1\right), \qquad (18)$$

где $L-$ толщина кристалла; I_0-спектральная плотность вакуумных флуктуаций.

Минус единица в скобках обусловлена тем фактом, что из-за ненаблюдаемости нулевых колебаний, которые играют роль фонового начала отсчета и которые присутствуют как на входной грани кристалла, так и на выходной, их интенсивность на выходе кристалла нужно вычесть. Так как величина I_0 чрезвычайно велика, то даже при $\Gamma L << 1$ интенсивность рентгеновского излучения на выходе из кристалла может быть большой.

Возникает вопрос о способах создания пространственно-временного периодического возмущения с нужными для усиления параметрами. Проще всего, по-видимому, такая неоднородность может быть создана с помощью двух лазерных пучков по схеме, аналогичной схеме «beat-wave». В настоящее время для возбуждения продольных ленгмюровских волн в плазме эта схема хорошо изучена не только теоретически , но и в экспериментах (см., например, [8-11]). В этой схеме (см. рис.3) параметры Ω и K

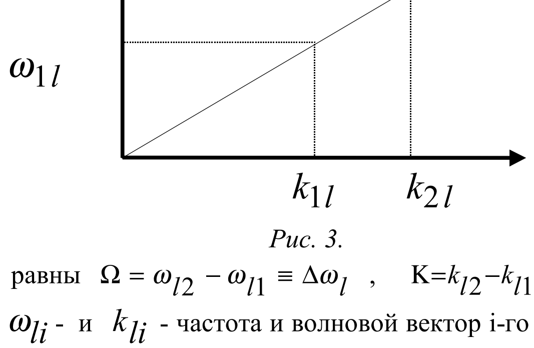

Рис. 3.

равны $\Omega = \omega_{l2} - \omega_{l1} \equiv \Delta\omega_l$, $K = k_{l2} - k_{l1}$, где ω_{li} - и k_{li} - частота и волновой вектор i-го пучка лазерного излучения, которое распространяется вдоль оси z.

Пусть мы хотим реализовать случай усиления, описанный выше. Для этого нам необходимо удовлетворить условию резонанса (8). Этому условию легко удовлетворить. Действительно, перепишем выражение для μ в виде $\mu = (\Omega/\omega) = (\Delta\omega_l/\omega_l)\cdot(\omega_l/\omega)$. Из этого выражения следует, что при $(\Delta\omega_l/\omega_l) \sim 10^{-3}$ и при $(\omega_l/\omega) \sim 10^{-3}$ (что легко достигается) $\mu \sim q \sim 10^{-6}$. Для плазменной волны твердого тела условия резонанса (8) означают, что ее фазовая скорость должна удовлетворять условию

$$V_f = c \Big/ \left[\left(1/\alpha\right) + \left(\lambda_0 + \lambda_1\right)/\mu\right] < c$$

В частности, если $q/4\mu \sim 1$, то $V_f \approx c \cdot \alpha / 2$.

Если считать $V_f = c/\sqrt{\varepsilon}$, то диэлектрическая проницаемость кристалла для лазерного излучения должна быть порядка $\varepsilon \sim 4\alpha^{-2}$. Аналогичные оценки можно провести и для других конкретных случаев. Все они показывают принципиальную реализуемость предлагаемой схемы создания пространственно-периодической неоднородности в кристалле и, как результат, реализуемость предлагаемого механизма усиления рентгеновского излучения в кристаллах.

В заключение отметим, что рассмотренный нами механизм усиления высокочастотного (рентгеновского) сигнала низкочастотным (волной плотности) является примером использования вторичных резонансов в гамильтоновой механике. Обычно в резонансной теории возмущений вторичные резонансы учитывают в том случае, когда амплитуды возмущений достаточно большие (см., например, [12]). Однако, если возмущение изначально содержит низкочастотную компоненту, как в нашем случае, то вторичные резонансы оказываются существенными и при малых амплитудах возмущения.

Работа выполнена при поддержке УНТЦ, проект № 855.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р.Элтон. Рентгеновские лазеры, М.: «Мир», 1994.
2. А.В.Виноградов, И.И.Собельман // ЖЭТФ. Т.63, вып. 6, с. 2113-2120, 1972.
3. В.И.Курилко, Ю.В.Ткач // УФН. 1995,165, № 3.
4. Я.Б.Файнберг, Н.А.Хижняк // ЖЭТФ. Т.32, с. 883,1957.
5. М.Л.Тер-Микаэлян. Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях, Ереван: Изд-во АН Арм. ССР, 1969.
6. В.Л.Гинзбург, В.Н.Цытович. Переходное излучение и переходное рассеяние. М.: «Наука», 1984.
7. В.А. Буц, // Известия вузов. Радиофизика. 1983, т. 26, №8, с. 996-1003.
8. M.N. Rosenbluth, C.S. Lin. // Phys. Rev. Lett. 1972,v. 29, N 11, p. 3023.
9. V.K Tripathi, C.S. Lin, // Phys. Fluids. B (Plasma Physics) 1991, vol. 3, N 2, p. 468.
10. M. Deutsch, B. Meerson, J.E. Golub. // Phys. Fluids. B (Plasma Physics) 1991, vol. 3, N 7, p. 1773.
11. C.E. Clayton, C. Joshi, C. Darrow, D. Umatadler // Phys. Rev. Lett. 1985, vol. 54, N 21, p. 2343.
12. A. J. Lichtenberg, M. A. Lieberman. // Regular and Stochastic Motion, Springer- Verlag New-York,1983.