

ИССЛЕДОВАНИЕ НА ЭВМ ПЛОСКОГО КОЛЕСА, КОНТАКТИРУЕМОГО С ПОЛУПЛОСКОСТЬЮ

Н. Х. Раковская

*Международный славянский университет
61045, г. Харьков, Украина, ул. Отакара Яроша, 9-А*

Определение контактных напряжений представляет собой серьезную инженерную задачу. Применение ЭВМ позволило существенно расширить круг решаемых контактных задач, особенно в статической постановке. Следует отметить, что существующие программные комплексы по расчету конструкций с использованием ЭВМ имеют зачастую весьма ограниченный графический интерфейс. В результате значительная часть появляющейся информации оказывается неиспользованной.

Представляет интерес получение аналитического решения задачи при использовании которого в сочетании со специализированными программами по преобразованию аналитических выражений в графические получаем трехмерные графики контактных напряжений, обладающих большой степенью информативности.

Для построения аналитического решения, определяющего напряжения в плоских контактирующих телах, можно использовать формулы [1, 2, 3] для расчета, на границы которых действуют локальные контактные нагрузки.

Это подтверждается и работой автора по исследованию на ЭВМ плоского колеса, контактируемого с полуплоскостью. Эпюры напряжений с высокой точностью совпадают в плоском колесе и полуплоскости вблизи зоны контакта.

В случае действия на границу полуплоскости нормальной к границе сосредоточенной силы P на основе данных, приведенных в [3], запишем напряжения в полуплоскости в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \hat{\sigma}_{11}^P &= -\frac{2P}{\pi} \frac{x_1^2 \cdot x_2}{r^4}; \\ \hat{\sigma}_{22}^P &= -\frac{2P}{\pi} \frac{x_2^3}{r^4}; \\ \hat{\sigma}_{12}^P &= -\frac{2P}{\pi} \frac{x_1 \cdot x_2^2}{r^4}. \end{aligned} \right\} (1)$$

Располагая формулами для напряжений от сосредоточенной силы P , действующей по нормали к границе полуплоскости (1), и используя принцип суперпозиции, справедливый для линейных систем, запишем напряжения для произвольной точки M упругой полуплоскости от действия контактной (нормально) нагрузки $q_n(x_1)$ (рис. 1).

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11}(x_1, x_2) &= -\frac{2}{\pi} \int_{-a}^a \frac{q_n(\eta)(x_1 - \eta)^2 \cdot x_2 d\eta}{r^4}; \\ \sigma_{22}(x_1, x_2) &= -\frac{2}{\pi} \int_{-a}^a \frac{q_n(\eta)x_2^3 d\eta}{r^4}; \\ \sigma_{12}(x_1, x_2) &= -\frac{2}{\pi} \int_{-a}^a \frac{q_n(\eta)(x_1 - \eta) \cdot x_2^2 d\eta}{r^4}, \end{aligned} \right\} (2)$$

где

$$r^2 = (x_1 - \eta)^2 + x_2^2. \quad (3)$$

Внешнюю контактную нагрузку запишем в виде (3)

$$q(x_1) = q_0 \sqrt{1 - \left(\frac{x_1}{a}\right)^2}, \quad (4)$$

где

$$q_0 = \sqrt{\frac{PE}{2\pi(1-\mu^2)Rb}}; \quad a = \sqrt{\frac{8(1-\mu^2)PR}{\pi Eb}}, \quad (5)$$

b — толщина диска.

Для дальнейших расчетов более удобным представляется переход к безразмерной величине внешней нагрузки. Для этого достаточно обе части равенства (4) разделить на среднее значение внешней нагрузки

$$q_{cp} = \frac{P_0}{ab} \dots \quad (6)$$

В результате относительная нагрузка $\tilde{q}(x_1)$ окажется равной (при $R = 0,5$ м; $b = 0,1$ м; $E = 2 \cdot 10^{11}$ Н/м²)

$$\tilde{q}(x_1) = 1,2732395 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x_1}{a}\right)^2}. \quad (7)$$

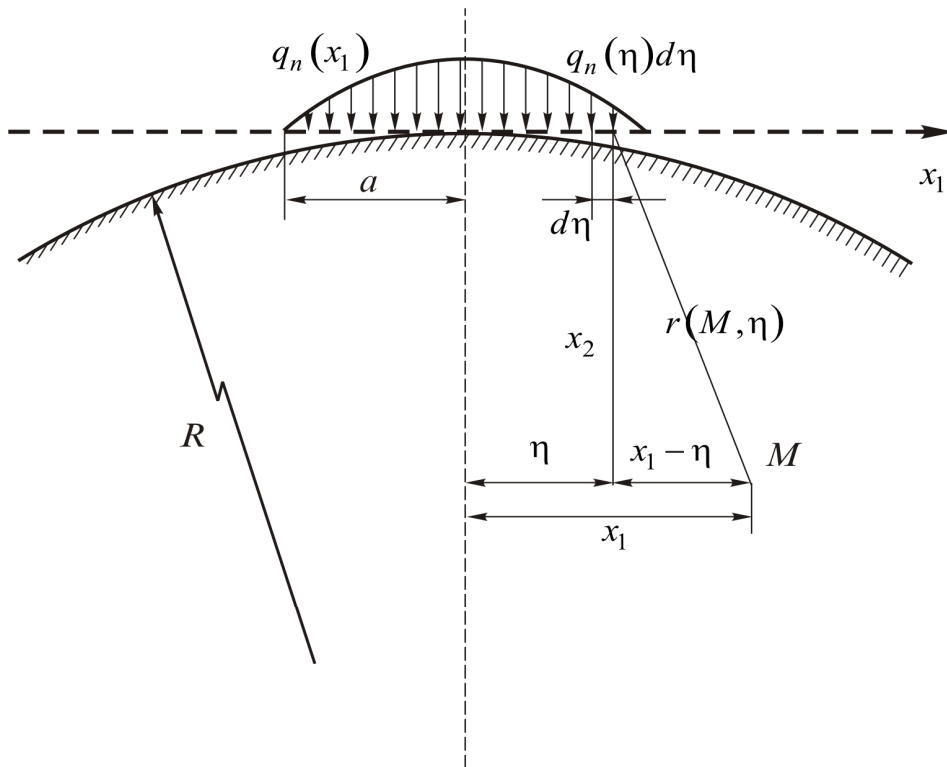


Рис. 1. Основные обозначения, используемые при определении напряжений в плоском контакте вблизи зоны действия контактной нагрузки $q_n(x_1)$

Располагая зависимостями (2) и (7), получаем формулы для проведения расчетов:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\sigma}_{11}^p(x_1, x_2) &= -\frac{2}{\pi} \int_{-a}^a F(x_1, x_2, \eta) \cdot (x_1 - \eta)^2 x_2 d\eta; \\ \tilde{\sigma}_{22}^p(x_1, x_2) &= -\frac{2}{\pi} \int_{-a}^a F(x_1, x_2, \eta) \cdot x_2^3 d\eta; \\ \tilde{\sigma}_{12}^p(x_1, x_2) &= -\frac{2}{\pi} \int_{-a}^a F(x_1, x_2, \eta) \cdot (x_1 - \eta) x_2^2 d\eta, \end{aligned} \right\} (8)$$

где

$$F(x_1, x_2, \eta) = \frac{1,2732395 \sqrt{1 - \left(\frac{\eta}{a}\right)^2}}{\left[(x_1 - \eta)^2 + x_2^2\right]^2}. \quad (9)$$

Графики относительных контактных напряжений $\tilde{\sigma}_{11}^p, \tilde{\sigma}_{22}^p, \tilde{\sigma}_{12}^p$ приводятся на рис. 2 и 3.

Для установления области с наиболее вероятным возникновением пластических деформаций воспользуемся эквивалентными напряжениями по Губеру—Мизесу—Хенку, которые в случае плоского напряженного состояния принимают вид:

$$\tilde{\sigma}_{эkv}^p = \frac{4}{\sqrt{2}} \sqrt{\tilde{\sigma}_{11}^p - \tilde{\sigma}_{11}^p \cdot \tilde{\sigma}_{22}^p + \tilde{\sigma}_{22}^p + 3\tilde{\sigma}_{12}^p}, \quad (10)$$

причем $\tilde{\sigma}_{ij}^p$ — определяется выражениями (8).

График относительных эквивалентных нагрузжений $\tilde{\sigma}_{эkv}^p$ (рис. 4) подобно относительным нормальным напряжениям, носит ярко выраженный локальный характер.

Если принять, что сила трения T связана с нормальной силой P соотношением

$$T = f \cdot P, \quad (11)$$

где f — коэффициент трения, то в этом случае от действия касательной силы T в полуплоскости, согласно [3], будут возникать напряжения $\hat{\sigma}_{ij}^T$, определяемые

выражениями

$$\left. \begin{aligned} \hat{\sigma}_{11}^T &= -f \frac{2P}{\pi} \frac{x_1^3}{r^4}; \\ \hat{\sigma}_{22}^T &= -f \frac{2P}{\pi} \frac{x_1 x_2^2}{r^4}; \\ \hat{\sigma}_{12}^T &= -f \frac{2P}{\pi} \frac{x_1^2 x_2}{r^4}, \end{aligned} \right\} (12)$$

где $r^4 = [x_1^2 + x_2^2]^2$.

Располагая напряжениями, возникающими от действия сосредоточенной силы трения (12), и используя принцип суперпозиции, получаем выражения для компонентов напряжений от нагрузки $q^T(x_1)$:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\sigma}_{11}^T(x_1, x_2) &= -\frac{2}{\pi} \int_{-a}^a \frac{q^T(\eta)(x_1 - \eta)^3 d\eta}{r^4}; \\ \tilde{\sigma}_{22}^P(x_1, x_2) &= -\frac{2}{\pi} \int_{-a}^a \frac{q^T(\eta)(x_1 - \eta)x_2^2 d\eta}{r^4}; \\ \tilde{\sigma}_{12}^P(x_1, x_2) &= -\frac{2}{\pi} \int_{-a}^a \frac{q^T(\eta)(x_1 - \eta)^2 x_2 d\eta}{r^4}, \end{aligned} \right\} (13)$$

где

$$r^4 = \left[(x_1 - \eta)^2 + x_2^2 \right]^2. \quad (14)$$

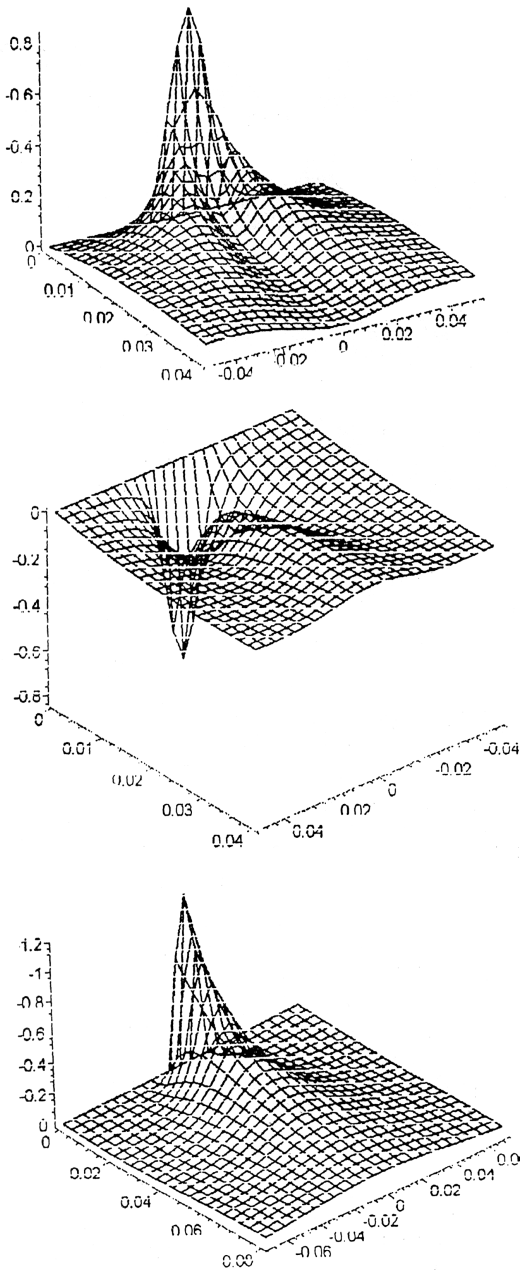


Рис. 2. Трехмерные графики относительных напряжений $\tilde{\sigma}_{11}^P$ и $\tilde{\sigma}_{22}^P$ вблизи зоны действия контактной нагрузки

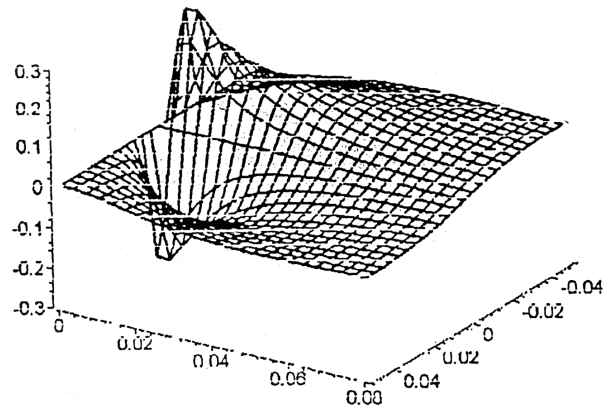


Рис. 3. Трехмерные графики относительных напряжений $\tilde{\sigma}_{12}^P$ вблизи зоны действия контактной нагрузки

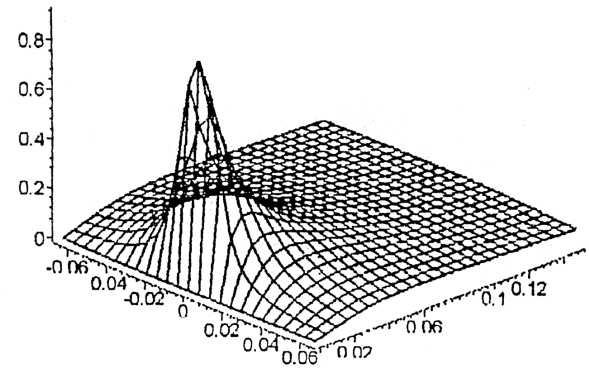


Рис. 4. Трех- и двухмерные графики относительных эквивалентных напряжений по Губеру—Мизесу—Хенки вблизи зоны действия контактных напряжений

Для определения распределенной нагрузки $q^T(x_1)$ воспользуемся законом распределения нормальной нагрузки $q^n(x)$ (4), (5) и (7) и в результате получим

$$q^T(x) = f q_0 \sqrt{1 - \left(\frac{x_1}{a}\right)^2} \quad \text{или}$$

$$\tilde{q}^T(x_1) = \frac{q^T(x_1)}{2ab} = 1,2732395 \sqrt{1 - \left(\frac{x_1}{a}\right)^2}. \quad (15)$$

Подставляя (15) в (13), получим следующие выражения для относительных напряжений

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\sigma}_{11}^T(x_1, x_2) &= -f \frac{2}{\pi} \int_{-a}^a F(x_1, x_2, \eta) (x_1 - \eta)^3 d\eta; \\ \tilde{\sigma}_{22}^T(x_1, x_2) &= -f \frac{2}{\pi} \int_{-a}^a F(x_1, x_2, \eta) (x_1 - \eta) x_2^2 d\eta; \\ \tilde{\sigma}_{12}^T(x_1, x_2) &= -f \frac{2}{\pi} \int_{-a}^a F(x_1, x_2, \eta) (x_1 - \eta)^2 x_2 d\eta, \end{aligned} \right\} (16)$$

где

$$F(x_1, x_2, \eta) = \frac{1,2732395 \sqrt{1 - \left(\frac{\eta}{a}\right)^2}}{\left[(x_1 - \eta)^2 + x_2^2\right]^{3/2}}. \quad (17)$$

На основе формул (16), (17) были построены трехмерные графики относительных напряжений $\tilde{\sigma}_{ij}^T$, вызванные относительной касательной контактной нагрузкой (15) (рис. 5).

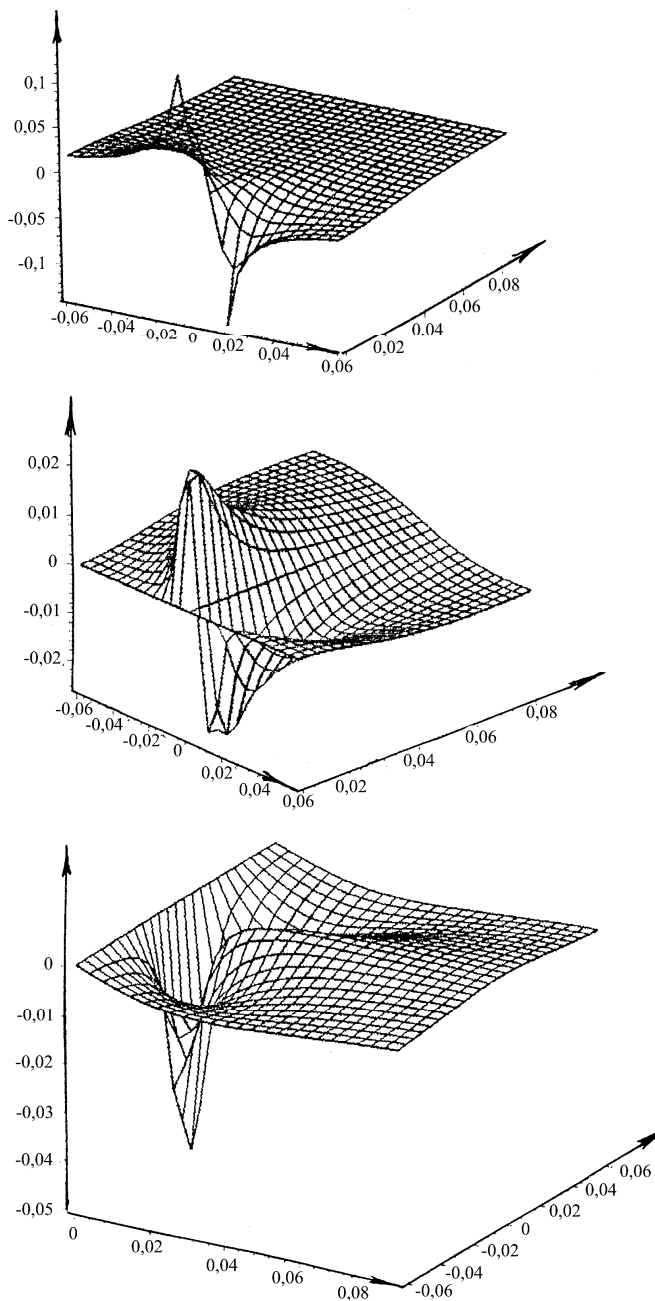


Рис. 5. Трехмерные графики безразмерных напряжений $\tilde{\sigma}_{ij}^T$, вызванные касательной контактной нагрузкой

На практике в контакте действуют кроме относительных нормальных контактных нагрузок $\tilde{q}^P(x_1)$

еще и относительные касательные контактные нагрузки $\tilde{q}^T(x_1)$, т.е.

$$\tilde{q}^\Sigma(x_1) = \tilde{q}^P(x_1) + \tilde{q}^T(x_1). \quad (18)$$

Возникающие при этом в плоском контакте суммарные напряжения определяются по формулам:

$$\tilde{\sigma}_{ij}^\Sigma = \tilde{\sigma}_{ij}^P + \tilde{\sigma}_{ij}^T, \quad (i, j = 1, 2). \quad (19)$$

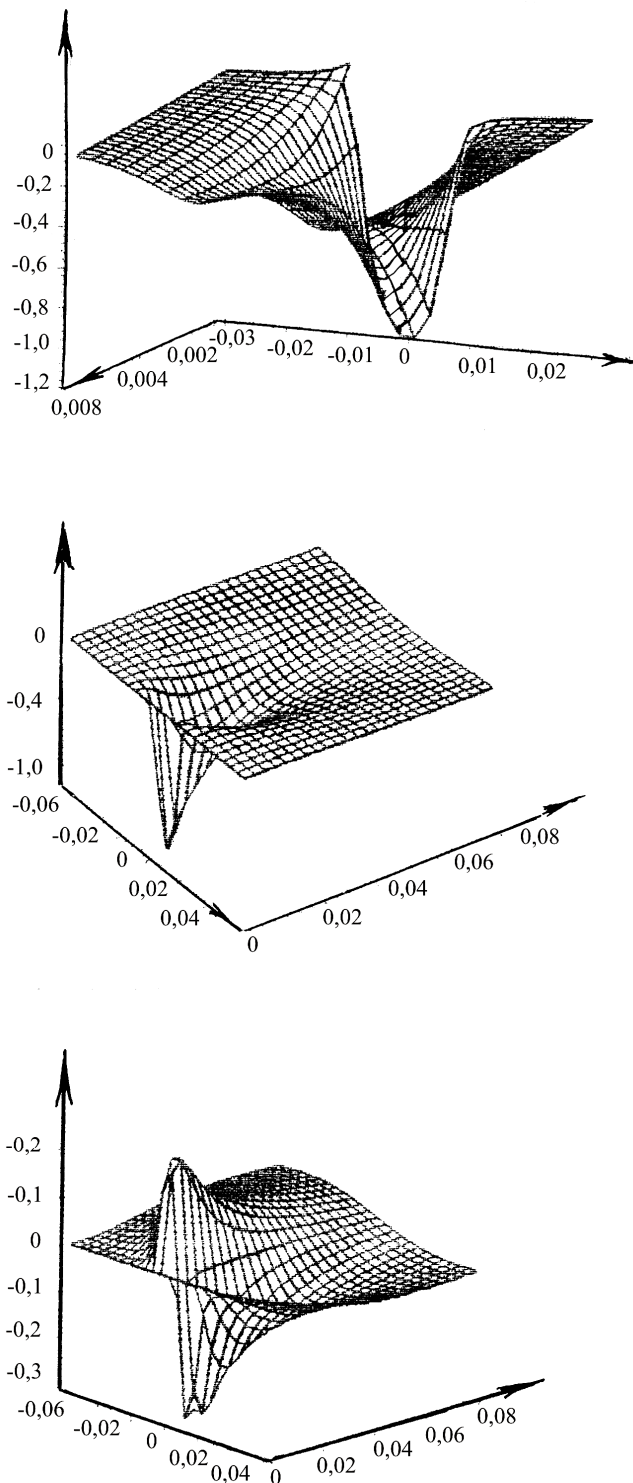


Рис. 6. Трехмерные графики безразмерных суммарных нормальных $\tilde{\sigma}_{11}^\Sigma, \tilde{\sigma}_{22}^\Sigma$ и касательных напряжений $\tilde{\sigma}_{12}^\Sigma$ в зоне контакта

Воспользовавшись полученными ранее формулами для $\tilde{\sigma}_{ij}^P$ и $\tilde{\sigma}_{ij}^T$ (8), (9) и (16), (17), приходим к следующим выражениям для компонентов относительных суммарных напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\sigma}_{11}^{\Sigma} &= -\frac{2}{\pi} \int_{-a}^a F(x_1, x_2, \eta) \cdot [(x_1 - \eta)^2 x_2 + f(x_1 - \eta)^3] d\eta; \\ \tilde{\sigma}_{22}^{\Sigma} &= -\frac{2}{\pi} \int_{-a}^a F(x_1, x_2, \eta) \cdot [x_2^3 + f(x_1 - \eta) x_2^2] d\eta; \\ \tilde{\sigma}_{12}^{\Sigma} &= -\frac{2}{\pi} \int_{-a}^a F(x_1, x_2, \eta) \cdot [(x_1 - \eta) x_2^2 + f(x_1 - \eta)^2 x_2] d\eta, \end{aligned} \right\} (20)$$

где

$$F(x_1, x_2, \eta) = \frac{1,2732395 \sqrt{1 - \left(\frac{\eta}{a}\right)^2}}{\left[(x_1 - \eta)^2 + x_2^2\right]^2}. \quad (21)$$

На основе формул (20) и (21) были построены (с использованием ЭВМ) трехмерные графики для всех относительных контактных напряжений. Результаты построенных графиков приводятся на рис.6.

Для установления областей с наиболее вероятным возникновением пластических деформаций воспользуемся эквивалентным напряжением по Губеру—Мизесу—Хенки, которое применительно к рассматриваемому случаю имеет вид:

$$\tilde{\sigma}_{\text{эkv}}^{\Sigma} = \frac{4}{\sqrt{2}} \sqrt{\tilde{\sigma}_{11}^{\Sigma 2} - \tilde{\sigma}_{11}^{\Sigma} \tilde{\sigma}_{22}^{\Sigma} + \tilde{\sigma}_{22}^{\Sigma 2} + 3\tilde{\sigma}_{12}^{\Sigma 2}}, \quad (22)$$

где $\tilde{\sigma}_{ij}^{\Sigma}$ — определяются по формулам (20) и (21).

На основе формул (22), (20) и (21) был построен (с использованием ЭВМ) трехмерный график для $\tilde{\sigma}_{\text{эkv}}^{\Sigma}$ (рис. 7).

Располагая графиками относительных контактных напряжений и относительных эквивалентных напряжений по Губеру—Мизесу—Хенки, период к размерным напряжениям осуществляется по формулам

$$\tilde{\sigma}_{ij}^{P,T} = \tilde{\sigma}_{ij}^{\Sigma} \frac{P}{2ab};$$

$$\tilde{\sigma}_{\text{эkv}}^{P,T} = \tilde{\sigma}_{\text{эkv}}^{\Sigma} \frac{P}{2ab}.$$

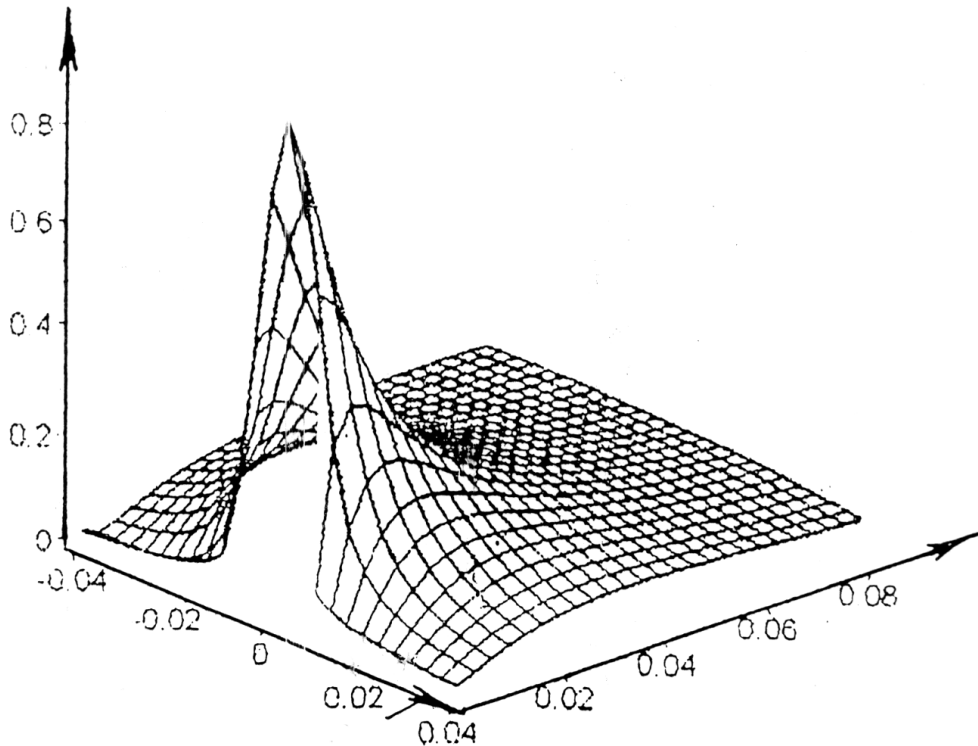


Рис. 7. Трехмерный график безразмерного суммарного эквивалентного контактного напряжения $\tilde{\sigma}_{\text{эkv}}^{\Sigma}$ по Губеру—Мизесу—Хенки

ВЫВОДЫ

С помощью ЭВМ и метода конечных элементов подтверждена отмечаемая в ряде работ автора возможность использования формул для определения напряжений в полуплоскости для установления напряжений в плоских контактируемых телах.

Получены зависимости, позволяющие определить напряжения в плоском колесе в зоне контакта от действия распределенных нормальных, касательных и суммарных контактных нагрузок, а также эквивалентные напряжения по Губеру—Мизесу—Хенки.

На основе специализированных программ, позволяющих осуществлять преобразование аналитических выражений в графические образы, были получены 3-мерные графики для всех компонентов напряжений в зоне контакта от действия распределенных нормальных, касательных и суммарных контактных нагрузок, а также эквивалентные напряжения по Губеру—Мизесу—Хенки.

Анализ полученных результатов позволил сделать следующие выводы:

- высокие значения контактных напряжений в зоне контакта носят ярко выраженный локальный характер;

- от действия нормальной контактной нагрузки максимальные нормальные и касательные напряжения располагаются на некотором расстоянии от контактной поверхности в глубине контактируемого тела;
- поскольку касательные контактные нагрузки были в расчетах приняты на порядок ниже, чем нормальные нагрузки, то в связи с этим они слабо влияли как на суммарные контактные напряжения, так и на эквивалентные напряжения по Губеру-Мизесу-Хенки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю.Н.Работников. *Механика деформируемого твердого тела*. М.: «Наука», ГРФМЛ, 1979, 744 с.
2. В.Г.Зубчанинов. *Основы теории упругости и пластичности*. М.: «Высшая школа», 1990, 368 с.
3. С.П.Тимошенко, Дж. Гудьер. *Теория упругости*. М.: «Наука», ГРФМЛ, 1979, 560 с.

(23)

ДОСЛІДЖЕННЯ НА ЕОМ ПЛОСКОГО КОЛЕСА, ЩО КОНТАКТУЄ З ПІВПЛОЩИНОЮ

Н. Х. Раковська

Визначення контактних напружень уявляє серйозну інженерну задачу. Застосування ЕОМ дозволило суттєво розширити коло контактних задач, особливо в статичній постановці. Слід відзначити, що існуючі програмні комплекси з розрахунку конструкцій з використанням ЕОМ, мають частіше дуже обмежений графічний інтерфейс. У результаті значна частина інформації, що з'являється, виявляється невикористаною.

THE COMPUTER ANALYSIS OF THE FLAT WHEEL

N.Ch. Rakovskaya

To determine points of contact pressures is a grave engineering problem. The usage of a computer to solve this problem allowed to significantly broaden the specter of problems of contact in the static aspect. We have to make a point that sets of programs, which enable us to design structures using computers possess a limited graphic interface. As a result the major part of information finds no application.