

# РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ СОЛИТОНОВ ПОПЕРЕК СИЛЬНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ПЛАЗМЕ

В.Б. Красовицкий, В.А. Туриков\*

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша  
РАН, Москва, Россия

\*Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Проведено аналитическое и численное исследования нелинейных свойств необыкновенной электромагнитной волны большой амплитуды в докритической плазме. В слаборелятивистском приближении показано, что при распространении поперек сильного магнитного поля вблизи электронного циклотронного резонанса необыкновенная волна может трансформироваться в солитоны огибающей. Численные эксперименты, проведенные с помощью одномерного релятивистского РС кода, показали, что при взаимодействии с плазмой в резонансных условиях длинный импульс распадается на последовательность солитонов.

PACS: 52.35.Sb

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Сильное внешнее магнитное поле может кардинально изменять характер нелинейных процессов, происходящих при взаимодействии мощного лазерного излучения с плазмой [1-5]. В работе [5] было показано, что в процессе развития распадной неустойчивости при поперечном распространении импульса в замагниченной плазме имеет место эффективная трансформация энергии излучения в энергию частиц. Магнитные поля, необходимые для реализации таких процессов, могут создаваться импульсными токовыми системами, а также генерироваться в результате самофокусировки лазерной волны.

При взаимодействии лазерного излучения с плазмой без магнитного поля возмущения плотности плазмы под действием пондеромоторной силы, а также нелинейные эффекты, связанные с релятивистским изменением массы электронов, приводят к возникновению электромагнитных солитонов [6,7]. Наличие внешнего магнитного поля в условиях циклотронного резонанса усиливает влияние этих факторов и вызывает интенсивную самомодуляцию лазерного импульса. В результате происходит образование солитонов огибающей нового типа.

В настоящей работе найдены солитонные решения для необыкновенной волны в плазме низкой плотности в окрестности электронного циклотронного резонанса. С помощью нелинейного дисперсионного уравнения исследованы области значений амплитуд и расстройек резонанса, в которых существуют такие решения. Проведено моделирование по методу частиц-в-ячейке процесса образования солитонов огибающей при распространении электромагнитного импульса в замагниченной плазме в резонансных условиях.

## 2. АМПЛИТУДНО-МОДУЛИРОВАННАЯ ВОЛНА

Распространение необыкновенной электромагнитной волны  $E = (E_x, 0, E_z)$  и  $B = (0, B_y, 0)$  поперек постоянного магнитного поля  $B_0 = (0, B_0, 0)$  в плазме описывается системой релятивистских уравнений гидродинамики

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_z \frac{\partial}{\partial z}\right) p_x = eE_x - e\beta_z (B_y + B_0) \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_z \frac{\partial}{\partial z}\right) p_z = eE_z + e\beta_x (B_y + B_0), \quad (2)$$

и уравнениями Максвелла для поля

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = -\frac{4\pi e}{c} n v_x, \quad (3)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = 4\pi e(n - n_0), \quad \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial (n v_z)}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

Здесь  $p = m_e \gamma v$ ,  $\beta = v/c$ ,  $E_x = -\partial A_x / \partial t$  и  $B_y = \partial A_x / \partial z$ ,  $A_x$  – векторный потенциал.

Будем рассматривать слаборелятивистское приближение  $\gamma \approx 1 + \beta^2/2$ . Вводя комплексный потенциал  $A$  и комплексную скорость  $\beta$

$$A_x = \frac{m_e c^2}{e} \text{Re } A, \quad \beta = \beta_x + i\beta_z,$$

преобразуем уравнения (1)-(3) к виду

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \beta + \frac{|\beta|^2 \beta}{2} \right) + c\beta_z \frac{\partial \beta}{\partial z} = i\omega_{ce} \beta - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (A + A^*),$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = \omega_p^2 \beta, \quad (5)$$

где  $\omega_{ce}$ ,  $\omega_p$  – циклотронная и плазменная частоты.

Представим резонансное решение при  $|\omega_0 - \omega_{ce}| \ll \omega_{ce}$  ( $\omega_0$  – частота волны) в виде

$$\beta = -ib(\xi) \exp[i\psi + i\theta(\xi)], \quad A = A(\xi) \exp[i\psi + i\theta(\xi)],$$

$$\xi = \omega_0(t - z/v_g), \quad \psi = \omega_0(t - z/v_{ph}), \quad (6)$$

где  $v_g$  и  $v_{ph}$  – групповая и фазовая скорости волны. Амплитуды и фазы в решении (6) являются медленными функциями координаты  $\xi$ . Подставляя (6) в уравнения (5) и усредняя по высокочастотному периоду, получаем следующую систему укороченных уравнений

$$b' = -\frac{A}{2} \cos \eta, \quad A' = -\frac{q^2}{2g} b \cos \eta,$$

$$\eta' = \frac{n^2 - 1}{2g} - \delta - \frac{b^2}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{A}{b} + \frac{q^2 b}{2g A} \right) \sin \eta, \quad (7)$$

где  $\eta = \phi - \theta$ ,  $n$  – показатель преломления,

$$g = \frac{n}{\beta_g} - 1, \quad \beta_g = v_g/c, \quad \delta = 1 - \frac{\omega_{ce}}{\omega_0}, \quad q = \frac{\omega_p}{\omega_0}.$$

При получении этой системы учтено, что слагаемое  $c\beta_g \partial \beta / \partial z$  не приводит к расфазировке электронов с волной. Интегралы (7) имеют вид

$$A^2 - \frac{q^2}{g} b^2 = C_1(A_0, b_0),$$

$$A \sin \delta + Db - \frac{b^2}{4} = C_2(A_0, b_0, \delta_0), \quad (8)$$

где  $D = \frac{n^2 - 1}{2g} - \delta$ .

В невозмущенной плазме  $b_0 = \sin \eta_0 = 0$  и постоянные интегрирования определяются через амплитуду внешнего электромагнитного поля  $A_0$ :  $C_1 = A_0^2$  и  $C_2 = 0$ .

Из первого уравнения (7) и формул (8) следует выражение для гамильтониана

$$b'^2 + U(b) = A_0^2 / 4,$$

$$U(b) = -\frac{q^2}{4g} b^2 + \left( \frac{Db}{2} - \frac{b^3}{8} \right)^2,$$

определяющее форму нелинейных колебаний в плазме.

Будем считать выполненным равенство

$$2\delta(n - \beta_g) + \beta_g(n^2 - 1) = 0,$$

устраняющее линейный уход фазы волны и связывающее групповую и фазовую скорости [8]. Тогда потенциал  $U(b)$  можно представить в виде

$$U(b) = -\Gamma^2 b^2 + \frac{\delta b^4}{4} + \frac{b^6}{64}, \quad (9)$$

$$\Gamma^2 = \delta^2(Z^2 - 1), \quad Z = [2\delta(1 - n^2)/q^2]^{1/2}.$$

Графики потенциала  $U(b)$  представлены на Рис.1.

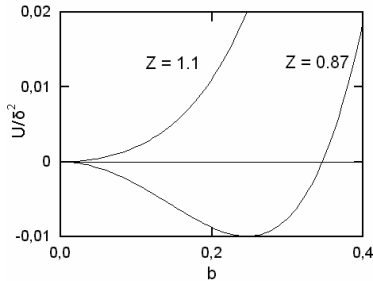


Рис.1. Потенциал  $U(b)$  для  $\delta = 0,1$ .

При  $Z < 1$  возникает солитонное решение

Из выражения (9) следует уравнение для амплитуды скорости электронов

$$b' = \sqrt{\frac{A_0^2}{4} + \Gamma^2 b^2 - \frac{\delta b^4}{4} - \frac{b^6}{64}}. \quad (10)$$

Максимальная амплитуда колебаний плазмы  $b_m$ , удовлетворяющая условию  $b'(b_m) = 0$ , равна

$$b_m^2 = \begin{cases} -A_0^2/4\Gamma^2, & A_0^2 \ll 2(2\delta)^3 \\ (4A_0)^{2/3}, & A_0^2 \gg 4(4\delta)^3 \end{cases}.$$

Первое решение существует при  $Z > 1$  и соответствует монохроматической волне малой амплитуды, а вторая асимптотика реализуется в условиях циклотронного резонанса в сильнонелинейной плазме.

### 3. УЕДИНЕННАЯ ВОЛНА

Уединенная волна, удовлетворяющая условию  $b = b' = 0$ , существует при  $|Z| < 1$  (Рис.1). Полагая  $A_0 = 0$  и интегрируя (10), находим

$$b^2(\xi) = \frac{8\Gamma^2}{\delta + \sqrt{\Gamma^2 + \delta^2} \operatorname{ch}(2\Gamma\xi)}. \quad (11)$$

Выражая скорость электрона  $b$  через потенциал  $A$  из первой формулы (8), представим (11) в виде

$$A^2 = 32 \frac{\delta^3}{Z^3} \frac{1 - Z^2}{Z + \operatorname{ch}\left[2\delta\sqrt{Z^2 - 1}\xi\right]}. \quad (12)$$

Максимальная амплитуда поля достигается в точке  $\xi = 0$ . Полагая  $A_m = A(0)$ , получаем нелинейное дисперсионное уравнение

$$\nu Z^3 + Z - 1 = 0, \quad \nu = A_m^2 / 32\delta^3. \quad (13)$$

В области существования солитона  $|Z| < 1$  уравнение (13) имеет аналитическое решение

$$Z = \nu^{-1/3} \left( \sqrt[3]{1/2 + \sqrt{d}} + \sqrt[3]{1/2 - \sqrt{d}} \right),$$

где  $d = 1/4 + 1/27\nu > 0$ .

Отсюда следуют асимптотики

$$Z = \begin{cases} 1 - \nu, & \nu \ll 1 \\ \nu^{-1/3}, & \nu \gg 1 \end{cases}.$$

Первое равенство соответствует волне малой амплитуды ( $A_m \rightarrow 0$ )  $A = A_m \operatorname{ch}^{-1}(A_m \xi / 4\sqrt{\delta})$ , когда дисперсия при  $\delta > 0$  близка к линейной.

В сильно нелинейной плазме ( $\delta \rightarrow 0$ ) выражение (12) упрощается к виду

$A = A_m \operatorname{ch}^{-1/2}[(A_m/2)^{2/3} \xi]$ , а фазовая  $\nu_{ph} = c/n$  и групповая  $\nu_g = c\beta_g$  скорости определяются формулами

$$n^2 = 1 - \frac{q^2 \delta}{2^{1/3} A_m^{4/3}}, \quad \beta_g = \frac{1}{1 + q^2 / (2A_m)^{4/3}}.$$

Солитонные решения существуют как при  $\delta > 0$  ( $Z > 0$ ), так и при  $\delta < 0$  ( $Z < 0$ ). На Рис.2. представлены области существования солитонов на плоскости  $Z, \nu$ .

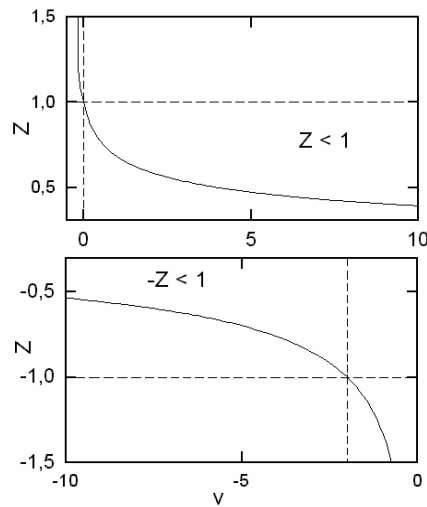


Рис.2. Области существования солитонов:  $Z < 1$  при  $\nu > 0$  и  $-Z < 1$  при  $\nu < 0$

Физический механизм образования рассматриваемого электромагнитного солитона огибающей состоит в следующем. Под действием электрическо-

го поля волны первоначально покоящиеся электроны ускоряются поперек магнитного поля и поглощают энергию волны на переднем фронте импульса.

Возникающее при этом релятивистское уменьшение гирочастоты сопровождается расфазировкой ускоренных электронов с волной. Поэтому электрон, достигающий центра солитона, смещается в область замедляющих фаз и отдает энергию заднему фронту импульса. Сильное магнитное поле  $\omega_{ce} \gg \omega_p$  ( $q \ll 1$ ) удерживает электроны на круговых орбитах (препятствуя захвату продольным полем  $E_z \approx qE_x$ ) и сохраняет зарядовую нейтральность плазмы.

#### 4. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕЗОНАНСНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НЕОБЫКНОВЕННОЙ ВОЛНЫ С ПЛАЗМОЙ

Моделирование процесса взаимодействия электромагнитного импульса с замагниченной плазмой проводилось с использованием электромагнитного релятивистского кода 1D2V.

Начальная форма импульса в вакуумной области задавалась в виде

$$\text{Re } A(z) = a \exp[-(z - z_0)/L]^{20},$$

что соответствует плоской волне, ограниченной передним и задним фронтами. Рассматривалась линейно поляризованная волна с вектором  $\mathbf{E}$ , направленным вдоль оси  $X$  и перпендикулярным внешнему магнитному полю  $B_0$ .

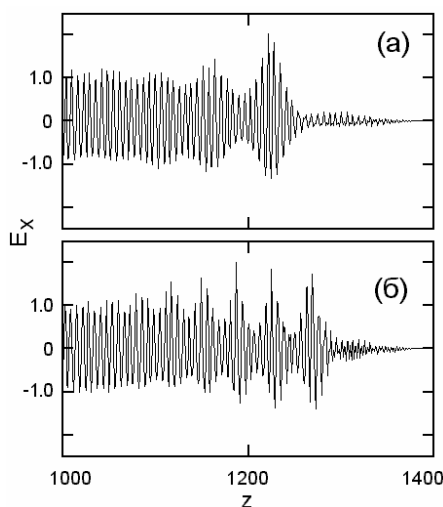


Рис.3. Поле импульса  $E_x$  в момент  $t = 600$  (в единицах  $\omega_0^{-1}$ ). Координата  $z$  выражена в единицах  $k_0^{-1}$ .

$$L = 370, \delta = 0.1, q = 0.1;$$

$$(a) - a = 0.05, (b) - a = 0.1$$

Начальное распределение частиц соответствовало состоянию холодной плазмы с резкой границей. Все поля и характеристики плазмы считались зависящими только от координаты  $z$  вдоль направления распространения импульса. Число частиц на сеточный шаг  $\Delta$  варьировалось в пределах от 5 до 20. Величина шага была равной  $0.1k_0^{-1}$  ( $k_0$  – волновое число лазерного излучения в вакууме), а шага по времени  $\Delta t = 0.1\omega_0^{-1}$ . Расчеты проводились как для не-

подвижных ионов, так и с учетом их движения при отношении масс  $m_i/m_e = 1840$ .

Проведенные численные эксперименты показали, что в случае поперечного распространения в плазме низкой плотности широкий электромагнитный импульс разбивается в области электронного циклотронного резонанса на последовательность солитонов при амплитудах  $a \leq 0.1$  (Рис.3). Ширина солитонов уменьшается с ростом их амплитуды, что согласуется с выражением (11). Аналогичный процесс образования солитонов имеет место и вблизи верхнегибридного резонанса (Рис.4).

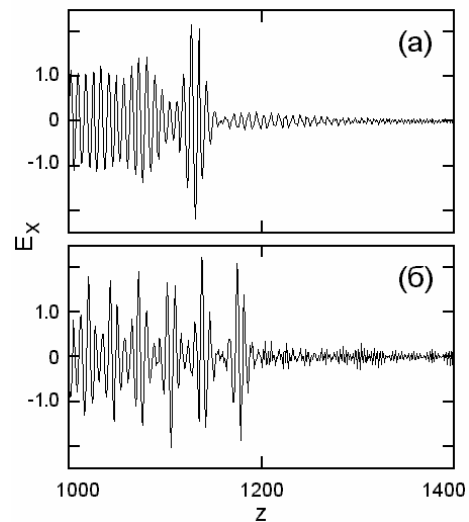


Рис.4. Образование солитонов в области верхнегибридного резонанса.  $\delta = 0.3, q = 0.4$ . Остальные параметры те же, что на рис.3

По мере увеличения амплитуды импульса и сжатия солитонов при некотором критическом значении амплитуды на фоне солитонной структуры начинает происходить нагрев электронной компоненты плазмы (Рис.5).

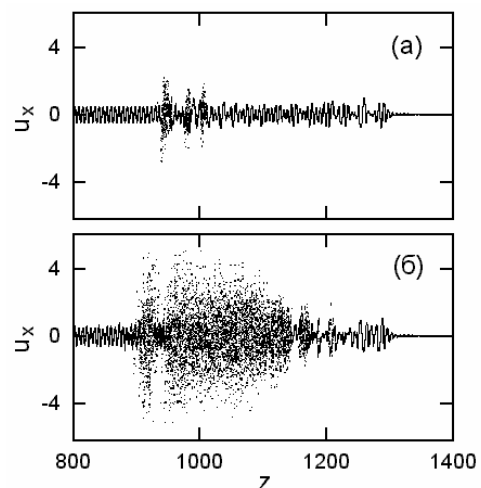


Рис.5. Нагрев электронной компоненты при увеличении амплитуды импульса. Импульсы частиц  $u_x$  заданы в единицах  $m_e c$ .

$$\delta = 0.1, q = 0.1; (a) - a = 0.16; (b) - a = 0.2$$

Этот эффект обусловлен возникновением большого числа гармоник продольного электрического поля (Рис.6) и соответствующим перекрытием нелинейных резонансов [3,9].

Из результатов численных расчетов следует, что в рассмотренной области параметров влияние ионов на процессы резонансного взаимодействия пренебрежимо мало.

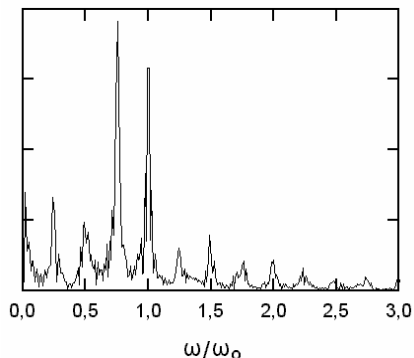


Рис.6. Частотный спектр продольного поля  $E_z$  для случая (а) на Рис.5

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено аналитическое и численное исследование процесса резонансного взаимодействия электромагнитного импульса с докритической плазмой при его распространении перпендикулярно внешнему магнитному полю. Из полученных результатов следует, что при амплитудах  $a = eE_0 / m_e \omega_0 c \leq 0.1$  в окрестности электронного циклотронного и верхнегибридного резонансов импульс трансформируется в цепочку солитонов. При  $a > 0.1$  в такой структуре возбуждается большое число близких гармоник продольного электрического поля, что приводит к перекрытию нелинейных резонансов и стохастическому нагреву плазмы.

Полученные результаты могут быть применены к системам с лазерным ускорением частиц и нагревом плазмы.

## ELECTROMAGNETIC SOLITONS PROPAGATION ACROSS A STRONG MAGNETIC FIELD INTO PLASMAS

*V.B. Krasovitsky, V.A. Turikov*

In this paper the analytical and numerical study of high amplitude extraordinary wave nonlinear properties in underdense plasmas have been carried out. In slightly relativistic approach it is shown that an extraordinary wave can transform to an evaluate soliton at propagation across a strong magnetic field in vicinity of electron cyclotron resonance. With help of 1-D relativistic PIC code we conducted a numerical simulation of an electromagnetic pulse transverse propagation in a magnetized plasma. The numerical experiments have been shown that a long pulse decay to a solitons sequence at its interaction with plasmas in the resonant conditions.

## ПОШИРЕННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ СОЛІТОНІВ ПОПЕРЕК СИЛЬНОГО МАГНІТНОГО ПОЛЯ У ПЛАЗМІ

*В.Б. Красовицький, В.А. Туриков*

Проведене аналітичне та чисельне дослідження нелінійних властивостей незвичайної електромагнітної хвилі великої амплітуди у докритичній плазмі. У слабкорелятивістському наближенні показано, що при поширенні поперек сильного магнітного поля поблизу електронного циклотронного резонансу незвичайна хвиля може трансформуватись у солітони огинаючої. За допомогою одновимірного релятивістського PIC коду проведене чисельне моделювання процесу поперечного поширення електромагнітного імпульсу у замагніченій плазмі. Чисельні експерименти показали, що при взаємодії з плазмою у резонансних умовах довгий імпульс розпадається на послідовність солітонів.

Авторы выражают глубокую благодарность М.В. Масленникову за полезные обсуждения и поддержку в работе. Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных исследований Отделения математических наук РАН, №3.1 и Программы Минобрнауки России «Университеты России».

### ЛИТЕРАТУРА

1. P.K. Shukla. Generation of wakefields by elliptically polarized laser pulses in a magnetized plasma // *Phys. Plasmas*. 1999, v.4, p.147.
2. N.M. Laham, A.M. Al-Khateeb, A.S. Al Nasser, I.M. Odeh. The two plasmon decay of an extraordinary electromagnetic wave in a magnetized homogeneous plasma // *Phys. Plasmas*. 2000, v.7, p.3993.
3. N. Wadhvani, P. Kumar, P. Jha. Nonlinear theory of propagation of intense laser pulses in magnetized plasma // *Phys. Plasmas*. 2002, v.9, p.263.
4. V.B. Krasovitskii, V.G. Dorofeenko, V.I. Sotnikov, B. Bauer. Interaction of powerful laser pulse with magnetized plasma // *Phys. Plasmas*. 2004, v.11, p.724.
5. В.Б. Красовицкий, В.Г. Дорофеев, В.А. Туриков, В.И. Сотников. Распадная неустойчивость лазерной волны при поперечном распространении в магнитоактивной плазме // *Физика плазмы*. 2006, т.32, с.26.
6. А.Г. Литвак. Динамические нелинейные электромагнитные явления в плазме // *Вопросы теории плазмы* / Под ред. М.А. Леонтовича. М.: «Атомиздат», 1980, т.10, с.164.
7. Д. Фарина, С.В. Буланов. Медленные электромагнитные солитоны в электронно-ионной плазме // *Физика плазмы*. 2001, т.27, с.680.
8. Д.В. Красовицкий. Резонансный электромагнитный солитон в плазме // *Физика плазмы*. 1986, т.12, с.1394.
9. М.И. Рабинович, Д.И. Трубецков. *Введение в теорию колебаний и волн*. М.: «Наука», 1984, с.213.

