Н. М. Калантарлы,
канд. физ.-мат. наук

Институт математики
и механики
НАН Азербайджана
Азербайджан, г. Баку,
e-mail: nailyak1975@gmail.com

Ключові слова: *круговий диск, температурне поле, зона ослаблених міжчасткових зв'язків, зусилля в зв'язках, тріщиноутворення.*

УДК 539.375

РАСЧЕТНАЯ МОДЕЛЬ ТРЕЩИНООБРАЗОВАНИЯ В КРУГОВОМ НАГРЕВАЕМОМ ДИСКЕ

Розроблено розрахункову модель, в рамках якої можливо описати тріщиноутворення в круговому дискові під дією температурних напружень. Вважається, що температурне поле в круговому дискові має осьову симетрію, а пружні характеристики та коефіцієнт лінійного температурного розширення матеріалу не залежать від температури. Отримано співвідношення для визначення критичного значення інтенсивності теплової дії, за якої в круговому дискові відбудеться тріщиноутворення.

Постановка задачи

Во многих машинах и механизмах диски испытывают воздействие тепловой нагрузки. Это обстоятельство придает разработке расчетной модели трещинообразования в круговом нагреваемом диске особую важность.

Рассмотрим круглый диск, свободный при нулевой температуре от напряжений (рис. 1). Под влиянием тепловой нагрузки в процессе эксплуатации в материале диска будет возникать зона предразрушения (прослойка перенапряженного материала). Будем моделировать зону предразрушения как область ослабленных межчастичных связей материала диска. Задачу о трещинообразовании в круговом диске рассматриваем как квазистатическую в постановке плоского напряженного состояния. Считается, что температурное поле в нагреваемом диске имеет осевую симметрию. Упругие постоянные и коэффициент линейного температурного расширения материала диска от температуры не зависят.

Пусть по мере нагружения диска тепловой нагрузкой в материале возникает произвольно размещенная прямолинейная зона предразрушения. Обозначим ее длину через $2\ell_1$. В центре зоны предразрушения разместим начало локальной системы координат $x_1O_1y_1$ таким образом, чтобы ось x_1 совпадала с линией ослабленной зоны и образовывала угол α_1 с осью x ($\theta = 0$) (рис. 1). Взаимодействие берегов зоны предразрушения будем представлять как связи между берегами ослабленной зоны с заданной диаграммой деформирования. Считается, что закон деформирования межчастичных связей материала круглого диска задан. В общем случае этот закон нелинейный [1–3]. Размеры области предразрушения, как и физическая природа связей между берегами ослабленной зоны, зависят от вида материала нагреваемого диска.

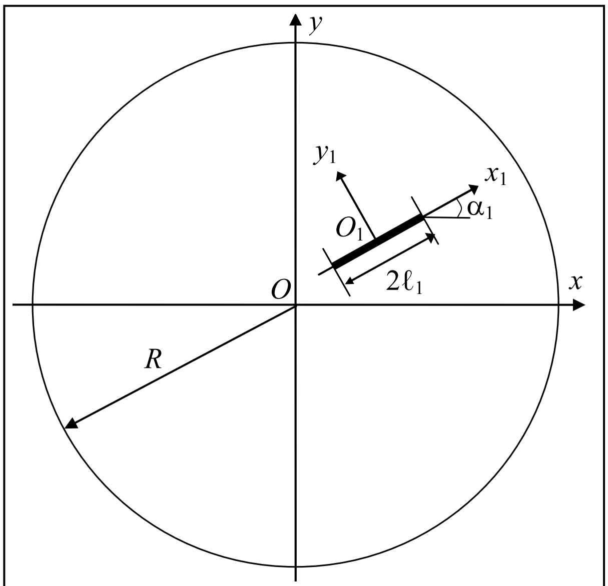

Рис. 1. Расчетная схема задачи о трещинообразовании в диске

Задачу о напряженно-деформированном состоянии кругового диска, в котором имеется прослойка перенапряженного материала, можно [4] свести к задаче о напряженно-деформированном состоянии в идеально упругом теле, которое ослаблено разрезом с взаимодействующими между собой по некоторому закону поверхностями. Тогда прежде всего следует выяснить зависимость сил сцепления от перемещений (раскрытия берегов зоны предразрушения) в той части диска, где имеют место силы межчастичного взаимодействия (притяжения) между берегами. Далее требуется оценить напряженное состояние вблизи ослабленной зоны с учетом внешней нагрузки и сил сцепления и определить зависимости критических нагрузок, при которых в материале диска появится трещина. В общем случае решение такой задачи наталкивается на большие математические трудности.

Моделировать зону предразрушения возможно явным приложением к поверхностям зоны сил сцепления, сдерживающих ее раскрытие. В рассматриваемом случае трещинообразование в круговом диске представляет собой процесс перехода зоны предразрушения в зону разорванных связей между поверхностями материала.

При радиальном распределении температуры $T = T(r)$ нетрудно найти частное решение уравнений равновесия и совместности деформаций в виде

$$\sigma_r^0 = -2\mu\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\alpha}{r^2}\int_0^r T(\rho)\rho d\rho, \qquad \tau_{r\theta}^0 = 0,$$
$$\sigma_\theta^0 = 2\mu\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}\alpha\left[\frac{1}{r^2}\int_0^r T(\rho)\rho d\rho - T(r)\right], \tag{1}$$

где α – коэффициент линейного температурного расширения материала; λ и μ – постоянные Ламе материала диска.

При воздействии температурных напряжений в круговом диске в связях, соединяющих берега зон предразрушения, будут возникать нормальное $q_{y_1}(x_1)$ и касательное $q_{x_1y_1}(x_1)$ усилия. Величины этих напряжений $q_{y_1}(x_1)$ и $q_{x_1y_1}(x_1)$ и размер ℓ_1 зоны предразрушения заранее неизвестны и подлежат определению.

Основные соотношения поставленной задачи должны быть дополнены уравнением, связывающим раскрытие берегов зоны предразрушения и усилия в связях. Это уравнение, без потери общности, можно представить в виде

$$\left(v_1^+(x_1,0) - v_1^-(x_1,0)\right) - i\left(u_1^+(x_1,0) - u_1^-(x_1,0)\right) = \Pi(x_1,\sigma_1)\left(q_{y_1}(x_1) - iq_{x_1y_1}(x_1)\right), \tag{2}$$

где функция $\Pi(x_1,\sigma_1)$ представляет собой эффективную податливость связей, зависящую от натяжения связей; $\sigma_1 = \sqrt{q_{y_1}^2 + q_{x_1y_1}^2}$ – модуль вектора усилий в связях; $(v_1^+ - v_1^-)$ – нормальная и $(u_1^+ - u_1^-)$ – касательная составляющие раскрытия берегов зоны предразрушения. При постоянном значении функции Π имеем в соотношении (2) линейный закон деформирования.

Для определения значения интенсивности тепловой нагрузки, при которой происходит зарождение трещины в диске, нужно постановку задачи дополнить критерием (условием) появления трещины (разрыва межчастичных связей материала). Используем критерий критического раскрытия берегов зоны предразрушения

$$\left|\left(v_1^+ - v_1^-\right) - i\left(u_1^+ - u_1^-\right)\right| = \delta_c, \tag{3}$$

где δ_c – характеристика сопротивления материала диска трещинообразованию, определяется опытным путем [1].

Это дополнительное условие позволяет установить параметры нагреваемого кругового диска, при которых происходит трещинообразование в диске.

Считается, что зона предразрушения ориентирована в направлении максимальных растягивающих напряжений, возникающих в круговом диске. Берега зоны предразрушения взаимодействуют между собой так, что это взаимодействие (связи между берегами) сдерживает зарождение трещины. Под действием тепловой нагрузки на диск в связях, соединяющих берега зоны предразрушения, будут возникать нормальные $q_{y_1}(x_1)$ и касательные $q_{x_1y_1}(x_1)$ усилия, смыкающие берега зоны предразрушения. Таким образом, к берегам зоны предразрушения будут приложены сжимающие нормальные и касательные напряжения, численно равные $q_{y_1}(x_1)$ и $q_{x_1y_1}(x_1)$, соответственно. Значения этих напряжений заранее неизвестны и подлежат определению.

Граничные условия в рассматриваемой задаче о зарождении трещины в нагреваемом диске имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} &\sigma_r + i\tau_{r\theta} = 0 \qquad \text{на } \Gamma, \\ &\sigma_{y_1} + i\tau_{x_1 y_1} = q_{y_1}(x_1) + iq_{x_1 y_1}(x_1) \qquad \text{при } y_1 = 0 \quad |x_1| \le \ell_1, \end{aligned} \tag{4}$$

где i – мнимая единица; Γ – граница круга (диска).

Метод решения

Представим искомое напряженное состояние в диске в виде

$$\sigma_r = \sigma_r^0 + \sigma_r^1, \qquad \sigma_\theta = \sigma_\theta^0 + \sigma_\theta^1, \qquad \tau_{r\theta} = \tau_{r\theta}^0 + \tau_{r\theta}^1, \tag{5}$$

где компоненты напряжений σ_r^0, σ_θ^0 и $\tau_{r\theta}^0$ определяются согласно формулам (1).

Для определения введенных составляющих напряжений σ_r^1, σ_θ^1, $\tau_{r\theta}^1$ удовлетворяющих уравнениям плоской задачи теории вне зоны предразрушения на основании (4), (5), приходим к краевой задаче

$$\sigma_r^1 + i\tau_{r\theta}^1 = F(t) \qquad \text{на } \Gamma, \tag{6}$$

$$\sigma_{y_1}^1 + i\tau_{x_1 y_1}^1 = f_1(x_1) + q_{y_1}(x_1) + iq_{x_1 y_1}(x_1) \qquad \text{при } y_1 = 0 \quad |x_1| \le \ell_1, \tag{7}$$

Выражения для функций $F(t)$ и $f_1(x_1)$ легко находятся на основании предыдущих соотношений и формул Колосова–Мусхелишвили [5].

Краевые условия (6)– (7) с помощью формул Колосова–Мусхелишвили [5] можно записать в виде граничной задачи для отыскания комплексных потенциалов $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ в следующем виде:

$$\Phi(\tau) + \overline{\Phi(\tau)} - e^{2i\theta}\left(\bar{\tau}\Phi'(\tau) + \Psi(\tau)\right) = \overline{F(\tau)}, \tag{8}$$

$$\Phi(t) + \overline{\Phi(t)} + t\overline{\Phi'(t)} + \overline{\Psi(t)} = \overline{f_1(t)} + q_{y_1} - iq_{x_1 y_1}, \tag{9}$$

где $\tau = R\exp(i\theta)$; t – аффикс точек берегов зоны предразрушения.

Комплексные потенциалы $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, дающие решение граничной задачи (8)–(9), запишеим так:

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \Phi_1(z), \qquad \Psi(z) = \Psi_0(z) + \Psi_1(z). \tag{10}$$

Здесь комплексные функции $\Phi_1(z)$ и $\Psi_1(z)$ ищем в виде

$$\begin{aligned} &\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\ell_1}^{\ell_1} \frac{g_1(t)dt}{t - z_1}, \\ &\Psi_1(z) = \frac{e^{-2i\alpha_1}}{2\pi}\int_{-\ell_1}^{\ell_1} \left[\frac{\overline{g_1(t)}}{t - z_1} - \frac{\bar{T}_1 e^{i\alpha_1}}{(t - z_1)^2} g_1(t)\right] dt, \end{aligned} \tag{11}$$

где $T_1 = te^{i\alpha_1} + z_1^0$; $z_1 = e^{-i\alpha_1}\left(z - z_1^0\right)$; $g_1(t)$ – искомая функция, характеризующая раскрытие (длину связи) при переходе через линию зоны предразрушения

$$g_1(x_1) = \frac{2\mu}{i(1+\kappa)}\frac{\partial}{\partial x_1}\left[u_1^+(x_1,0) - u_1^-(x_1,0) + i\left(v_1^+(x_1,0) - v_1^-(x_1,0)\right)\right].$$

Неизвестная функция $g_1(t)$ и комплексные потенциалы $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$ должны быть определены из граничных условий на контуре Γ ($r = R$) и берегах зоны предразрушения. Используя представления (10)–(11), для определения комплексных функций $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$ граничные условия (8) представим как

$$\Phi_0(\tau) + \overline{\Phi_0(\tau)} - e^{-2i\theta}\left[\tau\overline{\Phi'_0(\tau)} + \overline{\Psi_0(\tau)}\right] = \overline{F(\theta)} - \left(f_1(\theta) - if_2(\theta)\right), \tag{12}$$

где $f_1(\theta) - if_2(\theta) = \Phi_1(\tau) + \overline{\Phi_1(\tau)} - e^{-2i\theta}\left[\tau\overline{\Phi'_1(\tau)} + \overline{\Psi_1(\tau)}\right]$.

Для решения граничной задачи (12) относительно комплексных потенциалов $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$ используем метод Н. И. Мусхелишвили [5]. После некоторых преобразований получаем

$$\Phi_0(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\ell_1}^{\ell_1}\left\{\left(\frac{1}{z\bar{T}_1-1}+\frac{1}{2}\right)\bar{T}_1 e^{i\alpha_1}g_1(t)+\left[\frac{T_1}{2}-\frac{z^2\bar{T}_1-2z+T_1}{\left(z\bar{T}_1-1\right)^2}\right]e^{-i\alpha_1}\overline{g_1(t)}\right\}dt+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma F(\tau)\left(\frac{1}{\tau-z}-\frac{1}{2\tau}\right)d\tau,$$

$$\Psi_0(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\ell_1}^{\ell_1}\left[\frac{e^{i\alpha_1}\bar{T}_1^3}{\left(z\bar{T}_1-1\right)^2}g_1(t)+\left(z^2\bar{T}_1^2+4-3z\bar{T}_1+zT_1\bar{T}_1^2-3T_1\bar{T}_1\right)\frac{\bar{T}_1e^{-i\alpha_1}}{\left(z\bar{T}_1-1\right)^3}\overline{g(t)}\right]dt+ \qquad (13)$$

$$+\frac{1}{z^2}\Phi_{00}(z)+\frac{1}{z^2}\bar{\Phi}_{00}\left(\frac{1}{z}\right)-\frac{1}{z}\Phi'_{00}(z), \qquad \Phi_{00}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma F(\tau)\left(\frac{1}{\tau-z}-\frac{1}{2\tau}\right)d\tau.$$

Теперь, удовлетворяя граничным условиям (9) на берегах зоны предразрушения аналитическими функциями (10), (11), (13), после некоторых преобразований, получим комплексное сингулярное интегральное уравнение относительно неизвестной функции $g_1(x_1)$

$$\int_{-\ell_1}^{\ell_1}\left[R(t,x_1)g_1(t)+S(t,x_1)\overline{g_1(t)}\right]dt=\pi\left[\overline{f_1(x_1)}+q_{y_1}(x_1)-iq_{x_1y_1}(x_1)+f_0(x_1)\right] \qquad |x_1|\le\ell_1, \qquad (14)$$

Здесь $f_0(x_1)=-\left[\Phi_{00}(x_1)+\overline{\Phi_{00}(x_1)}+x_1\overline{\Phi'_{00}(x_1)}+\overline{\Psi_{00}(x_1)}\right]$, $\Psi_{00}(z)=\frac{1}{z^2}\Phi_{00}(z)+\frac{1}{z^2}\bar{\Phi}_{00}\left(\frac{1}{z}\right)-\frac{1}{z}\Phi'_{00}(z)$,

$$R(t,x_1)=\frac{e^{i\alpha_1}}{2}\left(\frac{1}{T_1-X_1}+\frac{e^{-2i\alpha_1}}{\bar{T}_1-\bar{X}_1}\right)-\frac{e^{i\alpha_1}}{2}\left[\frac{X_1\bar{T}_1^2}{1-X_1\bar{T}_1}+\frac{\bar{X}_1^2T_1-2\bar{X}_1+\bar{T}_1}{\left(1-T_1\bar{X}_1\right)^2}+\right.$$

$$\left.+e^{-2i\alpha_1}\frac{2X_1\left(T_1\bar{T}_1-1\right)+\bar{T}_1^2\left(\bar{X}_1+\bar{T}_1\right)\left(\bar{X}_1T_1-3\right)+4T_1}{\left(1-T_1\bar{X}_1\right)^3}\right],$$

$$S(t,x_1)=\frac{e^{-i\alpha_1}}{2}\left[\frac{1}{\bar{T}_1-\bar{X}_1}-\frac{T_1-X_1}{\left(\bar{T}_1-\bar{X}_1\right)^2}e^{-2i\alpha_1}\right]-\frac{e^{-i\alpha_1}}{2}\left[\frac{T_1^2X_1}{1-T_1\bar{X}_1}+\frac{X_1^2\bar{T}_1-2X_1+T_1}{\left(1-X_1\bar{T}_1\right)^2}+\frac{T_1^2\left(X_1-T_1\right)e^{-2i\alpha_1}}{\left(1-T_1\bar{X}_1\right)^2}\right];$$

$$X_1=x_1e^{i\alpha_1}+z_1^0.$$

Для внутренней зоны предразрушения к сингулярному интегральному уравнению (14) с ядром Коши необходимо добавить равенство

$$\int_{-\ell_1}^{\ell_1}g_1(t)dt=0. \qquad (15)$$

Это равенство вытекает из однозначности смещений при обходе контура зоны ослабленных межчастичных связей материала (предразрушения).

Для левой части соотношения (2) имеем

$$\left(\upsilon_1^+-\upsilon_1^-\right)-i\left(u_1^+-u_1^-\right)=-\frac{1+\kappa}{2\mu}\int_{-\ell_1}^{x_1}g_1(x_1)dx_1. \qquad (16)$$

С учетом (16) соотношение (2) принимает следующий вид:

$$-\frac{1+\kappa}{2\mu}\int_{-\ell_1}^{x_1} g_1(x_1)dx_1 = \Pi(x_1,\sigma_1)\big(q_{y_1}(x_1) - iq_{x_1y_1}(x_1)\big). \tag{17}$$

Если представить неизвестную функцию $g_1(x_1)$, а также нагрузочную функцию $f_0(x_1)$ и $f_1(x_1)$ как

$$g_1(x_1) = v_1(x_1) - iu_1(x_1), \qquad f_0(x_1) = \sigma_0(x_1) - i\tau_0(x_1), \qquad f_1(x_1) = \sigma_1(x_1) + i\tau_1(x_1),$$

то из одного комплексного сингулярного интегрального уравнения (14) после отделения действительных и мнимых частей получим для определения $v_1(x_1)$ и $u_1(x_1)$ два действительных интегральных уравнений.

Аналогичные действия проделаем и с дополнительным условием (15), в результате находим

$$\int_{-\ell_1}^{\ell_1} v_1(t)dt = 0, \qquad \int_{-\ell_1}^{\ell_1} u_1(t)dt = 0\,. \tag{18}$$

Теперь, аналогичные действия проделаем с условием (17), в результате получим

$$-\frac{1+\kappa}{2\mu}\int_{-\ell_1}^{x_1} v_1(x_1)dx_1 = \Pi(x_1,\sigma_1)q_{y_1}(x_1) - \frac{1+\kappa}{2\mu}\int_{-\ell_1}^{x_1} u_1(x_1)dx_1 = \Pi(x_1,\sigma_1)q_{x_1y_1}(x_1)\,. \tag{19}$$

В силу того, что напряжения в нагреваемом диске всюду ограничены, решение сингулярного интегрального уравнения ищется в классе всюду ограниченных функций.

Используя процедуру алгебраизации [6–8], вместо каждого сингулярного интегрального уравнения при дополнительном условии (18) получаем конечную алгебраическую систему, состоящую из M уравнений, относительно приближенных значений искомых функций $v_1(t_m)$ и $u_1(t_m)$ ($m = 1, 2, \ldots, M$) в узловых точках соответственно.

В правые части этих систем входят неизвестные значения $q_{y_1}(x_1)$, $q_{x_1y_1}(x_1)$, соответственно, в узловых точках. Требуя выполнения условий (19) в узловых точках t_m ($m = 1, 2, \ldots, M$), получим еще две системы из M уравнений каждая для определения значений $q_{y_1}(t_m)$ и $q_{x_1y_1}(t_m)$

$$\begin{cases} -\dfrac{1+\kappa}{2\mu}\dfrac{\pi\ell_1}{M} v_1(t_1) = \Pi(t_1,\sigma_1)q_{y_1}(t_1) \\ -\dfrac{1+\kappa}{2\mu}\dfrac{\pi\ell_1}{M}\big(v_1(t_1) + v_1(t_2)\big) = \Pi(t_2,\sigma_1)q_{y_1}(t_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -\dfrac{1+\kappa}{2\mu}\dfrac{\pi\ell_1}{M}\displaystyle\sum_{m=1}^{M} v_1(t_m) = \Pi(t_M,\sigma_1)q_{y_1}(t_M), \end{cases} \tag{20}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{1+\kappa}{2\mu}\dfrac{\pi\ell_1}{M} u_1(t_1) = \Pi(t_1,\sigma_1)q_{x_1y_1}(t_1) \\ -\dfrac{1+\kappa}{2\mu}\dfrac{\pi\ell_1}{M}\big(u_1(t_1) + u_1(t_2)\big) = \Pi(t_2,\sigma_1)q_{x_1y_1}(t_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -\dfrac{1+\kappa}{2\mu}\dfrac{\pi\ell_1}{M}\displaystyle\sum_{m=1}^{M} u_1(t_m) = \Pi(t_M,\sigma_1)q_{x_1y_1}(t_M). \end{cases} \tag{21}$$

Полученные алгебраические системы уравнений (заменяющие два действительных интегральных уравнения и два условия (19)) оказались связанными и должны решаться совместно.

Полученные алгебраические системы уравнений не являются пока замкнутыми, поскольку не хватает двух уравнений, выражающих условия разрешимости интегрального уравнения в классе всюду ограниченных функций. Записывая эти условия ограниченности напряжений в вершинах зоны предразрушения

$$\sum_{m=1}^{M}(-1)^{M+m}v_1(t_m)\,\mathrm{tg}\frac{2m-1}{4M}\pi=0,\qquad \sum_{m=1}^{M}(-1)^{m}v_1(t_m)\,\mathrm{ctg}\frac{2m-1}{4M}\pi=0,$$
$$\sum_{m=1}^{M}(-1)^{M+m}u_1(t_m)\,\mathrm{tg}\frac{2m-1}{4M}\pi=0,\qquad \sum_{m=1}^{M}(-1)^{m}u_1(t_m)\,\mathrm{ctg}\frac{2m-1}{4M}\pi=0, \tag{22}$$

получим две замкнутые конечные алгебраические системы.

Из-за неизвестного размера зоны предразрушения даже при линейно-упругих связях системы алгебраических уравнений оказались нелинейными. Для их решения использовали метод последовательных приближений. Решаем объединенную систему при некоторых определенных значениях ℓ_1^* относительно неизвестных $v_1(t_m)$, $u_1(t_m)$, $q_{y_1}(t_m)$, $q_{x_1y_1}(t_m)$. Значение ℓ_1^* и найденные величины $v_1(t_m)$, $u_1(t_m)$, $q_{y_1}(t_m)$, $q_{x_1y_1}(t_m)$ подставляются в неиспользованные уравнения объединенной системы. Взятое значение параметра ℓ_1^* и соответствующие им значения $v_1(t_m)$, $u_1(t_m)$, $q_{y_1}(t_m)$, $q_{x_1y_1}(t_m)$ не будут, вообще говоря, удовлетворять уравнениям (22). Поэтому, подбирая значения параметра ℓ_1^*, будем многократно повторять вычисления до тех пор, пока уравнения (22) объединенной системы не будут удовлетворяться с заданной точностью. Объединенная система уравнений в каждом приближении решалась методом Гаусса с выбором главного элемента для различных значений M ($M = 20$; 30).

В случае нелинейного закона деформирования связей для нахождения усилий в зоне предразрушения использовали также итерационный метод, подобный методу упругих решений А. А. Ильюшина [9]. Полагается, что закон деформирования межчастичных связей в зоне предразрушения является линейным при $V_1=\left|\left(u_1^+-u_1^-\right)-i\left(\upsilon_1^+-\upsilon_1^-\right)\right|\le V_*$.

Первый шаг итерационного процесса расчета состоит в решении системы разрешающих уравнений для линейно-упругих межчастичных связей. Следующие итерации выполняются только в случае, если на части зоны предразрушения выполняется равенство $V_1 > V_*$. Для таких итераций решается система разрешающих уравнений в каждом приближении для квазихрупких связей (сил сцепления) с эффективной податливостью, переменной вдоль зоны предразрушения и зависящей от величины модуля вектора усилий в связях, полученного на предыдущем шаге расчета. Расчет эффективной податливости проводится подобно нахождению секущего модуля в методе переменных параметров упругости [10]. Принято, что процесс последовательных приближений заканчивается, как только усилия в зоне предразрушения, полученные на двух последовательных шагах, мало отличаются друг от друга.

Нелинейная часть кривой деформирования связей представлялась в форме билинейной зависимости, восходящий участок которой соответствовал упругому деформированию связей ($0 < V_1(x_1) < V_*$) с максимальным натяжением связей. При $V_1(x_1) > V_*$ закон деформирования описывался нелинейной зависимостью, определяемой двумя точками (V_*, σ_*) и (δ_c, σ_c), причем при $\sigma_c \ge \sigma_*$ имеем возрастающую линейную зависимость (линейное упрочнение, соответствующее упругопластической деформации связей).

Состоянию предельного равновесия зоны предразрушения соответствует условие [11]

$$-\frac{\partial \Pi_0}{\partial \ell_1}=0, \tag{23}$$

где Π_0 – потенциальная энергия деформации.

Левая часть уравнения (23), как известно, состоит из двух слагаемых, первая из которых представляет скорость высвобождения энергии деформации при образовании новой поверхности зоны предразрушения, а второе слагаемое определяет скорость потребления энергии деформации связями.

Состоянию предельного равновесия диска с зоной предразрушения соответствует выполнение условия

$$G_b(\ell_1) = G_n(\ell_1). \tag{24}$$

Энергетическое условие (24) является необходимым, но недостаточным для состояния предельного равновесия зоны предразрушения в круговом нагреваемом диске. Для определения предельного равновесия зоны предразрушения необходимо введение дополнительного критического условия. В качестве такового принимаем условие критического раскрытия берегов зоны предразрушения (3).

Считается, что разрыв связей на берегах зоны предразрушения ($x_1 = x_{01}$) происходит при выполнении условия

$$\sqrt{\left[u_1^+(x_{01},0) - u_1^-(x_{01},0)\right]^2 + \left[\upsilon_1^+(x_{01},0) - \upsilon_1^-(x_{01},0)\right]^2} = \delta_c\,, \tag{25}$$

где δ_c – предельная длина связи.

Совместное решение уравнений (20), (21), (24), (25) позволяет при заданных характеристиках связей определить критическую величину интенсивности теплового воздействия и размер зоны предразрушения для состояния предельного равновесия. Скорость потребления энергии деформации $G_n(\ell_1)$, полученная из этого решения, считается энергетической характеристикой сопротивления разрушению, т. е.

$$G_c = G_n(\ell_1).$$

Используя предельные величины δ_c и G_c, можно выделить различные режимы равновесия зоны предразрушения и зарождения трещины при монотонном нагружении. Так, например, при выполнении условий

$$G_b(\ell_1) \geq G_c, \quad V_1(x_{01}) < \delta_c$$

происходит продвижение вершины зоны предразрушения без разрыва связей, т.е. в этом случае трещина не зарождается. Этот этап роста зоны предразрушения можно интерпретировать как процесс приспособляемости заданному уровню тепловой нагрузки, действующему на круговой диск.

Рост вершины зоны предразрушения с одновременным разрывом связей на берегах ослабленной зоны будет происходить при выполнении условий

$$G_b(\ell_1) \geq G_c, \quad V_1(x_{01}) \geq \delta_c.$$

При выполнении условий

$$G_b(\ell_1) < G_c, \quad V_1(x_{01}) \geq \delta_c$$

происходит разрыв межчастичных связей без продвижения вершины зоны предразрушения, т.е. в этом случае зарождается трещина и размер зоны предразрушения, где имеется связь между берегами, уменьшается.

Если же будут выполняться условия

$$G_b(\ell_1) < G_c, \quad V_1(x_{01}) < \delta_c,$$

то положение вершины зоны предразрушения не будет изменяться и трещина не будет зарождаться.

Таким образом, анализ показывает, что величина интенсивности теплового воздействия и критические параметры δ_c, G_c определяют характер разрушения (зарождения трещины).

Рассмотрим два различных режима нагрева круглого диска. Будем использовать следующие обозначения:

$$l_k = Rl_{0k}, \quad T(Rx) = T_0 u(x),$$

где T_0 – некоторая характерная температура, показывающая интенсивность теплового воздействия на круговой диск.

1) Рассмотрим случай, когда постоянная скорость роста температуры внешней границы диска является заданной. Начальные и граничные условия задачи имеют вид

$$T_{|t=0} = 0, \quad T_{|r=R} = Vt \tag{26}$$

где t – время нагрева.

 ISSN 0131–2928. Пробл. машиностроения, 2015, Т. 18, № 1

Чтобы установить распределение температуры в круглом диске, решается краевая задача для уравнения теории теплопроводности при начальном и граничном условиях (26)

$$\frac{\partial T}{\partial t}=a\left(\partial\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial T}{\partial r}\right). \tag{27}$$

Здесь a – коэффициент температуропроводности материала диска.

Поле температур в этом случае определяется функцией

$$u(\rho)=\tau-\frac{1-\rho^2}{4}-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_0(\alpha_k^*\rho)}{(\alpha_k^*)^3 J_0'(\alpha_k^*)}e^{-(\alpha_k^*)^2\tau},$$

где $\tau=\dfrac{at}{R^2}$ – безразмерное время; J_0 – функция Бесселя нулевого порядка; α_k^* ($k=1, 2, \ldots$) – последовательность ее нулей.

В этом случае характерная температура $T_0=\dfrac{VR^2}{a}$; параметр $\beta=\dfrac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}\alpha_* T_0$ является безразмерной скоростью нагрева.

Функция $f(x)$ в правой части сингулярного интегрального уравнения (14) для такого режима нагрева диска будет

$$f(x)=\frac{1-3x^2}{16}+2\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{J_1(\alpha_k^*)}{\alpha_k^*}+\frac{J_1(\alpha_k^* x)}{\alpha_k^* x}-J_0(\alpha_k^* x)\right]\frac{e^{-\alpha_k^*\tau}}{(\alpha_k^*)^3 J_1(\alpha_k^*)}.$$

2) На внешней границе диска задан постоянный поток тепла. Начальное и граничное условия имеют вид

$$T_{|t=0}=0, \qquad \lambda_*\frac{\partial T}{\partial r}_{|r=R}=Q, \tag{28}$$

где λ_* – теплопроводность материала диска; Q – внешний поток тепла.

Решение задачи теории теплопроводности (27) при заданных начальных и граничных условиях (28) определяется функцией

$$u(\rho)=2\tau+\frac{2\rho^2-1}{4}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_0(\alpha_k^*\rho)}{(\alpha_k^*)^2 J_0(\alpha_k^*)}e^{-(\alpha_k^*)^2\tau},$$

где α_k^* ($k=1, 2, \ldots$) – последовательность нулей функции Бесселя $J_1(\rho)$.

Характерная температура в этом случае $T_0=\dfrac{QR}{\lambda_*}$; параметр β характеризует скорость подвода тепла.

Функция $f(x)$ в уравнении (14) для данного режима нагрева принимает вид:

$$f(x)=\frac{1-3x^2}{8}+2\sum_{k=1}^{\infty}\left[J_0(\alpha_k^* x)-\frac{J_1(\alpha_k^* x)}{\alpha_k^* x}\right]\frac{e^{-(\alpha_k^*)^2}\tau}{(\alpha_k^*)^2 J_0(\alpha_k^*)}.$$

Аналогичным образом можно рассмотреть другие режимы нагрева кругового диска.

Расчеты проводились для ряда фиксированных значений безразмерного времени τ от 10^{-2} до 1. Результаты расчетов приведены на рис. 2–4. На рис. 2 представлены графики зависимости длины зоны предразрушения ℓ_1/R от интенсивности теплового воздействия β (скорости нагрева) для различных моментов времени для $\alpha_1=45°$. На рис. 3 представлена зависимость распределения усилий q_{y_1}/σ_* вдоль зоны предразрушения для $\tau=0{,}05$. Кривая 1 относится к случаю линейно-упругих связей, а кривая 2 – для билинейного закона деформирования связей. При этом использовались безразмерные координаты $x^*=x_1/\ell_1$.

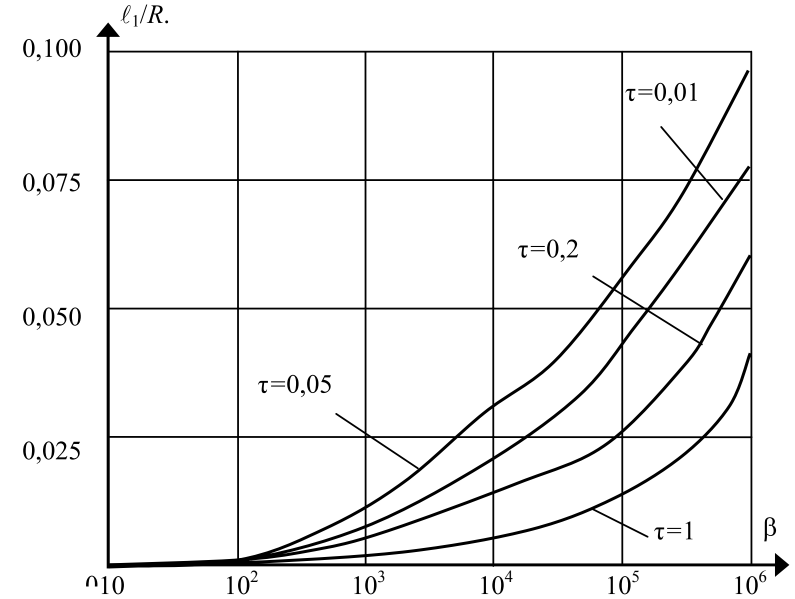

Рис. 2. Зависимость длины зоны предразрушения ℓ_1/R от интенсивности теплового воздействия β

На рис. 4 представлены зависимости критической интенсивности теплового воздействия β_c от безразмерной длины зоны предразрушения в различные моменты времени.

При проектировании элементов машин и механизмов в виде кругового диска его параметры надо подбирать таким образом, чтобы максимальная интенсивность теплового воздействия не превышала критического значения, вызывающего трещинообразование в диске. Это условие можно представить в виде

$$\beta_{\max} \le \beta^c,$$

где $\beta_{\max}$ – максимальная интенсивность теплового воздействия в круговом диске.

Выводы

Предложена эффективная схема расчета трещинообразования в круговом нагретом диске. С помощью разработанной расчетной модели на стадии проектирования можно оценивать гарантированный ресурс нагретого диска, устанавливать допустимый уровень интенсивности теплового воздействия, выбирать материал диска с требуемыми характеристиками трещиностойкости.

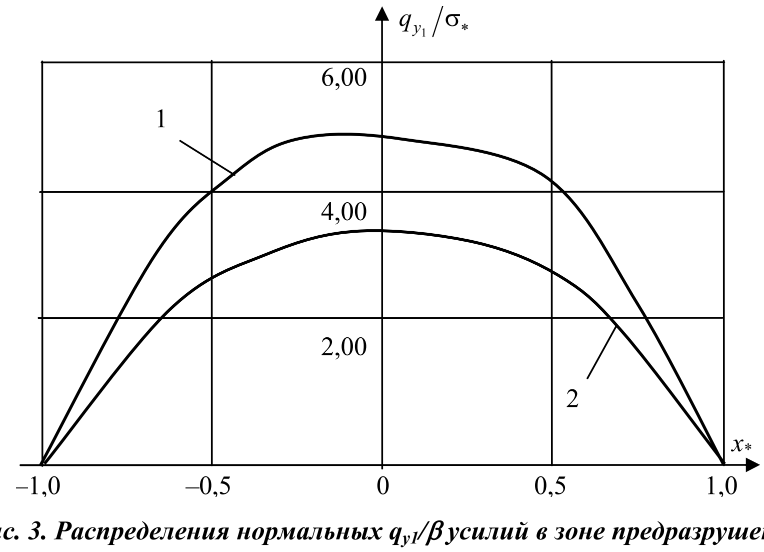

Рис. 3. Распределения нормальных q_{y1}/β усилий в зоне предразрушения

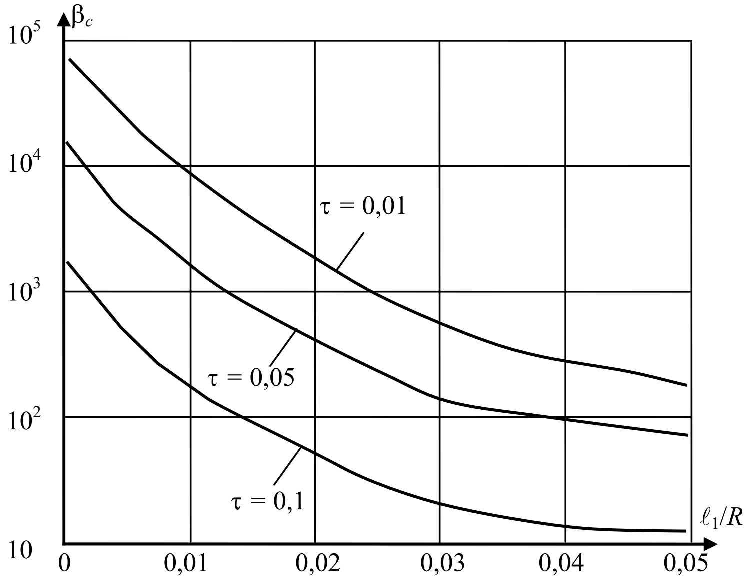

Рис. 4. Зависимость критической интенсивности теплового воздействия от безразмерной длины зоны предразрушения

Литература

1. *Панасюк, В. В.* Механика квазихрупкого разрушения материалов / В. В. Панасюк. – Киев: Наук. думка, 1991. – 416 с.
2. *Rusinko, A.* Plasticity and Creep of Metals / A. Rusinko, K. Rusinko. Berlin: Springer Verlag, 2011. – 436 p.
3. *The special* issue: Cohesive models // Eng. Fract. Mech. – 2003. – Vol. 70, № 14. – P. 1741–1987.
4. *Мирсалимов, В. М.* К решению задачи механики контактного разрушения о зарождении и развитии трещины со связями между берегами во втулке фрикционной пары / В. М. Мирсалимов // Прикл. математика и механика. – 2007. – Т. 71, вып. 1. – С. 132–151.
5. *Мусхелишвили, Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
6. *Панасюк, В. В.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацышин. – Киев: Наук. думка, 1976. – 443 с.
7. *Мирсалимов, В. М.* Неодномерные упругопластические задачи / В. М. Мирсалимов. – М.: Наука, 1987. – 256 с.
8. *Ladopoulas, E. G.* Singular integral equations: Linear and non-linear theory and its Applications in Science and Engineering / E. G. Ladopoulas. – Berlin: Springer Verlag, 2000. – 376 p.
9. *Ильюшин, А. А.* Пластичность / А. А. Ильюшин. – М.; Л.: Гостехиздат, 1948. – 376 с.
10. *Биргер, И. А.* Расчет конструкций с учетом пластичности и ползучести / И. А. Биргер // Изв. АН СССР. Механика – 1965. – № 2. – С. 113–119.
11. *Черепанов, Г. П.* Механика хрупкого разрушения / Г. П. Черепанов. – М.: Наука, 1974. – 640 с.

Поступила в редакцию 13.12.14