

- лочки и пластины методом конечных элементов / В.Г. Пискунов, В.Е. Вериженко, В.К. Присяжнюк и др. – Киев: Вища шк., 1987. – 200 с.
3. Руденский, А. В. Дорожные асфальтобетонные покрытия / А. В. Руденский. – М.: Транспорт, 1992. – 253 с.
  4. Золотарев, В. А. Долговечность дорожных асфальтобетонов / В. А. Золотарев. – Харьков: Высш. шк., 1977. – 116 с.
  5. Богуславский, А. М. Основы реологии асфальтобетона / А. М. Богуславский, Л. А. Богуславский. – М.: Высш. шк., 1972. – 199 с.
  6. Рассказов, А. О. Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек / А. О. Рассказов, И. И. Соколовская, Н. А. Шульга. – Киев: Вища шк., 1986. – 191 с.
  7. Золочевский, А. А. Нелинейная механика деформируемого твердого тела / А. А. Золочевский, А. Н. Склепус, С. Н. Склепус. – Харьков: Бизнес Инвестор Групп, 2011. – 720 с.
  8. Работнов, Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций / Ю. Н. Работнов. – М.: Наука, 1966. – 752 с.
  9. Власов, В. З. Балки, плиты и оболочки на упругом основании / В. З. Власов, Н. Н. Леонтьев. – М.: Физматгиз, 1960. – 491 с.
  10. Рвачев, В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения / В. Л. Рвачев. – Киев: Наук. думка, 1982. – 552 с.

Поступила в редакцию  
25.12.13

УДК 539.3

**К. В. Аврамов**<sup>\*</sup>, д-р техн. наук  
**О. К. Морачковский**, д-р техн. наук<sup>\*\*</sup>  
**А. М. Тонконоженко**<sup>\*\*\*</sup>  
**В. Ю. Кожарин**<sup>\*\*\*</sup>  
**Р. Е. Кочуров**<sup>\*</sup>, канд. техн. наук

<sup>\*</sup> Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины  
(г. Харьков, e-mail: kvavr@kharkov.ua)

<sup>\*\*</sup> Национальный технический университет  
«Харьковский политехнический институт»

<sup>\*\*\*</sup> Государственное предприятие КБ «Южное» (г. Днепропетровск)

## ПОЛУАНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРУЕМОГО СОСТОЯНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С ПРОДОЛЬНЫМИ РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ

*Для расчета цилиндрических оболочек, подкрепленных продольными ребрами жесткости, предложен полуаналитический метод конечных элементов. С помощью предложенного метода численно исследуются свойства напряженно-деформированного состояния оболочек.*

*Для розрахунку циліндричної оболонки, що підкріплена повздовжніми ребрами, запропоновано напіваналітичний метод скінченних елементів. За допомогою запропонованого методу чисельно досліджено властивості напружено-деформованого стану оболонок.*

**Ключевые слова:** метод конечных элементов, орребренные оболочки, матрица жесткости конструкции.

**Введение**

Цилиндрические оболочки с силовым набором подкреплений широко используются в аэрокосмической технике, например, баки и обтекатели современных ракетносителей в основном имеют подкрепления [1]. Начиная со второй половины прошлого века, много усилий предпринято для исследования статики и динамики таких конструкций. Подробный обзор литературы по этому вопросу содержится в монографии [2].

В данной статье для расчетов напряженно-деформированного состояния (НДС) оболочек, подкреплённых продольными ребрами жесткости, применен метод Ритца. Суть предлагаемого полуаналитического метода конечных элементов (МКЭ) заключается в разложении перемещений срединной поверхности оболочек в ряды Фурье по окружной координате с коэффициентами, являющимися функциями продольной координаты оболочки. Функциями форм коэффициентов ряда Фурье на конечном элементе приняты эрмитовы кубические полиномы. Узловые перемещения определяются численным решением системы уравнений МКЭ.

На сегодняшний день в ГП КБ «Южное» баки, представляющие собой тонкие цилиндрические оболочки, подкреплённые ребрами жесткости, перед постановкой на ракету испытываются под действием статического внутреннего давления, и те из них, что не подверглись разрушению, устанавливаются на ракетноситель. Каждый новый бак проходит те же испытания, так что изготовление бака чрезвычайно дорого обходится предприятию. Предложенный в данной статье подход будет использоваться для проектирования бака, которое включает выбор механико-геометрических характеристик оболочки и силового подкрепляющего набора ребер и оценки величин разрушающих нагрузок, действующих на баки ракетносителей при испытаниях.

**1. Основные соотношения**

Рассмотрим цилиндрическую оболочку с продольными ребрами (стрингерами), которые расположены параллельно образующей оболочки (рис. 1). Оболочка находится под действием постоянного внутреннего давления. Стрингеры, возможно с разными механико-геометрическими свойствами, располагаются внутри оболочки на одинаковом расстоянии вдоль окружной координаты. Если  $N_1$  – число стрингеров, то ось крепления стрингера определяется центральным углом  $\varphi_1 = 2\pi/N_1$ . При определении напряженно-деформированного состояния (НДС) примем, что для тонких оболочек справедливы гипотезы Кирхгофа–Лява, а для продольных ребер – гипотезы тонких стержней Кирхгофа–Клебша; их материалы удовлетворяют закону Гука, а связь между перемещениями и малыми деформациями является линейной. Для точек срединной поверхности цилиндрической оболочки радиусом  $r$  обозначим  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$ ,  $w(x, y)$  – перемещения вдоль координатных осей, как показано на рис. 1. Компоненты перемещений  $i$ -го стрингера вдоль осей  $x, y, z$  обозначим через  $u_i(x)$ ,  $v_i(x)$ ,  $w_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N_1$ .

Угол закручивания стрингера обозначим через  $\varphi_{кр,i}(x)$ . Свяжем перемещения стрингеров с параметрами НДС оболочки. Условия жесткого соединения стрингеров с обшивкой запишем в виде [2]

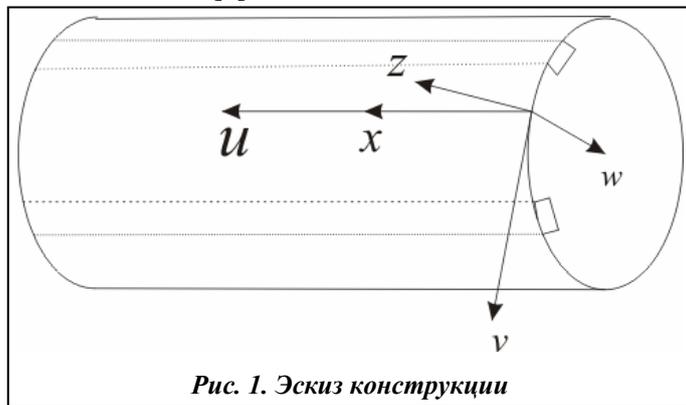


Рис. 1. Эскиз конструкции

$$\begin{aligned}
 u_i(x) &= u(x, y_i) - h_i \varphi_1(x, y_i); \\
 v_i(x) &= v(x, y_i) - h_i \varphi_2(x, y_i); \\
 w_i(x) &= w(x, y_i); \\
 \varphi_{кр,i}(x) &= \varphi_2(x, y_i); \\
 \varphi_1 &= -\frac{\partial w(x, y_i)}{\partial x}; \\
 \varphi_2 &= -\frac{\partial w(x, y_i)}{\partial y} - \frac{v(x, y_i)}{r}; \\
 h_i &= h/2 + H_i,
 \end{aligned} \quad (1)$$

где  $H_i$  – расстояние от оси стрингера до срединной поверхности оболочки;  $h, r$  – толщина и радиус срединной поверхности оболочки;  $y_i = i\phi_1 r$  – координата места крепления стрингера.

Потенциальную энергию всего силового набора  $\Pi_1$  представим так:

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N_i-1} \int_0^L \left\{ E_i F_i \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 + E_i J_{y_i} \left( \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \right)^2 + E_i J_{z_i} \left( \frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2} \right)^2 + G_i J_{\kappa p, i} \left( \frac{\partial \varphi_{\kappa p, i}}{\partial x} \right)^2 \right\} dx, \quad (2)$$

где  $L$  – длина оболочки;  $E_i, G_i$  – модуль упругости первого и второго рода  $i$ -го продольного ребра;  $J_{y_i}, J_{z_i}, J_{\kappa p, i}$  – моменты инерции поперечного сечения продольного ребра  $i$ ;  $F_i$  – площадь поперечного сечения  $i$ -го стрингера.

Рассмотрим потенциальную энергию цилиндрической оболочки с малыми перемещениями, деформациями, пренебрегая сдвигами в сечении при упругом деформировании. Тогда потенциальную энергию оболочки  $\Pi_2$  запишем в виде

$$\begin{aligned} \Pi_2 = S \iint_{\Omega} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{r \partial \varphi} - \frac{w}{r} \right)^2 - 2(1-\mu) \left[ \left( \frac{\partial v}{r \partial \varphi} - \frac{w}{r} \right) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{4} \left( \frac{\partial u}{r \partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} dx dy + \\ + \frac{D}{2} \iint_{\Omega} \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2} \right)^2 - \frac{2(1-\mu)}{r^2} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} \right)^2 \right] \right\} dx dy, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $S = \frac{Eh}{2(1-\mu^2)}$ ;  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$  – цилиндрическая жесткость;  $E, \mu$  – модуль Юнга и коэф-

фициент Пуассона и;  $y = \varphi r$ ;  $\varphi$  – окружная координата оболочки;  $\Omega$  – область, занимаемая срединной поверхностью оболочки.

## 2. Полуаналитический метод конечных элементов

Цилиндрическая оболочка обладает осесимметричным НДС под действием постоянного внутреннего давления. Осесимметричность НДС нарушается вследствие продольного оребрения оболочки. Тогда статические перемещения срединной поверхности оболочки представим в виде разложений в укороченные ряды Фурье

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0(x) \\ v_0(x) \\ w_0(x) \end{bmatrix} + \sum_{n=1}^{N_G} \begin{bmatrix} u_n^{(c)}(x) \\ v_n^{(c)}(x) \\ w_n^{(c)}(x) \end{bmatrix} \cos n\varphi + \begin{bmatrix} u_n^{(s)}(x) \\ v_n^{(s)}(x) \\ w_n^{(s)}(x) \end{bmatrix} \sin n\varphi. \quad (4)$$

Представим потенциальную энергию в виде однократных интегралов по продольной координате оболочки. Для этого разложение (4) введем в потенциальную энергию (3). Потенциальную энергию оболочки представим в виде суммы трех слагаемых

$$\Pi = \tilde{\Pi}_0(u_0, v_0, w_0) + \tilde{\Pi}_1(u_{c,n}, v_{s,n}, w_{c,n}) + \tilde{\Pi}_2(u_{s,n}, v_{c,n}, w_{s,n}); \quad (5)$$

$$\tilde{\Pi}_0 = S\pi \int_0^L dx \left\{ 2r \left( u'_0 - \frac{w_0}{r} \right)^2 + 4(1-\mu) u'_0 w_0 + (1-\mu) r v_0'^2 \right\} + Dr\pi \int_0^L w_0''^2 dx;$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_1 = S\pi \sum_{n=1}^{N_G} \int_0^L dx \left\{ r \left( u'_{c,n} + \frac{(nv_{s,n} - w_{c,n})}{r} \right)^2 - 2(1-\mu) u'_{c,n} (nv_{s,n} - w_{c,n}) + \frac{(1-\mu)r}{2} \left( v'_{s,n} - \frac{n}{r} u_{c,n} \right)^2 \right\} + \\ + \frac{Dr\pi}{2} \sum_{n=1}^{N_G} \int_0^L dx \left\{ \left( w''_{c,n} - \frac{n^2}{r^2} w_{c,n} \right)^2 + \frac{2(1-\mu)n^2}{r^2} (w_{c,n}'^2 + w_{c,n} w''_{c,n}) \right\}; \end{aligned}$$

$$\tilde{\Pi}_2 = S\pi \sum_{n=1}^{N_G} \int_0^L dx \left\{ r \left( u'_{s,n} - \frac{(nv_{c,n} + w_{s,n})}{r} \right)^2 + 2(1-\mu)u'_{s,n}(nv_{c,n} + w_{s,n}) + \frac{(1-\mu)r}{2} \left( v'_{c,n} + \frac{n}{r}u_{s,n} \right)^2 \right\} +$$

$$\frac{Dr\pi}{2} \sum_{n=1}^{N_G} \int_0^L dx \left\{ \left( w''_{s,n} - \frac{n^2}{r^2}w_{s,n} \right)^2 + \frac{2(1-\mu)n^2}{r^2} (w'_{s,n}{}^2 + w_{s,n}w''_{s,n}) \right\}.$$

Для дискретизации потенциальной энергии (5) используются одномерные конечные элементы. Вдоль оси цилиндрической оболочки  $x$  (рис. 1) расположим точки с координатами  $x_0, x_1, \dots, x_N$ . Эти точки будут узлами конечных элементов. Тогда конечный элемент с номером  $j$  занимает область на оси  $x$ :  $x \in [x_{j-1}; x_j]$ . Потенциальную энергию всей системы (5) представим в виде суммы потенциальных энергий конечных элементов. Тогда потенциальную энергию осесимметричного деформирования оболочки  $\Pi_0$  запишем следующим образом:

$$\tilde{\Pi}_0 = \sum_{j=1}^N \Pi_{0,j}; \tag{6}$$

$$\Pi_{0,j} = 0.5S\pi(x_j - x_{j-1}) \int_{-1}^1 d\xi \left\{ 2r \left( u'_0 - \frac{w_0}{r} \right)^2 + (1-\mu)(4u'_0w_0 + rv_0'^2) \right\} + 0,5\pi Dr(x_j - x_{j-1}) \int_{-1}^1 d\xi w_0''^2,$$

где  $\xi$  – локальная координата  $j$ -го конечного элемента, которая связана с координатами узлов конечных элементов так:  $2x = (x_j - x_{j-1})\xi + (x_j + x_{j-1})$ . Потенциальные энергии  $\Pi_1, \Pi_2$  для  $j$ -го конечного элемента представим в виде

$$\tilde{\Pi}_i = \sum_{v=1}^{N_G} \sum_{j=1}^N \Pi_i^{(v)}; \quad i = 1, 2, \tag{7}$$

где  $\Pi_i^{(v)}$  – потенциальные энергии  $j$ -го конечного элемента, соответствующие перемещению  $v$ -й гармоники.

Теперь потенциальную энергию оболочки представим зависящими от перемещений и углов поворотов в узлах конечных элементов. Для этого компоненты разложений (4), зависящие от  $x$ , на каждом конечном элементе аппроксимируются с помощью полиномов Эрмита. Воспользуемся кубическими полиномами, которые рассматриваются в [3]. Неизвестные в (4) для конечного элемента  $j$  разложим с помощью функций форм  $\bar{N}_i(\xi), \bar{N}_i^*(\xi)$  и, используя локальных координатах  $\xi$  так:

$$U_0 = \sum_{i=1}^2 \bar{N}_i(\xi)U_{j-2+i}^{(1)} + \sum_{i=1}^2 \bar{N}_i^*(\xi)\Theta_{j-2+i} 0,5(x_j - x_{j-1}), \tag{8}$$

где

$$U_0 = [u_0 \ v_0 \ w_0 \ u_v^{(c)} \ u_v^{(s)} \ v_v^{(c)} \ v_v^{(s)} \ w_v^{(c)} \ w_v^{(s)}]^T;$$

$$U_{j-2+i}^{(1)} = [u_{j-2+i}^{(0)} \ v_{j-2+i}^{(0)} \ w_{j-2+i}^{(0)} \ u_{j-2+i}^{(c,v)} \ u_{j-2+i}^{(s,v)} \ v_{j-2+i}^{(c,v)} \ v_{j-2+i}^{(s,v)} \ w_{j-2+i}^{(c,v)} \ w_{j-2+i}^{(s,v)}]^T;$$

$$\Theta_{j-2+i} = [\varphi_{j-2+i}^{(0)} \ \psi_{j-2+i}^{(0)} \ \theta_{j-2+i}^{(0)} \ \varphi_{j-2+i}^{(c,v)} \ \varphi_{j-2+i}^{(s,v)} \ \psi_{j-2+i}^{(c,v)} \ \psi_{j-2+i}^{(s,v)} \ \theta_{j-2+i}^{(c,v)} \ \theta_{j-2+i}^{(s,v)}]^T;$$

$\bar{N}_i(\xi); \bar{N}_i^*(\xi)$  – эрмитовы полиномы третьего порядка. Эти полиномы представлены в [3]. Буквами  $\varphi, \psi, \theta$  обозначаются обобщенные углы поворота в узлах конечного элемента.

Теперь потенциальную энергию участков стрингеров, принадлежащих  $j$ -му конечному элементу, выразим в виде одномерных интегралов через перемещения срединной поверхности оболочки в виде

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{стр}}^{(j)} = & 0,25(x_j - x_{j-1}) \sum_{i=0}^{N_G-1} \left\{ \tilde{\Pi}_{0i} + \sum_{v=1}^{N_G} \tilde{\Pi}_{vi}^{(c)} \cos(v\varphi_i) + \sum_{v=1}^{N_G} \tilde{\Pi}_{vi}^{(s)} \sin(v\varphi_i) + \right. \\ & \left. + \sum_{v,n=1}^{N_G} \tilde{\Pi}_{vni}^{(sc)} \sin(v\varphi_i) \cos(n\varphi_i) + \sum_{v,n=1}^{N_G} \tilde{\Pi}_{vni}^{(cc)} \cos(n\varphi_i) \cos(v\varphi_i) + \sum_{v,n=1}^{N_G} \tilde{\Pi}_{vni}^{(ss)} \sin(n\varphi_i) \sin(v\varphi_i) \right\}, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{0i} = & \int_{-1}^1 d\xi \left\{ \frac{4E_i F_i (u_{0,\xi} + \alpha_{ij} w_{0,\xi\xi})^2}{(x_j - x_{j-1})^2} + \frac{16E_i [J_{Y_i} w_{0,\xi\xi}^2 + J_{Z_i} \beta_i^2 v_{0,\xi\xi}^2]}{(x_j - x_{j-1})^4} + \frac{4G_i J_{kp,i} v_{0,\xi}^2}{(x_j - x_{j-1})^2 r^2} \right\}; \\ \tilde{\Pi}_{vi}^{(c)} = & \int_{-1}^1 d\xi \left\{ \frac{8E_i F_i}{(x_j - x_{j-1})^2} (u_{0,\xi} + \alpha_{ij} w_{0,\xi\xi}) (u_{v,\xi}^{(c)} + \alpha_{ij} w_{v,\xi\xi}^{(c)}) + \frac{8G_i J_{kp,i} v_{0,\xi} (v w_{v,\xi}^{(s)} + v_{v,\xi}^{(c)})}{(x_j - x_{j-1})^2 r^2} + \right. \\ & \left. \frac{32E_i [J_{Y_i} w_{0,\xi\xi} w_{v,\xi\xi}^{(c)} + J_{Z_i} \beta_i v_{0,\xi\xi} (\beta_i v_{v,\xi\xi}^{(c)} + \gamma_{vi} w_{v,\xi\xi}^{(s)})]}{(x_j - x_{j-1})^4} \right\}; \\ \tilde{\Pi}_{vi}^{(s)} = & \int_{-1}^1 d\xi \left\{ \frac{8E_i F_i}{(x_j - x_{j-1})^2} (u_{0,\xi} + \alpha_{ij} w_{0,\xi\xi}) (u_{v,\xi}^{(s)} + \alpha_{ij} w_{v,\xi\xi}^{(s)}) + \frac{8G_i J_{kp,i} v_{0,\xi} (-v w_{v,\xi}^{(c)} + v_{v,\xi}^{(s)})}{(x_j - x_{j-1})^2 r^2} + \right. \\ & \left. \frac{32E_i [J_{Y_i} w_{0,\xi\xi} w_{v,\xi\xi}^{(s)} + J_{Z_i} \beta_i v_{0,\xi\xi} (\beta_i v_{v,\xi\xi}^{(s)} - \gamma_{vi} w_{v,\xi\xi}^{(c)})]}{(x_j - x_{j-1})^4} \right\}; \\ \tilde{\Pi}_{vni}^{(sc)} = & \int_{-1}^1 d\xi \left\{ \frac{8E_i F_i (u_{n,\xi}^{(c)} + \alpha_{ij} w_{n,\xi\xi}^{(c)}) (u_{v,\xi}^{(s)} + \alpha_{ij} w_{v,\xi\xi}^{(s)})}{(x_j - x_{j-1})^2} + \frac{8G_i J_{kp,i} (n w_{n,\xi}^{(s)} + v_{n,\xi}^{(c)}) (v_{v,\xi}^{(s)} - v w_{v,\xi}^{(c)})}{(x_j - x_{j-1})^2 r^2} + \right. \\ & \left. + \frac{32E_i [J_{Y_i} w_{n,\xi\xi}^{(c)} w_{v,\xi\xi}^{(s)} + J_{Z_i} (\beta_i v_{n,\xi\xi}^{(c)} + \gamma_{ni} w_{n,\xi\xi}^{(s)}) (\beta_i v_{v,\xi\xi}^{(s)} - \gamma_{vi} w_{v,\xi\xi}^{(c)})]}{(x_j - x_{j-1})^4} \right\}; \\ \tilde{\Pi}_{vni}^{(cc)} = & \int_{-1}^1 d\xi \left\{ \frac{4E_i F_i (u_{n,\xi}^{(c)} + \alpha_{ij} w_{n,\xi\xi}^{(c)}) (u_{v,\xi}^{(c)} + \alpha_{ij} w_{v,\xi\xi}^{(c)})}{(x_j - x_{j-1})^2} + \frac{4G_i J_{kp,i} (n w_{n,\xi}^{(s)} + v_{n,\xi}^{(c)}) (v_{v,\xi}^{(c)} + v w_{v,\xi}^{(s)})}{(x_j - x_{j-1})^2 r^2} + \right. \\ & \left. + \frac{16E_i [J_{Y_i} w_{n,\xi\xi}^{(c)} w_{v,\xi\xi}^{(c)} + J_{Z_i} (\beta_i v_{n,\xi\xi}^{(c)} + \gamma_{ni} w_{n,\xi\xi}^{(s)}) (\beta_i v_{v,\xi\xi}^{(c)} + \gamma_{vi} w_{v,\xi\xi}^{(s)})]}{(x_j - x_{j-1})^4} \right\}; \\ \tilde{\Pi}_{vni}^{(ss)} = & \int_{-1}^1 d\xi \left\{ \frac{4E_i F_i (u_{n,\xi}^{(s)} + \alpha_{ij} w_{n,\xi\xi}^{(s)}) (u_{v,\xi}^{(s)} + \alpha_{ij} w_{v,\xi\xi}^{(s)})}{(x_j - x_{j-1})^2} + \frac{4G_i J_{kp,i} (-n w_{n,\xi}^{(c)} + v_{n,\xi}^{(s)}) (v_{v,\xi}^{(s)} - v w_{v,\xi}^{(c)})}{(x_j - x_{j-1})^2 r^2} + \right. \\ & \left. + \frac{16E_i [J_{Y_i} w_{n,\xi\xi}^{(s)} w_{v,\xi\xi}^{(s)} + J_{Z_i} (\beta_i v_{n,\xi\xi}^{(s)} - \gamma_{ni} w_{n,\xi\xi}^{(c)}) (\beta_i v_{v,\xi\xi}^{(s)} - \gamma_{vi} w_{v,\xi\xi}^{(c)})]}{(x_j - x_{j-1})^4} \right\}. \end{aligned}$$

Представим все составляющие потенциальных энергий конструкций в виде квадратичных форм относительно узловых перемещений конечных элементов. В эти квадратичные формы будут входить матрицы, которые являются слагаемыми глобальной матрицы жесткости конструкции. Для получения этих матриц рассчитываются однократные интегралы, которые входят в составляющие потенциальной энергии. Расчет интегралов проводился в среде Maple. Составляющие потенциальной энергии представим так:

$$\Pi_{0,j} = \frac{1}{2} (z_1^{(j-1,j)})^T [K^{(j,0)}] (z_1^{(j-1,j)}); \quad \Pi_{1,j}^{(v)} = \frac{1}{2} (z_{2,v}^{(j-1,j)})^T [K^{(1,v,j)}] (z_{2,v}^{(j-1,j)}); \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{2,j}^{(v)} &= \frac{1}{2} (z_{3,v}^{(j-1,j)})^T [K^{(2,v,j)}] (z_{3,v}^{(j-1,j)}); & \tilde{\Pi}_{0,i} &= \frac{1}{2} (z_1^{(j-1,j)})^T [\tilde{K}^{(i,j)}] (z_1^{(j-1,j)}); \\ \tilde{\Pi}_{vi}^{(c)} &= \frac{1}{2} (\tilde{z}_{4,v}^{(j-1,j)})^T [K_c^{(jvi)}] (\tilde{z}_{4,v}^{(j-1,j)}); & \tilde{\Pi}_{vi}^{(s)} &= \frac{1}{2} (\tilde{z}_{5,v}^{(j-1,j)})^T [K_s^{(jvi)}] (\tilde{z}_{5,v}^{(j-1,j)}); \\ \tilde{\Pi}_{vni}^{(sc)} &= \frac{1}{2} (\tilde{z}_{6,v,n}^{(j-1,j)})^T [K_{sc}^{(jvni)}] (\tilde{z}_{6,v,n}^{(j-1,j)}); & \tilde{\Pi}_{vni}^{(cc)} &= \frac{1}{2} (\tilde{z}_{7,v,n}^{(j-1,j)})^T [K_{cc}^{(jvni)}] (\tilde{z}_{7,v,n}^{(j-1,j)}); \\ & & \tilde{\Pi}_{vni}^{(ss)} &= \frac{1}{2} (\tilde{z}_{8,v,n}^{(j-1,j)})^T [K_{ss}^{(jvni)}] (\tilde{z}_{8,v,n}^{(j-1,j)}). \end{aligned}$$

Узловые неизвестные сгруппированы в следующие вектора, которые использовались в записи потенциальной энергии:

$$\begin{aligned} (z_1^{(j,j+1)}) &= [u_j^{(0)}; \varphi_j^{(0)}; v_j^{(0)}; \psi_j^{(0)}; w_j^{(0)}; \theta_j^{(0)}; u_{j+1}^{(0)}; \varphi_{j+1}^{(0)}; v_{j+1}^{(0)}; \psi_{j+1}^{(0)}; w_{j+1}^{(0)}; \theta_{j+1}^{(0)}]; \\ (z_{2,v}^{(j,j+1)}) &= [u_j^{(c,v)}; \varphi_j^{(c,v)}; v_j^{(s,v)}; \psi_j^{(s,v)}; w_j^{(c,v)}; \theta_j^{(c,v)}; u_{j+1}^{(c,v)}; \varphi_{j+1}^{(c,v)}; v_{j+1}^{(s,v)}; \psi_{j+1}^{(s,v)}; w_{j+1}^{(c,v)}; \theta_{j+1}^{(c,v)}]; \\ (z_{3,v}^{(j,j+1)}) &= [u_j^{(s,v)}; \varphi_j^{(s,v)}; v_j^{(c,v)}; \psi_j^{(c,v)}; w_j^{(s,v)}; \theta_j^{(s,v)}; u_{j+1}^{(s,v)}; \varphi_{j+1}^{(s,v)}; v_{j+1}^{(c,v)}; \psi_{j+1}^{(c,v)}; w_{j+1}^{(s,v)}; \theta_{j+1}^{(s,v)}]; \\ (z_{4,v}^{(j,j+1)}) &= [z_1^{(j,j+1)}, z_{4,v}^{(j,j+1)}]; \\ (z_{4,v}^{(j,j+1)}) &= [u_j^{(c,v)}; \varphi_j^{(c,v)}; v_j^{(c,v)}; \psi_j^{(c,v)}; w_j^{(c,v)}; \theta_j^{(c,v)}; u_{j+1}^{(c,v)}; \varphi_{j+1}^{(c,v)}; v_{j+1}^{(c,v)}; \psi_{j+1}^{(c,v)}; w_{j+1}^{(c,v)}; \theta_{j+1}^{(c,v)}]; \\ (z_{5,v}^{(j,j+1)}) &= [z_1^{(j,j+1)}, z_{5,v}^{(j,j+1)}]; \\ (z_{5,v}^{(j,j+1)}) &= [u_j^{(s,v)}; \varphi_j^{(s,v)}; v_j^{(s,v)}; \psi_j^{(s,v)}; w_j^{(c,v)}; \theta_j^{(c,v)}; u_{j+1}^{(s,v)}; \varphi_{j+1}^{(s,v)}; v_{j+1}^{(s,v)}; \psi_{j+1}^{(s,v)}; w_{j+1}^{(c,v)}; \theta_{j+1}^{(c,v)}]; \\ (z_{6,v,n}^{(j,j+1)}) &= [z_{4,n}^{(j,j+1)}, z_{5,v}^{(j,j+1)}]; & (z_{7,v,n}^{(j,j+1)}) &= [z_{4,n}^{(j,j+1)}, z_{4,v}^{(j,j+1)}]; & (z_{8,v,n}^{(j,j+1)}) &= [z_{5,n}^{(j,j+1)}, z_{5,v}^{(j,j+1)}]. \end{aligned}$$

Тогда потенциальную энергию упругой оболочки можно представить так:

$$\begin{aligned} \bar{\Pi} &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N-1} (z_1^{(j-1,j)})^T [K^{(j,0)}] (z_1^{(j-1,j)}) + \frac{1}{2} \sum_{v=1}^{N_G} \sum_{j=0}^{N-1} (z_{2,v}^{(j-1,j)})^T [K^{(1,v,j)}] (z_{2,v}^{(j-1,j)}) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{v=1}^{N_G} \sum_{j=0}^{N-1} (z_{3,v}^{(j-1,j)})^T [K^{(2,v,j)}] (z_{3,v}^{(j-1,j)}) = \frac{1}{2} (z_{glob})^T [K_{обол}] (z_{glob}). \end{aligned} \quad (11)$$

Потенциальную энергию всего продольного оребрения оболочки запишем в виде

$$\begin{aligned} \Pi_{стр} &= \sum_{j=1}^N \Pi_{стр}^{(j)} = \frac{1}{8} (x_j - x_{j-1}) \left\{ (z_1^{(j-1,j)})^T [K_{\Sigma}^{(j)}] (z_1^{(j-1,j)}) + \sum_{v=1}^{N_G} \left[ (\tilde{z}_{4,v}^{(j-1,j)})^T [K_{\Sigma,c}^{(j,v)}] (\tilde{z}_{4,v}^{(j-1,j)}) \right. \right. \\ &+ \left. \left. (\tilde{z}_{4,v}^{(j-1,j)})^T [K_{\Sigma,s}^{(j,v)}] (\tilde{z}_{5,v}^{(j-1,j)}) \right] + \sum_{v,n=1}^{N_G} \left[ (\tilde{z}_{6,v,n}^{(j-1,j)})^T [K_{\Sigma,sc}^{(j,v,n)}] (\tilde{z}_{6,v,n}^{(j-1,j)}) + (\tilde{z}_{7,v,n}^{(j-1,j)})^T [K_{\Sigma,cc}^{(j,v,n)}] (\tilde{z}_{7,v,n}^{(j-1,j)}) \right] + \right. \\ &\left. (\tilde{z}_{8,v,n}^{(j-1,j)})^T [K_{\Sigma,ss}^{(j,v,n)}] (\tilde{z}_{8,v,n}^{(j-1,j)}) \right\} = \frac{1}{2} (z_{glob})^T [K_{стр}] (z_{glob}). \end{aligned} \quad (12)$$

Тогда матрица жесткости всей конструкции определяется так:  $[K] = [K_{обол}] + [K_{стр}]$ .

Равновесие конструкции описывается следующей системой линейных алгебраических уравнений

$$[K](z_{glob}) = (F).$$

### 3. Численный анализ НДС

Рассмотрим цилиндрическую оболочку с тремя ребрами в продольном направлении. Эти ребра характеризуются следующими значениями угла  $\varphi$ :  $\varphi_1 = 0$ ;  $\varphi_2 = 2,093$ ;  $\varphi_3 = 4,187$ . Параметры оболочки таковы:

$$L = 6 \text{ м}; h = 0.01 \text{ м}; R = 1 \text{ м}; \mu = 0,3; E = 2,1 \cdot 10^{11}. \quad (13)$$

Оболочка находится под действием постоянного внутреннего давления  $q = 2 \cdot 10^6$  Па. Параметры ребер прямоугольного сечения принимались следующими:

$$\begin{aligned} H_0 = H_1 = H_2 = 0,015 \text{ м}; \quad E_0 = E_1 = E_2 = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Па}; \\ F_0 = F_1 = F_2 = 9 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2; \quad (14) \\ G_0 = G_1 = G_2 = 0,81 \cdot 10^{11} \text{ Па}; \\ J_{кр,1} = J_{кр,2} = J_{кр,2} = 13,5 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4; \\ J_{y_0} = J_{y_1} = J_{y_2} = J_{z_1} = J_{z_2} = J_{z_3} = 6,75 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим результаты численных расчетов НДС этой оболочки с продольным усилением. Нами проводился расчет цилиндрической оболочки с параметрами, представленными выше. Число конечных элементов в продольном направлении и число гармоник решений ряда Фурье (4)

варьировались для исследования сходимости решения. Эти параметры принимались следующими:  $N_G = 15; N = 40; N_G = 12; N = 40; N_G = 12; N = 60$ . Результаты расчета радиальных перемещений в зависимости от продольной координаты оболочки приводятся на рис. 2. На этом рисунке представлены результаты расчетов в месте крепления стрингера. Данные при  $N_G = 15; N = 40$  и  $N_G = 12; N = 40$  показаны, соответственно, сплошной линией и точками, а при  $N_G = 12; N = 60$  – пунктирной линией. Решения, полученные при различном числе конечных элементов и различном числе гармоник, близки. Это свидетельствует о сходимости перемещений. Как следует из результатов численных расчетов, в радиальных перемещениях оболочки отсутствуют следующие компоненты разложения в ряд Фурье  $w_n^{(s)}(x) \equiv 0; n = 1, 2, \dots, N_G$ . Это объясняется равенством механических и геометрических характеристик всех стрингеров и расположении стрингеров на одинаковом расстоянии относительно друг друга.

Аналізу подвергались только напряжения в оболочке, так как из экспериментальных данных следует, что разрушение происходит в основном в цилиндрической оболочке, а не в стрингерах. Расчеты проводились при следующих двух значениях параметров дискретиза-

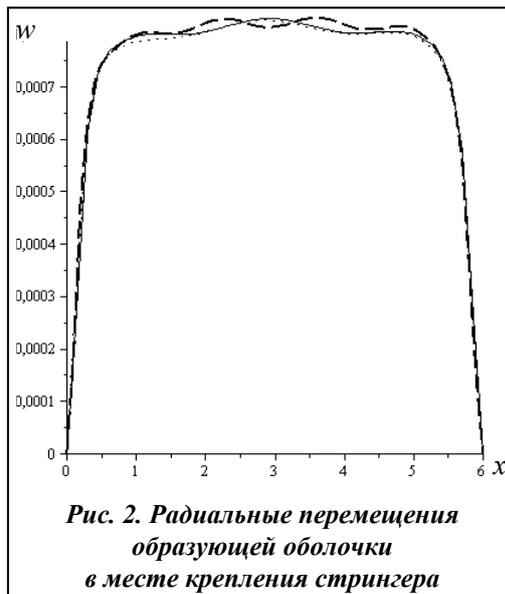


Рис. 2. Радиальные перемещения образующей оболочки в месте крепления стрингера

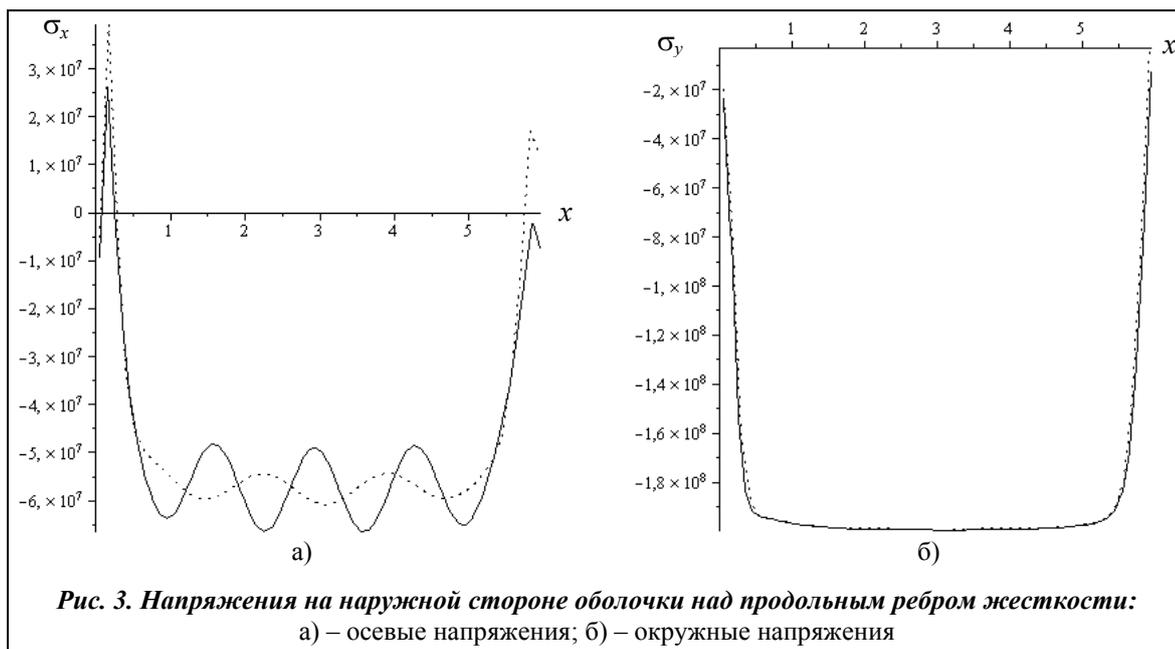


Рис. 3. Напряжения на наружной стороне оболочки над продольным ребром жесткости: а) – осевые напряжения; б) – окружные напряжения



**Рис. 4. Радиальные перемещения образующей цилиндрической оболочки с двадцатью ребрами жесткости**

ребрами равны нулю, что объясняется, во-первых, симметрией конструкции, а во-вторых — равенством нулю проекции внешнего давления на ось  $x$ .

Результаты, представленные на рис. 2, 3, близки к данным, полученным с помощью программного комплекса ANSYS.

Проводился расчет НДС цилиндрической оболочки с 20 ребрами в продольном направлении. Рассматривалась оболочка с параметрами (13). Оболочка содержит двадцать продольных ребер жесткости, расположенных на одинаковом расстоянии относительно друг друга. Параметры этих ребер жесткости имеют вид (14). Проводилось три расчета НДС оболочки со следующим числом гармоник ряда Фурье и числом конечных элементов в продольном направлении: 1.  $N_G = 20$ ;  $N = 20$ ; 2.  $N_G = 20$ ;  $N = 40$ ; 3.  $N_G = 40$ ;  $N = 20$ .

Из результатов численных расчетов следует, что в разложении перемещений в ряд Фурье (4) присутствуют постоянная составляющая, двадцатая и сороковая гармоники. На рис. 4 представлены радиальные перемещения оболочки в зависимости от продольной координаты в месте крепления стрингеров.

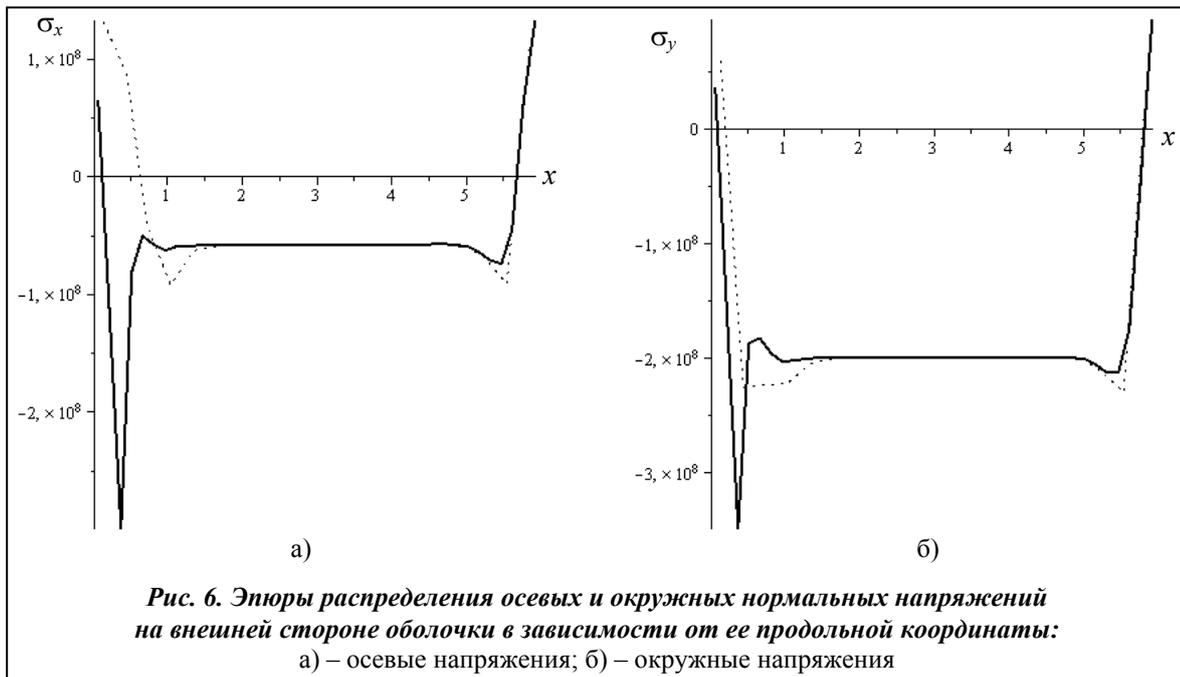


**Рис. 5. Эюра двадцатой гармоники ряда Фурье  $w_{20}^{(c)}$  в зависимости от продольной координаты оболочки**

Сплошной жирной линией даны результаты расчетов при  $N_G = 12$ ;  $N = 60$ , а пунктирной — результаты при  $N_G = 15$ ;  $N = 50$ . Полученные данные близки. Как следует из результатов расчета, нормальные напряжения  $\sigma_x$  на внутренних и наружных сторонах оболочки отличаются незначительно. Это говорит о том, что оболочка в основном растягивается и сжимается и значительно в меньшей степени изгибается. На краях оболочки (рис.3) наблюдаются значительные градиенты напряжений, причем область этих градиентов мала. Отметим, что касательные напряжения  $\tau_{xy}$  над продольными

результаты расчетов при  $N_G = 20$ ;  $N = 40$ , а сплошной тонкой — данные при  $N_G = 40$ ;  $N = 20$ . Тонкой пунктирной линией представлены данные при следующих параметрах дискретизации  $N_G = 20$ ;  $N = 40$ . Все показанные решения близки, что свидетельствует о сходимости решения для перемещений.

Исследовалось поведение ненулевой гармоники ряда Фурье (4)  $w_{20}^{(c)}$  в зависимости от продольной координаты оболочки. Результаты расчетов приводятся на рис. 5. Как следует из рисунка, только на краях оболочки эта гармоника отлична от нуля. Её значения быстро уменьшаются до нуля, и на большей части оболочки величины  $w_{20}^{(c)}$ ,  $w_{40}^{(c)}$  очень малы. На большей части цилиндрической оболочки, расположенной посередине, наблюдается осе-



симметричное деформирование.

Результаты расчета напряжений представлены на рис. 6. На рис. 6, а изображены результаты расчета продольных напряжений  $\sigma_x$ , а на рис. 6, б дан расчет окружных напряжений. Отметим, что на этих рисунках сплошной линией показаны напряжения при  $N_G = 20$  и  $N = 40$ , а линией из точек – результаты расчета при  $N_G = 20$  и  $N = 20$ .

### Заключение

В статье предложен вариант полуаналитического метода конечных элементов, который позволяет исследовать НДС цилиндрических оболочек с силовым набором. Проведенные вычислительные эксперименты показали высокую эффективность предложенного метода. Полученные результаты сравнивались с данными ANSYS.

В цилиндрических оболочках с  $N$  продольными ребрами в разложении перемещений в ряд Фурье присутствуют кратные  $N$  гармоники. Если величина  $N$  велика (порядка 20–30), то амплитуды гармоник, кратные  $N$ , имеют ненулевые значения только на краях оболочки. В большей средней части оболочки наблюдается осесимметричное НДС.

Результаты численных расчетов свидетельствуют, что в ряде Фурье для перемещений отсутствуют следующие компоненты  $w_n^{(s)}(x) \equiv 0$ ;  $n = 1, 2, \dots, N_G$ . Это объясняется тем, что стрингеры расположены на одинаковом расстоянии относительно друг друга и имеют одинаковые механические и геометрические характеристики. Осевые и окружные нормальные напряжения имеют значительные градиенты на концах оболочки. На большей, средней части оболочки напряжения близки к постоянной величине. На внутренней и наружной сторонах оболочки значения напряжений близки, то есть оболочка в основном растягивается, сжимается и в значительно меньшей степени изгибается.

### Литература

1. Моссаковский, В. И. Прочность ракетных конструкций / В. И. Моссаковский, А. Г. Макаренко, П. И. Никитин. – М.: Высш. шк., 1990. – 345 с.
2. Амиро, И. Я. Теория ребристых оболочек / И. Я. Амиро, В. А. Заруцкий. – Киев: Наук. думка, 1980. – 367 с.
3. Рикардс, Р. Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин / Р. Б. Рикардс. – Рига: Зинатне, 1988. – 467 с.

Поступила в редакцию  
12.11.13