УДК 621.391.175

В.П. СТРЕЛЬНИКОВ

ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ DM -РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Abstract: *Techniques of definition of DM -distribution parameters for the diversified circuits and test specifications are submitted. In particular, maximum plausible estimations and estimations of parameters are submitted at full tests, maximum plausible estimations at censorial tests. Estimations of parameters DM -distribution are offered also at unit failures.*
Key words: *failure, distribution function, maximum likelihood estimations.*

Анотація: *Представлено методики визначення параметрів DM -розподілу для найрізноманітніших схем і умов випробувань. Зокрема, представлені максимально правдоподібні оцінки і моментні оцінки параметрів при повних іспитах, максимально правдоподібні оцінки при цензурованих випробуваннях. Запропоновані оцінки параметрів DM -розподілу при одиничних відмовах.*
Ключові слова: *відмова, функція розподілу, максимально правдоподібні оцінки.*

Аннотация: *Представлены методики определения параметров DM -распределения для самых разнообразных схем и условий испытаний. В частности, представлены максимально правдоподобные оценки и моментные оценки параметров при полных испытаниях, максимально правдоподобные оценки при цензурированных испытаниях. Предложены оценки параметров DM -распределения при единичных отказах.*
Ключевые слова: *отказ, функция распределения наработки, максимально правдоподобные оценки параметров.*

1. Введение

Методология установления количественных показателей надежности объектов на основании статистических данных об отказах при испытаниях или в процессе эксплуатации предусматривает принятие той или иной теоретической модели отказов (функции распределения наработки до отказа или на отказ) и определение параметров этой функции распределения. Если установлена функция распределения и определены параметры этой функции, тогда вычисляются все необходимые показатели надежности этих объектов (средняя наработка до отказа или на отказ, гамма-процентная наработка, вероятность безотказной работы за заданное время наработки, остаточный ресурс и др.).

В данной ситуации чрезвычайно важной представляется задача оценивания параметров принятой функции распределения, определяющего точность прогнозирования показателей надежности, особенно в условиях ограниченной статистики отказов. В настоящей работе представлены разнообразные оценки параметров DM -распределения, рекомендуемого стандартами [1, 2] в качестве теоретической модели распределения наработки до отказа.

2. Оценивание параметров *DM*-распределения на основе статистических данных об отказах при плане полных испытаний (план [NUN])

Максимально правдоподобные оценки параметров

Наиболее распространенным и эффективным с теоретической точки зрения методом определения выборочной оценки параметров распределения является метод наибольшего правдоподобия. Данный метод, как известно, обладает важными достоинствами: он всегда приводит к состоятельным оценкам, имеющим наименьшую возможную дисперсию и наилучшим образом использующим всю информацию о неизвестном параметре, содержащуюся в выборке.

Максимально правдоподобные оценки параметров распределения в случаях полных испытаний получают из выражения функции максимального правдоподобия:

$$L = \prod_{i=1}^{N} f_M(t_i;\, \mu, \nu),$$

где $t_1, t_2, ..., t_N$ – наработки до отказа (N – число образцов, поставленных на испытание); $f_M(t_i;\, \mu, \nu)$ – плотность вероятностей исследуемой функции распределения (DM -распределения).

Плотность DM -распределения:

$$f_M(t;\, \mu,\nu) \ = \ \frac{(\mu + t)}{2\nu t\sqrt{2\pi\,\mu\, t}}\, \exp\left[-\frac{(\mu - t)^2}{2\nu^2 \mu\, t}\right]. \quad (1)$$

Плотности (1) соответствует интегральная функция DM -распределения:

$$DM\,(t;\, \mu,\nu) \ = \Phi\left(\frac{t-\mu}{\nu\sqrt{\mu t}}\right), \quad (2)$$

где $\Phi(\cdot)$ – функция нормированного нормального распределения.

Произведем необходимые математические преобразования с целью получения выражений уравнений системы (из двух уравнений), на основании которой вычисляются максимально правдоподобные оценки параметров DM -распределения.

$$\ln L = \sum_{i=1}^{N} \ln\left[\frac{(\mu + t_i)}{2\nu t_i\sqrt{2\pi\mu t_i}}\exp\left\{-\frac{(\mu - t_i)^2}{2\nu^2\mu t_i}\right\}\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\ln(\mu + t_i) - N\ln\nu - \frac{N}{2}\ln\mu - \sum_{i=1}^{N}\left(2t_i\sqrt{2\pi t_i}\right) - \sum_{i=1}^{N}\frac{(\mu - t_i)^2}{2\nu^2\mu t_i}\ . \quad (3)$$

Определяем частную производную от функции правдоподобия (3) по первому параметру (μ):

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\mu + t_i} - \frac{N}{2\mu} - \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{(\mu - t_i)(\mu + t_i)}{2\nu^2\mu^2 t_i}\right] = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\mu + t_i} - \frac{N}{2\mu} - \frac{1}{2\nu^2}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{t_i} + \frac{1}{2\nu^2\mu^2}\sum_{i=1}^{N} t_i\ .$$

Произведя некоторые преобразования, получаем первое уравнение системы для определения максимально правдоподобных оценок в следующем виде:

$$\nu^2\mu^2\Theta^{-1} - \mu^2 G^{-1} - \mu\nu^2 + S = 0,$$

где $\Theta = N\left[2\sum_{i=1}^{N}(\mu + t_i)^{-1}\right]^{-1}$; $G = N\left(\sum_{i=1}^{N} t_i^{-1}\right)^{-1}$; $S = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} t_i$.

Определяем частную производную от функции правдоподобия (3) по второму параметру (ν):

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \nu} = -\frac{N}{\nu} + \sum_{i=1}^{N}\frac{(\mu - t_i)^2}{\nu^3\mu t_i} = -\frac{N}{\nu} + \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\mu}{\nu^3 t_i} - \frac{2}{\nu^3} + \frac{t_i}{\nu^3\mu}\right).$$

Произведя некоторые преобразования, получаем второе уравнение системы для определения максимально правдоподобных оценок в следующем виде:

$$2+\nu^{2}-\mu G^{-1}-\frac{S}{\mu}=0.$$

Таким образом, максимально правдоподобные оценки определяются из решения следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \tilde{\nu}^{2}\tilde{\mu}^{2}\Theta^{-1}-\tilde{\mu}^{2}G^{-1}-\tilde{\mu}\tilde{\nu}^{2}+S=0 \ ; \\ 2+\tilde{\nu}^{2}-\tilde{\mu} \quad G^{-1}-\tilde{\mu}^{-1}S=0 \ . \end{cases} \tag{4}$$

Решение последней системы можно получить таким образом. Из второго уравнения определяют выражение для параметра формы $\tilde{\nu}^{2}=\tilde{\mu}G^{-1}+\tilde{\mu}^{-1}S-2.$

Произведя замену $\tilde{\nu}^{2}$ в первом уравнении, получают следующее квадратное уравнение относительно параметра $\tilde{\mu}$:

$$\tilde{\mu}^{2}-2\tilde{\mu}(G+\Theta)+2\Theta G+GS=0.$$

Единственное решение последнего уравнения при условии $G<\tilde{\mu}<S$ приводит к выражению максимально правдоподобной оценки параметра $\tilde{\mu}$.

Таким образом, максимально правдоподобные оценки параметров DM-распределения, вытекающие из решения системы уравнений (4), имеют следующий вид:

$$\tilde{\mu}=G+\Theta-\left(G^{2}-SG+\Theta^{2}\right)^{1/2} \ ; \tag{5}$$

$$\tilde{\nu}=\left(\tilde{\mu}G^{-1}+\tilde{\mu}^{-1}S-2\right)^{1/2}. \tag{6}$$

В работе [3] предложена упрощенная состоятельная оценка параметра масштаба *DM*-распределения типа

$$\tilde{\mu}=(SG)^{1/2} \ . \tag{7}$$

Последняя оценка параметра масштаба DM-распределения (7) может успешно использоваться совместно с оценкой параметра формы (6) DM-распределения. Заметим, что при достаточно большом N (более 100) оценки (5) и (7) практически совпадают.

Моментные оценки параметров

Иногда удобно пользоваться моментными оценками параметров, которые вычисляются в результате приравнивания оценок выборочных моментов с соответствующими теоретическими моментами исследуемых распределений. Как показывает практика, при достаточно большом N (более 100) моментные и максимально правдоподобные оценки параметров исследуемых распределений практически совпадают.

Моментные оценки параметров DM-распределения:

$$\tilde{\mu}=\frac{5S^2-D}{4S+\sqrt{S^2+3D}}\,; \tag{8}$$

$$\tilde{\nu}=\left[\frac{2\left(S\sqrt{S^2+3D}+D-S^2\right)}{5S^2-D}\right]^{1/2}. \tag{9}$$

где обозначено: S – выборочное среднее; $D=\frac{1}{(N-1)}\sum_{i=1}^{N}\left(t_i-S\right)^2$ – выборочная дисперсия.

3. Оценивание параметров *DM*-распределения на основе статистических данных об отказах при усеченной выборке

Максимально правдоподобные оценки параметров DM-распределения в случаях усеченных испытаний (в общем случае для многократно цензурированной выборки) получают из выражения

$$L=\prod_{i=1}^{r} f_M\,(t_i\,;\,\mu,\nu)\prod_{j=1}^{N-r}\left[1-DM\,(\tau_j\,;\,\mu,\,\nu)\right], \tag{10}$$

где $t_1,\,t_2,...,t_r$ – наработки до отказа; $\tau_1,\tau_2,...,\tau_{N-r}$ – наработки неотказавших образцов (N – число образцов, поставленных на испытание).

В связи с достаточно сложными выражениями частных производных функции максимального правдоподобия приводим несколько подробно последовательность получения выражений для уравнений системы, из которой определяются максимально правдоподобные оценки параметров DM-распределения в условиях многократно цензурированной выборки.

Логарифмируем функцию (10):

$$\ln L=\sum_{i=1}^{r}\ln\left[f_M\left(t_i\,;\,\mu,\,\nu\right)\right]+\sum_{j=1}^{N-r}\ln\left[1-DM\left(\tau_j\,;\,\mu,\,\nu\right)\right].$$

Берем частную производную от последнего выражения по параметру μ и определяем первое уравнение системы.

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\mu}=\sum_{i=1}^{r}\frac{\partial\left(\ln\left[f_M\,(t_i\,;\,\mu,\nu)\right]\right)}{\partial\mu}-\sum_{j=1}^{N-r}\frac{\partial DM\,(t_j\,;\,\mu,\,\nu)\,/\,\partial\mu}{1-DM\,(t_j\,;\,\mu,\,\nu)}\;;$$

$$\sum_{i=1}^{r}\frac{\partial\left(\ln\left[f_M\,(t_i\,;\,\mu,\nu)\right]\right)}{\partial\mu}=\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{\mu+t_i}-\frac{r}{2\mu}-\frac{1}{2\nu^2}\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{t_i}+\frac{1}{2\nu^2\mu^2}\sum_{i=1}^{r}t_i\;;$$

$$\frac{\partial DM\,(t_j\,;\,\mu,\,\nu)}{\partial\mu}=\int_{-\infty}^{t_j}\frac{\partial f_M\,(t;\,\mu,\,\nu)}{\partial\mu}\,dt=$$

$$=\frac{1}{4\mu}\int_{-\infty}^{t_j}f_N\,(t;\,\mu,\,\nu)\,dt-\frac{1}{4\mu^2}\int_{-\infty}^{t_j}t\;f_N\,(t;\,\mu,\,\nu)\,dt+\frac{1}{2\nu^2\mu^2}\int_{-\infty}^{t_j}t\;f_M\,(t;\,\mu,\,\nu)\,dt\;-\frac{1}{2\nu^2}\int_{-\infty}^{t_j}\frac{1}{t}\,f_M\,(t;\,\mu,\,\nu)\,dt\,.$$

После соответствующих подстановок получаем

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu}=\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{\mu+t_i}-\frac{r}{2\mu}-\frac{1}{2\nu^2}\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{t_i}+\frac{1}{2\nu^2\mu^2}\sum_{i=1}^{r}t_i-\sum_{j=1}^{N-r}\left[\frac{\frac{DN(\tau_j;\mu,\nu)}{4\mu}-\frac{m_{1j}^{DN}}{4\mu^2}+\frac{m_{1j}^{DM}}{2\nu^2\mu^2}-\frac{m_{-1j}^{DM}}{2\nu^2}}{1-DM(\tau_j;\mu,\nu)}\right],$$

где $f_N(t)$ – плотность DN-распределения; $m_{1j}^{DN}=\int_{-\infty}^{\tau_j} t\, f_N(t)\,dt$; $m_{1j}^{DM}=\int_{-\infty}^{\tau_j} t\, f_M(t)\,dt$;

$$m_{-1j}^{DM}=\int_{-\infty}^{\tau_j}\frac{1}{t}\, f_M(t)\,dt;\ DN(\tau_j;\mu,\nu)=\Phi\left(\frac{\tau_j-\mu}{\nu\sqrt{\mu\tau_j}}\right)+\exp\left(\frac{2}{\nu^2}\right)\Phi\left(-\frac{\tau_j+\mu}{\nu\sqrt{\mu\tau_j}}\right);$$

$$DM(\tau_j;\mu,\nu)=\Phi\left(\frac{\tau_j-\mu}{\nu\sqrt{\mu\tau_j}}\right).$$

Аналогично вышеприведенной процедуре берем частную производную от функции правдоподобия по параметру ν и определяем второе уравнение системы.

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \nu}=\sum_{i=1}^{r}\frac{\partial(\ln[f_M(t_i;\mu,\nu)])}{\partial \nu}-\sum_{j=1}^{N-r}\frac{\partial DM(t_j;\mu,\nu)/\partial\nu}{1-DM(t_j;\mu,\nu)};$$

$$\sum_{i=1}^{r}\frac{\partial(\ln[f_M(t_i;\mu,\nu)])}{\partial \nu}=-\frac{r}{\nu}+\frac{\mu}{\nu^3}\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{t_i}+\frac{1}{\mu\nu^3}\sum_{i=1}^{r}t_i-\frac{2r}{\nu^3};$$

$$\frac{\partial DM(t_j;\mu,\nu)}{\partial \nu}=\int_{-\infty}^{t_j}\frac{\partial f_M(t;\mu,\nu)}{\partial\nu}dt=$$

$$=-\frac{(2+\nu^2)}{\nu^3}\int_{-\infty}^{t_j} f_M(t;\mu,\nu)\,dt+\frac{1}{\mu\nu^3}\int_{-\infty}^{t_j} t\, f_M(t;\mu,\nu)\,dt+\frac{\mu}{\nu^3}\int_{-\infty}^{t_j}\frac{1}{t}\, f_M(t;\mu,\nu)\,dt.$$

После соответствующих подстановок получаем

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \nu}=-\frac{r}{\nu}+\frac{\mu}{\nu^3}\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{t_i}+\frac{1}{\mu\nu^3}\sum_{i=1}^{r}t_i-\frac{2r}{\nu^3}-\frac{1}{\nu^3}\sum_{j=1}^{N-r}\left[\frac{-(2+\nu^2)DM(\tau_j;\mu,\nu)+\mu\, m_{-1j}^{DM}+\frac{1}{\mu}m_{1j}^{DM}}{1-DM(\tau_j;\mu,\nu)}\right].$$

Выполнив некоторые простые преобразования, получаем следующую систему уравнений для определения максимально правдоподобных оценок параметров DM-распределения в условиях многократно цензурированной выборки:

$$
\begin{cases}
\nu^2 - 2\nu^2 \mu K_r - \dfrac{m_1^{\sim}}{\mu} + \mu\, m_{-1}^{\sim} + \dfrac{1}{r}\sum\limits_{j=1}^{N-r} \left[\dfrac{\dfrac{\nu^2}{2} DN(\tau_j;\mu,\nu) - \dfrac{\nu^2\, m_{1j}^{DN}}{2\mu} - \mu\, m_{-1j}^{DM} + \dfrac{m_{1j}^{DM}}{\mu}}{1 - DM(\tau_j;\mu,\nu)} \right] = 0; \\[2ex]
2 + \nu^2 - \dfrac{m_1^{\sim}}{\mu} - \mu\, m_{-1}^{\sim} - \dfrac{1}{r}\sum\limits_{j=1}^{N-r} \left[\dfrac{(2+\nu^2) DM(\tau_j;\mu,\nu) - \mu\, m_{-1j}^{DM} - \dfrac{m_{1j}^{DM}}{\mu}}{1 - DM(\tau_j;\mu,\nu)} \right] = 0,
\end{cases}
\tag{11}
$$

где $m_1^{\sim} = \dfrac{1}{r}\sum\limits_{i=1}^{r} t_i$; $m_{-1}^{\sim} = \dfrac{1}{r}\sum\limits_{i=1}^{r} \dfrac{1}{t_i}$; $K_r = \dfrac{1}{r}\sum\limits_{i=1}^{r} \dfrac{1}{t_i + \mu}$.

Решение последней системы уравнений представляет последовательную итерационную процедуру. В качестве начальных значений вычисляемых параметров можно рекомендовать $\mu_0 = \left(m_1^{\sim} / m_{-1}^{\sim}\right)^{1/2}$; $\nu_0 = \left(\mu_0 m_{-1}^{\sim} + m_1^{\sim} / \mu_0 - 2\right)^{1/2}$.

При планах испытаний [NUr] или [NUT], то есть при однократном усечении выборки, максимально правдоподобные оценки параметров DM -распределения вычисляют, решая систему уравнений, которая представляет собой частный случай системы уравнений (11). В частности, r – число отказов до момента усечения за время испытаний по плану [NUr]. Если реализуется план испытаний [NUT], тогда $r = d$, где d – число отказов при плане [NUT] (при этом $t_r = t_d$):

$$
\begin{cases}
\nu^2 - 2\nu^2 \mu K_r - \dfrac{m_1^{\sim}}{\mu} + \mu m_{-1}^{\sim} + \dfrac{(N-r)}{r\left[1 - DM(t_r;\mu,\nu)\right]} \left[\dfrac{\nu^2}{2} DN(t_r;\mu,\nu) - \dfrac{\nu^2 m_{1r}^{DN}}{2\mu} - \mu\, m_{-1r}^{DM} + \dfrac{m_{1r}^{DM}}{\mu} \right] = 0; \\[2ex]
2 + \nu^2 - \dfrac{m_1^{\sim}}{\mu} - \mu\, m_{-1}^{\sim} - \dfrac{(N-r)}{r\left[1 - DM(t_r;\mu,\nu)\right]} \left[(2+\nu^2) DM(t_r;\mu,\nu) - \mu\, m_{-1r}^{DM} - \dfrac{m_{1r}^{DM}}{\mu} \right] = 0,
\end{cases}
\tag{12}
$$

где основные обозначения прежние, $DN(t_r;\mu,\nu) = \Phi\left(\dfrac{t_r - \mu}{\nu\sqrt{\mu t_r}}\right) + \exp\left(\dfrac{2}{\nu^2}\right)\Phi\left(-\dfrac{t_r + \mu}{\nu\sqrt{\mu t_r}}\right)$;

$$
DM(t_r;\mu,\nu) = \Phi\left(\frac{t_r - \mu}{\nu\sqrt{\mu t_r}}\right); \quad m_{1r}^{DN} = \int_{-\infty}^{t_r} t\, f_N(t)\, dt; \quad m_{1r}^{DM} = \int_{-\infty}^{t_r} t\, f_M(t)\, dt;
$$

$$
m_{-1r}^{DM} = \int_{-\infty}^{t_r} \frac{1}{t} f_M(t)\, dt.
$$

4. Оценивание параметров *DM*-распределения при единичных отказах

На практике наиболее распространенной ситуацией представляется возможным получение информации о нескольких отказах (порядка 5–10), объем статистики которой не позволяет с требуемой точностью оценить оба параметра DM -распределения. В связи с тем, что DM -

распределение представляет собой вероятностно-физическую модель отказов, параметры которой имеют конкретную физическую интерпретацию, в частности, параметр формы ν этого распределения практически совпадает с коэффициентом вариации наработки до отказа, с одной стороны, и равен коэффициенту вариации процесса деградации, приводящего к отказу, с другой стороны. Это открывает возможность оценить данный параметр априори на основании многочисленных рекомендаций в стандартах [1, 2, 4] и других публикаций [5, 6].

Если известно, априорное значение параметра формы ν, состоятельной оценкой которого может являться коэффициент вариации процесса деградации или же известно значение коэффициента вариации распределения отказов аналогов, то параметр масштаба μ DM-распределения можно оценить при единичном отказе, используя метод квантилей, по следующей формуле:

$$\ddot{\mu} = t_1 \left(1 + \frac{\nu^2 U_{F_1}^2}{2} - \nu U_{F_1} \sqrt{1 + \frac{\nu^2 U_{F_1}^2}{4}}\right). \qquad (13)$$

где t_1 – наработка до первого отказа из N испытуемых объектов; $F_1 = \frac{1}{N}$ – эмпирическая вероятность первого отказа.

При нескольких отказах точечную оценку параметра масштаба μ DM-распределения вычисляют по формуле

$$\ddot{\mu} = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} t_i \left(1 + \frac{\nu^2 U_{F_i}^2}{2} - \nu U_{F_i} \sqrt{1 + \frac{\nu^2 U_{F_i}^2}{4}}\right), \qquad (14)$$

где F_i – вероятность i-го отказа ($F_i = \frac{i}{N}$).

Анализируя известные результаты, можно заметить, что первые отказы приводят к большим погрешностям в оценке параметра масштаба DM-распределения. Какой бы то ни было закономерности при этом не обнаружено, так что оценки $\ddot{\mu}$, полученные по первым единичным отказам, могут быть как завышенными, так и заниженными по отношению к реальному значению. Оценки $\ddot{\mu}$, полученные методом квантилей, можно усреднять, вводя весовой коэффициент, который усиливает значимость более поздних отказов. В таком случае выражение для точечной оценки параметра масштаба DM-распределения при нескольких отказах (r) будет иметь вид

$$\ddot{\mu} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{r} i} \cdot \sum_{i=1}^{r} i\, t_i \left(1 + \frac{\nu^2 U_{F_i}^2}{2} - \nu U_{F_i} \sqrt{1 + \frac{\nu^2 U_{F_i}^2}{4}}\right). \qquad (15)$$

5. Заключение

В настоящей работе представлены методики определения параметров DM-распределения для самых разнообразных схем и условий испытаний (наблюдений). В частности, представлены максимально правдоподобные оценки и моментные оценки параметров при полных испытаниях (план [NUN]), максимально правдоподобные оценки при многократно цензурированных испытаниях (планы испытаний [NRr], [NRT]), а также при однократно цензурированных испытаниях [NUr], [NUT]. Предложены также оценки параметров DM -распределения при единичных отказах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. ГОСТ 27.005-97. Надёжность в технике. Модели отказов. Основные положения. – Введ. 01.01.99. – 45 с.

2. ДСТУ 2862-94. Надёжность техники. Методы расчета надежности. Общие требования.– Введ. 01.01.96.-40 с.

3. Birnbaum Z.W., Saunders S.C. A new family of life distribution // J. Appl. Prob. – 1969. – N 6. – P. 319–347.

4. ДСТУ 3004-95. Надежность техники. Методы оценки показателей надежности по экспериментальным данным. – Введ.01.01.96. – 122 с.

5. Погребинский С.Б., Стрельников В.П. Проектирование и надёжность многопроцессорных ЭВМ. – М.: Радио и связь, 1988. – 168 с.

6. Стрельников В.П., Федухин А.В. Оценка и прогнозирование надежности электронных элементов и систем. – К.: Логос, 2002. – 486 с.