

УДК 524.82, 524.83, 524.85

Ю. Кулініч

Астрономічна обсерваторія Львівського національного університету імені Івана Франка  
79005 Львів, вул. Кирила і Мефодія 8**Эволюция сферично-симметричной пылоподобной хмари  
в  $\Lambda$ CDM-моделях**

*Досліджено розвиток сферично-симметричної пилоподібної хмари на лінійній та нелінійній стадіях її еволюції в  $\Lambda$ CDM-моделях Всесвіту з ненульовою кривиною 3-простору. Умови розвитку збурення на довільному червоному зміщенні  $z \geq 0$  виражено через амплітуду  $\delta_{\min}$  збурення, що припинить розширюватись на часовій безмежності, амплітуду  $\delta_{ta}$  збурення, що припинить розширюватись на заданий момент часу, та амплітуду  $\delta_c$  збурення, яке на заданий момент часу сколапсувало. Отримано їхню залежність від параметрів космологічної моделі та червоного зміщення. Відношення  $D'_{nl}/D_l$  нелінійних значень амплітуд до лінійних та характерних розмірів  $k_{nl}/k$  збурення виражено через апроксимаційну залежність від лінійного значення амплітуди  $\delta_z$ .*

**ЭВОЛЮЦИЯ СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОГО ПЫЛЕВИДНОГО ОБЛАКА В  $\Lambda$ CDM-МОДЕЛЯХ**, Кулинич Ю. — Исследовано развитие сферически-симметричного пылевидного облака на линейной и нелинейной стадиях его эволюции в  $\Lambda$ CDM-моделях Вселенной с ненулевой кривизной 3-пространства. Условия развития на некотором определенном красном смещении  $z \geq 0$  выражены через амплитуду  $\delta_{\min}$  возмущения, которое прекратит расширяться на временной бесконечности, амплитуду  $\delta_{ta}$  возмущения, которое прекратит расширяться на определенный момент времени, и амплитуду  $\delta_c$  возмущения, которое на определенный момент времени сколлапсировало. Получены их зависимости от параметров космологической модели и красного смещения. Отношение  $D'_{nl}/D_l$  нелинейных значений амплитуд к линейным и характерных размеров  $k_{nl}/k$  возмущения выражены через апроксимационную зависимость от линейного значения амплитуды  $\delta_z$ .

**EVOLUTION OF THE SPHERICALLY SYMMETRIC DUST-LIKE CLOUD IN  $\Lambda$ CDM MODELS**, by Kulinich Yu. — We investigated the development of the spherically symmetric dust-like cloud at the linear and nonlinear stages of its evolution in  $\Lambda$ CDM models of the Universe with nonzero 3-space curvature. The conditions of development at an arbitrary redshift  $z \geq 0$  are expressed through the following linear values of amplitudes: the amplitude  $\delta_{\min}$  of perturbation, whose expansion will be stopped at time

*infinity, the amplitude  $\delta_{ta}$  of perturbation, whose expansion will be stopped at the given moment of time, and the amplitude  $\delta_c$  of perturbation, which has been collapsed at the given moment of time. Their dependencies on cosmological model parameters and redshift are obtained. The ratios of nonlinear values to linear ones of amplitudes  $D_{nl}/D_l$  and the characteristic sizes  $k_{nl}/k$  of perturbation are expressed through the approximate dependence on linear value of the amplitude  $\delta_z$ .*

## ВСТУП

Лінійна стадія космологічних збурень густини детально досліджена на всіх етапах розвитку Всесвіту. Це дає можливість розраховувати характеристики великомасштабної структури Всесвіту з точністю у кілька відсотків. Значно більше невизначеностей у розумінні формування її елементів — галактик, скупчень галактик та порожнин у їхньому розподілі. Причиною є складність аналізу розвитку збурень густини у багатокомпонентному середовищі на нелінійній стадії їхньої еволюції. Важливі параметри нелінійної стадії розвитку збурень, однак, можна отримати із розв'язку задачі колапсу пилоподібної сферично-симетричної хмари. Вперше така задача розглядалася Леметром (1933 р.), Дінглом (1933 р.) та Толменом (1934 р.) [25]. Розгляд сферично-симетричних неоднорідностей є важливим з кількох причин. По-перше, це найпростіший випадок, який дозволяє максимально спростити математичні викладки і отримати точні аналітичні розв'язки. По-друге, елементи великомасштабної структури Всесвіту — квазари, галактики, багаті скупчення галактик — формуються у високих піках випадкового гауссівського поля збурень густини. Найвищі із них є сферично-симетричними [2, 7]. По-третє, отримані результати можуть бути використані як перше наближення при розгляді більш складних за геометрією збурень, а також для побудови напіваналітичних методів розрахунку характеристик нелінійної великомасштабної структури Всесвіту [12, 13, 18, 19, 24]. Спостереження показують, що значна частка багатих скупчень галактик дійсно є сферично-симетричними [6]. Саме тому на розв'язках цієї задачі базується метод розрахунку функції мас та рентгенівської температури багатих скупчень галактик [5, 7, 8, 10, 11, 14, 20—22].

Еволюція амплітуди однорідного сферично-симетричного збурення в  $\Lambda$ CDM-моделях вже неодноразово вивчалася [10, 15, 3]. Зокрема, було здійснено розрахунок критичної амплітуди колапсу  $\delta_c$  і відносної густини хмари, яка досягла стадії динамічної рівноваги  $\Delta_c$ , в залежності від значень космологічних параметрів [15, 3]. Дана робота доповнює ці дослідження розрахунками: а) найменшої амплітуди  $\delta_{\min}$  збурень, які є гравітаційно зв'язаними, б) лінійної амплітуди  $\delta_{ta}$  збурень, які припинили розширюватися на заданий момент часу, та в) часової залежності характерного масштабу сферично-симетричного збурення на нелінійній стадії його розвитку. Результати цих розрахунків є важливими при аналізі каталогів галактик на предмет пошуку великомасштабних структур різного масштабу та корекції спектру потужності збурень густини речовини за нелінійну еволюцію на малих просторових масштабах, менших за 10 Мпк [12, 13, 18, 19, 24].

## СФЕРИЧНО-СИМЕТРИЧНА НЕОДНОРІДНІСТЬ У ВСЕСВІТІ, ЯКИЙ РОЗШИРЮЄТЬСЯ

Вважаємо, що Всесвіт є однорідним та ізотропним, а його розширення описується рівняннями Айнштайна з космологічною сталою

$$\mathfrak{G}_{\mu\nu} \equiv \mathfrak{K}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathfrak{K} = 8\pi GT_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Lambda, \quad (1)$$

де  $\mathfrak{G}_{\mu\nu}$  — тензор Айнштайна,  $\mathfrak{K}_{\mu\nu}$  — тензор кривини Річі у просторі-часі з метрикою  $g_{\mu\nu}$ ,  $T_{\mu\nu}$  — тензор енергії-імпульсу матерії ( $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ ). Тут і надалі покладаємо, що швидкість світла  $c = 1$ , тобто часова координата  $t$  має розмірність відстані. У сферичних просторових координатах  $R, \theta$  та  $\varphi$  метрика простору-часу такого Всесвіту має простий вигляд:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\mathfrak{H}^2(R)dR^2 - a^2(t)\chi^2(R)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2),$$

$$\chi'(R) = (1 - K\chi^2(R))^{1/2}\mathfrak{H}(R),$$

де  $K$  — кривина 3-простору (гіперповерхні постійного часу), значення якої для нашого Всесвіту може бути встановлене на основі спостережень,  $a(t)$  — масштабний фактор,  $R$  — радіальна координата, яка має розмірність відстані. Одна із функцій  $\chi(R)$  та  $\mathfrak{H}(R)$  може бути вибрана довільним чином внаслідок довільності вибору радіальної координати  $\tilde{R} \equiv \tilde{R}(R)$ . Здебільшого покладають  $\mathfrak{H}(R) = 1$ , що приводить до рівності

$$\chi(R) = \begin{cases} R & \text{для } K = 0, \\ \sin(\omega R)/\omega & \text{для } K > 0, \\ \text{sh}(\omega R)/\omega & \text{для } K < 0, \end{cases}$$

де  $\omega \equiv |K|^{1/2}$ . Можна покласти також  $\chi(R) = R$ , тоді матимемо

$$\mathfrak{H}(R) = (1 - KR^2)^{-1/2}.$$

У післярекомбінаційну епоху еволюції Всесвіту ( $z < 1000$ ), коли тиском речовини і випромінювання можна знехтувати, наближення пилоподібного середовища із тензором енергії-імпульсу ідеальної рідини є достатньо точним для аналізу динаміки його розширення. В супутніх до речовини координатах такий тензор має простий вигляд:  $T_v^{\mu} = \text{diag}\{\bar{\rho}_m(t), 0, 0, 0\}$ , де  $\bar{\rho}_m(t)$  — густина матерії в енергетичних одиницях у момент часу  $t$ . Уведемо означення безрозмірних величин густини матерії  $\Omega_m$ , космологічної сталої  $\Omega_\Lambda$ , кривини 3-простору  $\Omega_K$  таким чином, що

$$\Omega_m \equiv \frac{8\pi G\rho_m^0}{3H_0^2},$$

$$\Omega_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{3H_0^2},$$

$$\Omega_K \equiv \frac{-K}{H_0^2},$$

де  $\rho_m^0$  — усереднене по простору теперішнє значення густини енергії матерії,  $H_0$  — теперішнє значення сталої Габбла. Рівняння (1) при цьому набувають вигляду

$$H = H_0(\Omega_m/a^3 + \Omega_K/a^2 + \Omega_\Lambda)^{1/2},$$

$$q = \frac{H_0^2}{H^2} \left( \frac{1}{2} \frac{\Omega_m}{a^3} - \Omega_\Lambda \right),$$

де  $H \equiv \dot{a}/a$  — стала Габбла на поточний момент часу  $t$ ,  $q \equiv -\ddot{a}/\dot{a}^2$  — параметр прискорення (точка позначає похідну по часу). Для теперішнього моменту часу  $t_0$  рівняння Айнштайна дають співвідношення

$$\Omega_m + \Omega_K + \Omega_\Lambda = 1, \quad q_0 = \Omega_m/2 - \Omega_\Lambda.$$

Сукупність спостережуваних даних про властивості Всесвіту у великих масштабах вказує на те, що космологічна модель із параметрами  $H_0 = 68 \pm 9$  км/(с·Мпк),  $\Omega_m = 0.28 \pm 0.08$ ,  $\Omega_\Lambda = 0.74 \pm 0.07$  і  $\Omega_K \approx -0.02$  є найближчою до істинної моделі спостережуваного Всесвіту [1]. В ній  $q_0 \approx -0.6$ , тобто розширення Всесвіту відбувається із додатним прискоренням ( $\ddot{a} > 0$ ).

Розглянемо у такому Всесвіті еволюцію сферично-симетричної неоднорідності, яка розвинулась із малого за амплітудою початкового збурення густини і швидкості речовини, згенерованого в ранню епоху еволюції Всесвіту.

Просторово-часовий інтервал в області сферично-симетричного збурення для моделей з  $\Lambda$ -сталого та пилоподібною матерією в супутній системі відліку матиме вигляд [25]

$$ds^2 = dt^2 - e^{\lambda(t,R)} dR^2 - r^2(t,R)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2).$$

Тут  $t$  — власний час спостерігачів, супутніх до пилоподібною матерії, який надалі виражатимемо в одиницях  $H_0^{-1}$  і позначатимемо як  $\tau$ ,  $R$  — радіальна координата з початком у центрі збурення,  $\lambda(t, R)$  та  $r(t, R)$  — метричні функції, які у випадку сферично-симетричного збурення залежать лише від часової та радіальної координат. Підставляючи значення метричного тензора в рівняння Айнштайна (1)  $\mathbb{G}_1^0 = 0$ , отримаємо

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (r')^2 e^{-\lambda} = 0,$$

де штрихом позначено похідну по  $R$ . Звідси випливає, що добуток  $(r')^2 e^{-\lambda}$  є функцією лише радіальної координати  $R$  і може бути перепозначений як  $1 - f(R) \equiv r'^2(\tau, R) e^{-\lambda(\tau, R)}$ .

Покладаючи початковий розподіл матерії у збуренні близьким до фонового, у наближенні  $\tau \rightarrow 0$  отримаємо, що  $r(\tau, R) \approx \tilde{\chi}(R)a(\tau)$  та  $e^{\lambda(\tau, R)/2} \approx \tilde{\mathfrak{M}}(R)a(\tau)$ . Як і у випадку фонові метрики, одна із функцій  $\tilde{\chi}(R)$  та  $\tilde{\mathfrak{M}}(R)$  може бути вибрана довільним чином внаслідок довільності у виборі радіальної координати.

Введемо позначення:  $x_R(\tau, R) \equiv r(\tau, R)/\tilde{\chi}(R)$  та  $y_R(\tau, R) \equiv e^{\lambda(\tau, R)/2}/\tilde{\mathfrak{M}}(R)$ . З рівняння збереження густини енергії  $T_{0a}^a = 0$  та умови однорідності та ізотропності Всесвіту у початковий момент часу випливає, що  $\rho_m(\tau, R) = \rho_m^0 x_R^{-2}(\tau, R) y_R^{-1}(\tau, R)$ . Для малих збурень у ранній момент часу можна покласти, що  $x_R(\tau, R) \approx a(\tau)[1 - (1/3)\alpha(R)a(\tau)]$ ,  $y_R(\tau, R) \approx a(\tau)[1 - (1/3)\beta(R)a(\tau)]$  та  $\delta_m(\tau, R) \equiv \rho_m(\tau, R)/\bar{\rho}_m(\tau) - 1 = a^3(\tau)x_R^{-2}(\tau, R)y_R^{-1}(\tau, R) - 1 \approx A(R)a(\tau)$ , де  $A(R) = (1/3)[2\alpha(R) + \beta(R)]$  — початковий профіль збурення. З рівності  $r'^2(\tau, R)e^{-\lambda(\tau, R)} = 1 - f(R)$  матимемо, що

$$\tilde{\chi}'(R)\beta(R) = \tilde{\chi}(R)\alpha(R) + \tilde{\chi}(R)\alpha'(R),$$

та, як наслідок,  $\alpha(R) = 3\tilde{\chi}^{-3}(R) \int_0^R A(R)\tilde{\chi}^2(R)\tilde{\chi}'(R)dR$ . Підставивши наближені розклади  $x_R(\tau, R) \approx a(\tau)[1 - 1/3\alpha(R)a(\tau)]$  та  $\rho(\tau, R) \approx \bar{\rho}(\tau)[1 + A(R)a(\tau)]$  в рівняння Айнштайна  $\mathbb{G}_0^0 = 8\pi G\rho_m + \Lambda$ , отримаємо рівність

$$\frac{40}{3}\pi G\rho_m^0 A(R)\tilde{\chi}^2(R)\tilde{\chi}'(R) = \frac{\partial}{\partial R} [f(R)\tilde{\chi}(R) - K\tilde{\chi}^3(R)], \quad (2)$$

яка пов'язує кривину в області збурення  $f(R)/\chi^2(R)$  з його початковим профілем  $A(R)$ . Введемо безрозмірний параметр кривини 3-простору в області збурення  $\Omega_f(R) \equiv -f(R)/(H_0^2\tilde{\chi}^2)$ . Інтегруючи рівняння (2), отри-

МАЄМО

$$\Omega_f(\tilde{\chi}) = -5\Omega_m\tilde{\chi}^{-3} \int_0^{\tilde{\chi}} A(\tilde{\chi})\tilde{\chi}^2 d\tilde{\chi} + \Omega_K, \quad (3)$$

$$\tilde{\mathfrak{H}}(R) = \frac{\tilde{\chi}'}{(1 + H_0^2\tilde{\chi}^2\Omega_f(\tilde{\chi}))^{1/2}}. \quad (4)$$

Отже, описуючи неоднорідне збурення, необхідно вказати профіль  $A$  як функцію від  $\tilde{\chi}$  та довільним чином задати одну із залежностей:  $\tilde{\chi}(R)$  або  $\tilde{\mathfrak{H}}(R)$ . Для явного задання профілю як функції від радіальної координати  $R$  покладемо, що  $\tilde{\chi}(R) = R$ , і з (3) і (4) отримаємо

$$\Omega_f(R) = -5\Omega_m R^{-3} \int_0^R A(\tilde{R})\tilde{R}^2 d\tilde{R} + \Omega_K, \quad (5)$$

$$\tilde{\mathfrak{H}}(R) = (1 + H_0^2 R^2 \Omega_f(R))^{-1/2}.$$

Для прикладу у числових розрахунках будемо використовувати профіль збурення густини матерії із роботи [4]:

$$A(\xi) = \delta_0 \left(1 - \frac{2}{3}\xi^2\right) e^{-\xi^2}, \quad (6)$$

де  $\xi \equiv R/R_c$ ,  $R_c$  — характерний масштаб збурення,  $\delta_0$  — амплітуда в центрі. Вибір конкретного профілю густини збурення не вплине на основний результат даної роботи. Безрозмірний параметр кривини, згідно з (5), матиме вигляд

$$\Omega_f(\xi) = -\frac{5}{3}\Omega_m\delta_0 e^{-\xi^2} + \Omega_K.$$

Оскільки густина пилоподібної матерії в області збурення визначається із значень функцій  $x_R(\tau, R)$  та  $y_R(\tau, R)$ , то еволюція збурення описуватиметься лише двома рівняннями. Зокрема, скористаймося рівняннями  $\mathfrak{G}_1^1 = \Lambda$  та  $\mathfrak{G}_2^2 - (1/2)\mathfrak{G}_1^1 = \Lambda/2$ , які мають такий вигляд:

$$\ddot{x}_R = \frac{3}{2}\Omega_\Lambda x_R - \frac{1}{2}\frac{\dot{x}_R^2}{x_R} + \frac{1}{x_R}\frac{\Omega_f}{2}, \quad (7)$$

$$\ddot{y}_R = \frac{3}{2}\Omega_\Lambda y_R - \left(\frac{\dot{x}_R \dot{y}_R}{x_R} - \frac{1}{2}\frac{\dot{x}_R^2 y_R}{x_R^2}\right) + \left(\Omega_f + \frac{R\Omega_f'}{2}\right)\frac{1}{x_R} - \frac{y_R}{x_R^2}\frac{\Omega_f}{2}. \quad (8)$$

Тут і нижче точкою позначено похідну по  $\tau$ . Початкові умови в деякій достатньо ранній момент часу  $\tau_i = 2/3\Omega_m^{-1/2}a_i^{3/2}$  ( $a_i$  — значення масштабного фактора в момент часу  $\tau_i$ , такий, що доданками порядку  $a_i^2$  можна нехтувати) для цієї системи рівнянь покладемо такими:  $x_{Ri} = y_{Ri} \approx a_i$ ,  $\dot{x}_{Ri} = \dot{y}_{Ri} \approx \Omega_m^{1/2}a_i^{-1/2}$  та  $\Omega_f = \Omega_f(R)$ . Збурення густини з'являється як наслідок відхилення параметра кривини в області збурення  $\Omega_f$  від параметра кривини Всесвіту  $\Omega_K$ . Рівняння (7) та (8) слід вважати справедливими, коли  $\Omega_f \leq \Omega_K$  та  $\Omega_f' \geq 0$  при всіх значеннях  $R$ . У цьому випадку перші протипотоки речовини збурення з'являться у момент колапсу його центральної області. Після цього моменту рівняння (7) та (8) застосовувати не можна. Коли збурення є від'ємним ( $\Omega_f > \Omega_K$ ) та/або таким, що на деякій відстані від центра  $\Omega_f' < 0$ , протипотоки виникатимуть відразу. Тому отримані рівняння для їхнього опису непридатні.

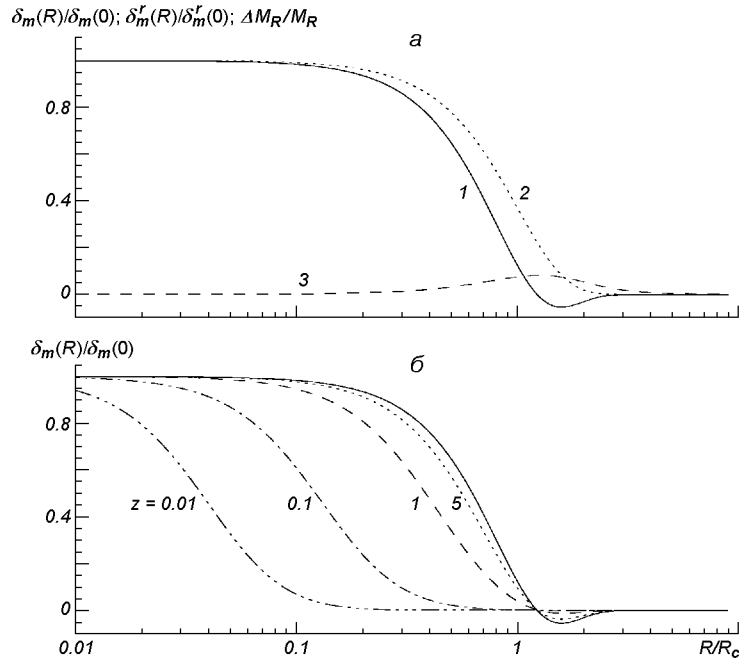


Рис. 1. Залежності фізичних параметрів сферичної неоднорідності від радіальної координати  $R$ : *a* — збурення густини  $\delta_m$  (крива 1) і маси  $\delta_m^r$  (крива 2) на лінійній стадії розвитку збурення та відносний дефект мас  $\Delta M_R/M_R$  в одиницях малої величини  $H_0^2 R_c^2 \delta_0$  (крива 3); *б* — збурення густини  $\delta_m$  на лінійній (суцільна лінія) та нелінійній (на фіксовані моменти часу, які відповідають червоним зміщенням  $z = 5, 1, 0.1, 0.01$ ) стадіях розвитку збурення, у центрі якого досягається сингулярність у теперішній момент часу, для космологічної моделі з параметрами  $\Omega_m = 0.3$  та  $\Omega_\Lambda = 0.7$

Першим інтегралом рівняння (7) є  $\dot{x}_R^2 - F(R)/(R^3 H_0^2) x_R^{-1} - \Omega_\Lambda x_R^2 = \Omega_f$ , де  $F(R) = 2GM_R$  [3],  $M_R \equiv 4\pi \int_0^R \rho_m r^2 r' dR = 4/3\pi R^3 \rho_m^0$  — маса речовини у сфері радіуса  $R$  без врахування кривини 3-простору. Повна маса у сфері з радіусом  $R$  становить  $\tilde{M}_R \equiv 4\pi \int_0^R \rho_m r^2 e^{\lambda/2} dR = 4\pi \rho_m^0 \int_0^R R^2 (1 + H_0^2 R^2 \Omega_f(R))^{-1/2} dR$ . Різниця  $\Delta M_R \equiv M_R - \tilde{M}_R$  є гравітаційним дефектом маси, який може приймати як додатні, так і від'ємні значення в залежності від знаку безрозмірного параметра локальної кривини  $\Omega_f$ . Відносно збурення маси  $\delta_m^r \equiv \Delta M_R/M_R$  у сфері з радіусом  $R$  дорівнює  $\delta_m^r(\tau, R) = 3r^{-3}(\tau, R) \int_0^R \delta_m(\tau, R) r^2(\tau, R) r'(\tau, R) dR = a^3(\tau) x_R^{-3}(\tau, R) - 1$  [3]. Отже, величина  $\rho_m^r(\tau, R) \equiv \rho_m^0 x_R^{-3}(\tau, R)$  є усередненою у сфері радіуса  $R$  густиною речовини, в той час як  $\rho_m(\tau, R) \equiv \rho_m^0 x_R^{-2}(\tau, R) y_R^{-1}(\tau, R)$  — густина речовини на відстані  $R$  від центра збурення.

На рис. 1, *a* приведено профілі збурення густини та маси, віднесених до їхніх значень у центрі на лінійній стадії розвитку. Для цього ж збурення приведено залежність від радіальної координати  $R$  відносного дефекту мас в наближенні  $H_0^2 R^2 |\Omega_f(R)| \ll 1$  для всіх  $R$ .

## ЕВОЛЮЦІЯ АМПЛІТУД ТА МАСШТАБІВ ЗБУРЕНЬ МАСИ І ГУСТИНИ

Двома найважливішими параметрами збурення є його амплітуда та масштаб. Розвиток амплітуди збурення у моделі з пилоподібною матерією не залежить від його масштабу. Однак зміна масштабу збурення при заданому профілі густини залежить від його амплітуди. Покажемо це за допомогою отриманих вище рівнянь.

Описуючи амплітуди збурень маси та густини, виходитимемо з двох означених вище виразів:  $\delta_m^r(\tau, R) = a^3(\tau)x_R^{-3}(\tau, R) - 1$  та  $\delta_m(\tau, R) = a^3(\tau)x_R^{-2}(\tau, R)y_R^{-1}(\tau, R) - 1$ . У випадку малих амплітуд в лінійному наближенні отримуємо рівності [3, 5]:

$$\delta_m(\tau, R) \approx A(R)D_l(a(\tau)), \quad (9)$$

$$\delta_m^r(\tau, R) \approx \delta_z(a(\tau), R) \equiv \frac{3}{5} \frac{\Omega_K - \Omega_l(R)}{\Omega_m} D_l(a(\tau)), \quad (10)$$

де  $D_l(a(\tau))$  — параметр лінійного збільшення амплітуди збурення, який є зростаючим розв'язком лінійного рівняння

$$\ddot{\delta}_m + 2 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\delta}_m - \frac{3}{2} \frac{\bar{\rho}_m}{\rho_c} \delta_m = 0.$$

Його можна подати в інтегральному вигляді [3, 5, 10]:

$$D_l(a) = \frac{5}{2} \Omega_m a^{-1} X^{1/2}(a) \int_0^a X^{-3/2}(\tilde{a}) d\tilde{a},$$

де  $X(a) \equiv \Omega_\Lambda a^2 + \Omega_m a^{-1} + \Omega_K$ . Надалі лінійне збільшення  $\delta_z$  амплітуди в теперішній момент часу ( $a = 1$ ) позначатимемо як  $\delta$ . Означимо параметри нелінійного збільшення амплітуд збурень маси  $D_{nl}^r(a(\tau), R)$  та густини  $D_{nl}(a(\tau), R)$  за допомогою виразів

$$\delta_m^r(\tau, R) \equiv \frac{3}{5} \frac{\Omega_K - \Omega_l(R)}{\Omega_m} D_{nl}^r(a(\tau), R),$$

$$\delta_m(\tau, R) \equiv A(R)D_{nl}(a(\tau), R)$$

так, що у випадку малих збурень  $D_{nl}^r(a, R) \approx D_{nl}^r(a) \approx D_l^r(a)$  та  $D_{nl}(a, R) \approx D_{nl}(a) \approx D_l(a)$ . Розрізнятимемо дві стадії еволюції збурення: стадію розширення  $\dot{x}_R > 0$  ( $\dot{\rho}_m^r < 0$ ) та стадію колапсу  $\dot{x}_R < 0$  ( $\dot{\rho}_m^r > 0$ ). Їх розділяє момент зупинки, коли  $\dot{x}_R = 0$  ( $\dot{\rho}_m^r = 0$ ).

У випадку лінійної теорії просторові частини збурень прийнято розкласти на суперпозицію гармонійних доданків. Тому представимо просторові частини сферично-симетричного збурення маси та густини у вигляді рядів

$$\frac{3}{5} \frac{\Omega_K - \Omega_l(R)}{\Omega_m} = \delta_0 \sum_{\tilde{k}} b_{\tilde{k}} \cos(\tilde{k}R) \approx \delta_0 \left( 1 - \frac{1}{2} k_M^2 R^2 \right) + O(R^4), \quad (11)$$

$$A(R) = \delta_0 \sum_{\tilde{k}} c_{\tilde{k}} \cos(\tilde{k}R) \approx \delta_0 \left( 1 - \frac{1}{2} k_p^2 R^2 \right) + O(R^4), \quad (12)$$

де величини  $k_M \equiv (\sum_{\tilde{k}} \tilde{k}^2 b_{\tilde{k}})^{1/2}$  та  $k_p \equiv (\sum_{\tilde{k}} \tilde{k}^2 c_{\tilde{k}})^{1/2}$  називатимемо характерними хвильовими масштабами збурень маси та густини відповідно. Слід покласти, що  $\sum_{\tilde{k}} b_{\tilde{k}} = \sum_{\tilde{k}} c_{\tilde{k}} = 1$ . Використавши розклади (11) та (12), з (5) отримаємо рівність  $k_M = (3/5)^{1/2} k_p$ . Для профілю (6) матимемо  $k_p = (10/3)^{1/2} R_c^{-1}$  та  $k_M = 2^{1/2} R_c^{-1}$ . Узагальнимо визначення хвильових масш-

табів збурень маси та густини на випадок нелінійного розвитку наступним чином:

$$k_{M,nl} \equiv \lim_{R \rightarrow 0} \left| \frac{1}{\delta_m^r} \frac{\partial^2 \delta_m^r}{\partial R^2} \right|^{1/2}, \quad (13)$$

$$k_{\rho,nl} \equiv \lim_{R \rightarrow 0} \left| \frac{1}{\delta_m} \frac{\partial^2 \delta_m}{\partial R^2} \right|^{1/2}. \quad (14)$$

У випадку лінійних збурень, коли є справедливими наближені рівності (9) та (10), матимемо, що  $k_{M,nl} \approx k_M$  та  $k_{\rho,nl} \approx k_\rho$ . Тобто, характерні масштаби збурень маси та густини в лінійному наближенні у супутніх координатах є постійними. Внаслідок нелінійного розвитку ці масштаби стають залежними від часу. Щоб описати цю залежність, скористаймося наближеними розкладами:

$$x_R(\tau, R) \approx x(\tau) \left( 1 + \frac{1}{2} \delta_0 k_\rho^2 R^2 \mu_x(\tau) \right),$$

$$y_R(\tau, R) \approx y(\tau) \left( 1 + \frac{1}{2} \delta_0 k_\rho^2 R^2 \mu_y(\tau) \right).$$

Підставивши їх у рівняння (7) та (8), і врахувавши, що згідно з (5) та (12)  $\Omega_\rho(R) \approx \Omega_K - (5/3)\Omega_m \delta_0 + (1/2)\Omega_m \delta_0 k_\rho^2 R^2 + O(R^4)$ , для величин  $x$  та  $y$ , групуючи доданки при різних степенях  $R$ , отримуємо рівняння

$$\ddot{x} = \frac{3}{2} \Omega_\Lambda x - \frac{1}{2} \frac{\dot{x}^2}{x} + \frac{1}{x} \frac{\Omega_{f_0}}{2}, \quad (15)$$

$$\ddot{\mu} + 3 \frac{\dot{x}}{x} \dot{\mu} + \frac{\Omega_{f_0}}{x^2} \mu = \frac{5}{2} \frac{\Omega_m}{x^2}, \quad (16)$$

де  $\Omega_{f_0} \equiv \Omega_K - (5/3)\Omega_m \delta_0$ , та покладено, що

$$\mu(\tau) = 2\mu_x(\tau) + \mu_y(\tau) \text{ або } \mu(\tau) = 5\mu_x(\tau).$$

З означень (13) та (14) при цьому отримуємо рівність

$$k_{nl}/k = \left| (\delta_0 D_{nl} + 1) \frac{\mu}{D_{nl}} \right|^{1/2},$$

де  $k_{nl}/k = k_{\rho,nl}/k_\rho$  або  $k_{nl}/k = k_{M,nl}/k_M$ . Початковими умовами для рівняння (16) є умови:  $\mu_i = a_i$  та  $\dot{\mu}_i = \Omega_m^{1/2} a_i^{-1/2}$ . При цьому для малих збурень в ранній момент часу виконується рівність  $k_{nl}/k \approx 1$ . Початкові умови для рівняння (15) є такими ж, як і для (7).

На рис. 1, б приведено профілі збурення густини  $\delta_m$  на лінійній (суцільна лінія) та нелінійній стадіях розвитку (на фіксовані моменти часу, які відповідають червоним зміщенням  $z = 5, 1, 0.1, 0.01$ ). Параметр  $\delta_0$  в (6) вибирався таким чином, щоб амплітуда збурення на нелінійній стадії в космологічній моделі з параметрами  $\Omega_m = 0.3$  та  $\Omega_\Lambda = 0.7$  прямувала до безмежності в теперішній момент часу.

#### ЕВОЛЮЦІЙНІ ПАРАМЕТРИ НЕОДНОРІДНОГО ЗБУРЕННЯ

Додатне збурення густини з адіабатичними початковими умовами на лінійній стадії розвитку розширюється дещо повільніше, ніж Всесвіт. Сповільнення наростає внаслідок самогравітації речовини в області збурення, далі збурення зрештою зупиняється і починає стискатися. Момент зупинки деякого сферичного шару збурення  $\tau_{ia}$  залежить від надлишку густини,



усередненої в об'ємі, обмеженому цим шаром. Однорідне сферично-симетричне збурення зупиняється одночасно у всіх шарах. У випадку неоднорідного збурення моменти зупинок окремих шарів не збігаються. Після моменту зупинки настає стадія колапсу, яка у випадку пилоподібної речовини та радіального колапсу завершується стисканням шару у точку. Момент часу  $\tau_{col}$ , коли шар стиснувся у точку, назовемо моментом його колапсу. Моменти колапсу є однаковими для окремих шарів однорідного збурення і різними у випадку неоднорідного збурення.

Безмежна густина в центрах збурень насправді не досягається через відхилення руху частинок від радіальних траєкторій внаслідок їхніх теплових рухів та гравітаційної взаємодії між близькими парами частинок. В цьому випадку після кількох проходжень поблизу центра збурення частинки обмінюються енергією, внаслідок чого настає динамічна рівновага. Кінцевий розмір та густину хмари можна розрахувати на основі теореми віріалу [16, 17, 23].

#### ДОСЯГНЕННЯ МОМЕНТУ ЗУПИНКИ

Момент зупинки розширення області збурення, як було зазначено вище, задається рівністю  $\dot{x}_R = 0$ . Значення величини  $x_R$  в цей момент, яке надалі позначатимемо  $x_{ta}$ , можна знайти на основі першого інтегралу рівняння (7)

$$\dot{x}_R^2 - \Omega_m x_R^{-1} - \Omega_\Lambda x_R^2 = \Omega_f, \quad (17)$$

переписавши у вигляді [3]

$$\Omega_\Lambda x_{ta}^3 + \Omega_f x_{ta} + \Omega_m = 0. \quad (18)$$

Шуканий розв'язок має вигляд

$$x_{ta} = \left[ \frac{4}{3} \frac{|\Omega_f|}{\Omega_\Lambda} \right]^{1/2} \sin \left\{ \frac{1}{3} \left[ \frac{\pi}{2} - \arccos \left( \frac{4\Omega_m}{\Omega_\Lambda} \left[ \frac{3}{4} \frac{\Omega_\Lambda}{|\Omega_f|} \right]^{3/2} \right) \right] \right\}, \quad (19)$$

і є справедливим при  $\Omega_f \leq -3(\Omega_m/2)^{2/3}\Omega_\Lambda^{1/3}$  (розглядаються моделі, для яких  $\Omega_m > 0$  та  $\Omega_\Lambda \geq 0$ ). Момент зупинки  $\tau_{ta}$  можемо знайти шляхом інтегрування рівняння (17) до моменту, коли  $x_R = x_{ta}$ :

$$\tau_{ta} = \int_0^{x_{ta}} \frac{dx}{(\Omega_m x^{-1} + \Omega_\Lambda x^2 + \Omega_f)^{1/2}}. \quad (20)$$

Вираз у знаменнику дорівнює нулю при  $x = x_{ta}$ , однак інтеграл є скінченним. В цьому легко переконатись, якщо перейти до нової змінної інтегрування  $v$ , поклавши  $x = x_{ta} - v^2$ , та використавши при цьому рівність (18). Рівність (20) задає залежність  $\Omega_f(\tau_{ta})$ , на основі якої моменту зупинки  $\tau_{ta}$  ставимо у відповідність значення амплітуди збурення:

$$\delta_m^r(\tau_{ta}) = a^3(\tau_{ta})/x_{ta}^3 - 1.$$

Значення цієї амплітуди на лінійній стадії, отримане на основі (10), позначимо як

$$\delta_{ta}(\tau_{ta}) \equiv \frac{3}{5} \frac{\Omega_K - \Omega_f(\tau_{ta})}{\Omega_m} D_f(a(\tau_{ta})).$$

Густина області збурення, яка припинила розширюватись на момент  $\tau_{ta}$ , тобто коли  $\dot{\rho}_m^r = 0$ , є  $\rho_{m,ta}^r = \rho_m^0 x_{ta}^{-3}$ , де величину  $x_{ta}$  отримано з (19) при умові  $\Omega_f = \Omega_K - (5/3)\Omega_m(\delta_{ta}(\tau_{ta})/D_f(a(\tau_{ta})))$ . Для заданого профілю густини можемо визначити радіус оболонки (області)  $R_{ta}$ , яка зупинила своє розширення в заданий момент часу  $\tau_{ta}$ . Для цього слід скористатися рівністю

$\Omega_f(R_{ta}) = \Omega_f(\tau_{ta})$ . Так, для профілю (6) матимемо, що

$$R_{ta} = R_c \ln^{1/2} \left[ \frac{5\Omega_m \delta_0}{3(\Omega_K + \Omega_f(\tau_{ta}))} \right].$$

Факт зупинки в космологічних моделях з  $\Omega_\Lambda = 0$  та  $\Omega_K \leq 0$  має місце для всіх збурень із додатною амплітудою ( $\Omega_K - \Omega_f > 0$ ). Однак у випадку  $\Omega_\Lambda \neq 0$  та/або  $\Omega_K > 0$  не всі додатні збурення маси чи густини досягатимуть зупинки. Умову зупинки можемо отримати з рівняння (17). Зупинка є, якщо значення величини  $\dot{x}_R^2$  в екстремумі, коли  $x_R = x_{ext} \equiv (\Omega_m / (2\Omega_\Lambda))^{1/3}$ , не є додатним, тобто коли  $\Omega_f \leq -3(\Omega_m/2)^{2/3}\Omega_\Lambda^{1/3}$ . Рівність відповідає збуренню, момент зупинки якого відповідає  $\tau_{ta} = \infty$ . Густина збурення в цей момент прямує до постійної величини  $\rho_{m,ext}^r = \rho_m^0 x_{ext}^{-3} = 2\Omega_\Lambda \rho_c$ , а значення його амплітуди на лінійній стадії у деякий довільний момент часу дорівнює

$$\delta_{\min}(\tau) \equiv \frac{3}{5} \frac{\Omega_K + 3(\Omega_m/2)^{2/3}\Omega_\Lambda^{1/3}}{\Omega_m} D_f(a(\tau)).$$

Збурення, значення амплітуд яких на лінійній стадії у Всесвіті з ненульовим додатним значенням  $\Lambda$ -сталой та/або від'ємною кривиною ( $\Omega_K > 0$ ) на заданий момент часу є менші за порогову величину  $\delta_{\min}$ , не досягнуть стадії колапсу. У зв'язку із цим для сферично-симетричного збурення уведемо радіус  $R_g$  гравітаційно зв'язаної області, який визначатимемо із рівності  $\Omega_f(R_g) = -3(\Omega_m/2)^{2/3}\Omega_\Lambda^{1/3}$ . Так, для профілю (6) матимемо

$$R_g = R_c \ln^{1/2} \left[ \frac{5\Omega_m \delta_0}{3\Omega_K + 9(\Omega_m/2)^{2/3}\Omega_\Lambda^{1/3}} \right].$$

Умова  $5\Omega_m \delta_0 / (3\Omega_K + 9(\Omega_m/2)^{2/3}\Omega_\Lambda^{1/3}) \geq 1$  вказує на існування гравітаційно зв'язаної області.

Проілюструємо означені тут величини на випадок космологічної моделі Всесвіту Айнштайна — де Сіттера ( $\Omega_m = 1$ ,  $\Omega_\Lambda = \Omega_K = 0$ ) та збурення з профілем густини (6). З наведених рівнянь та означень випливає, що

$$x_{ta} = \frac{1}{|\Omega_f|} = \frac{3}{5} \frac{1}{\delta_0} e^{(R_{ta}/R_c)^2},$$

$$\tau_{ta} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{|\Omega_f|^{3/2}} = \frac{\pi}{2} \left( \frac{3}{5} \frac{1}{\delta_0} \right)^{3/2} e^{(3/2)(R_{ta}/R_c)^2}.$$

У цій моделі  $\delta_{\min} = 0$ , тобто всі збурення з додатними амплітудами досягатимуть стадії колапсу. Значення  $\delta_{ta}$  в такій моделі не залежить від моменту зупинки, і дорівнює  $\delta_{ta} = (3/5)(3\pi/4)^{2/3} \approx 1.0624$ . Однак в моделях з ненульовим значенням  $\Lambda$ -сталой та/або параметра кривини  $\Omega_K$  значення  $\delta_{ta}$  залежить від моменту зупинки  $z_{ta} \equiv z(\tau_{ta})$ . Так, при  $z_{ta} \gtrsim 6$ , коли впливом  $\Lambda$ -сталой можна знехтувати ( $\Omega_\Lambda(1+z_{ta})^{-3} \ll 1$ ), «лінійне» значення амплітуди збурення, яке припинило розширюватись, має просту асимптотичну залежність від  $z_{ta}$ :

$$\delta_{ta}(z_{ta}) \approx \frac{3}{5} \left( \frac{3\pi}{4} \right)^{2/3} + \frac{3}{5} \left[ 1 - \frac{13}{35} \left( \frac{3\pi}{4} \right)^{2/3} \right] (\Omega_K/\Omega_m)(1+z_{ta})^{-1} \approx$$

$$\approx 1.0624 + 0.2054(\Omega_K/\Omega_m)(1+z_{ta})^{-1}.$$

На рис. 2—4 приведено залежність величин  $\delta_{ta}$  та  $\delta_{\min}$  від параметрів космологічної моделі та червоного зміщення  $z$ . При фіксованих від'ємних

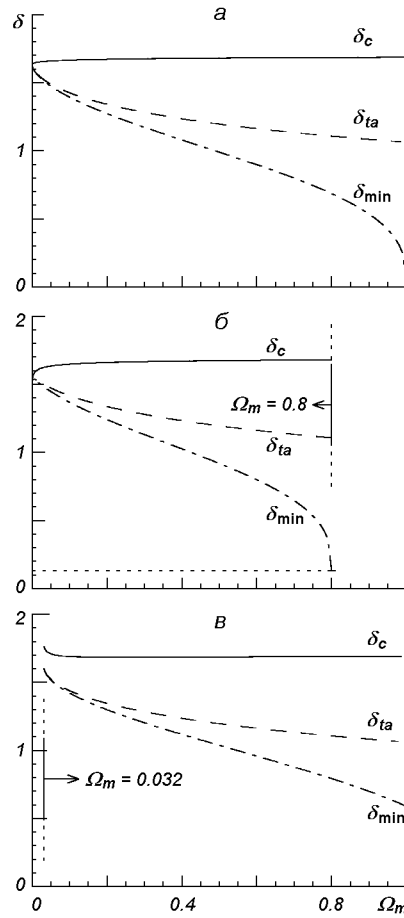


Рис. 2. Залежності значень  $\delta_c$ ,  $\delta_{ta}$ ,  $\delta_{min}$  на лінійній стадії розвитку від відносного вмісту матерії  $\Omega_m$  для трьох значень параметра кривини: *a* —  $\Omega_K = 0$ , *б* —  $\Omega_K = 0.2$ , *в* —  $\Omega_K = -0.2$

значеннях параметра кривини спостерігаються деякі особливості при  $\Omega_m \approx 0.032$  для  $\Omega_K = -0.2$  і  $\Omega_m \approx 0.085$  для  $\Omega_K = -0.4$ . Ці особливості є наслідком наближення до стаціонарних моделей Айнштейна (коли починає виконуватись рівність  $27\Omega_m^2(1 - \Omega_m - \Omega_K) + 4\Omega_K^3 = 0$ ), які виключені із розгляду покладанням скінченного додатного значення сталої Габбла  $H_0$ . Менші значення параметра  $\Omega_m$  теж не розглядаємо, оскільки вони відповідають моделям з «відскоком» — Всесвіт спочатку стискається, зупиняється, а згодом розширюється, щоб при  $a = 1$  досягнути темпу розширення, яке відповідає спостережуваній величині сталої Габбла  $H_0$ .

#### КОЛАПС ЗБУРЕННЯ

В момент колапсу  $\tau_{col}$  амплітуда збурення  $\delta_m^r$  досягає нескінченно великого значення, тобто на стадії колапсу встановлюється рівність  $x_R = 0$ . Оскільки розв'язок рівняння (17) симетричний відносно моменту зупинки  $\tau_{ta}$ , то момент колапсу визначається з виразу [3, 15]

$$\tau_{col} = 2\tau_{ta} = 2 \int_0^{x_{ta}} \frac{dx}{(\Omega_m x^{-1} + \Omega_\Lambda x^2 + \Omega_f)^{1/2}}. \quad (21)$$

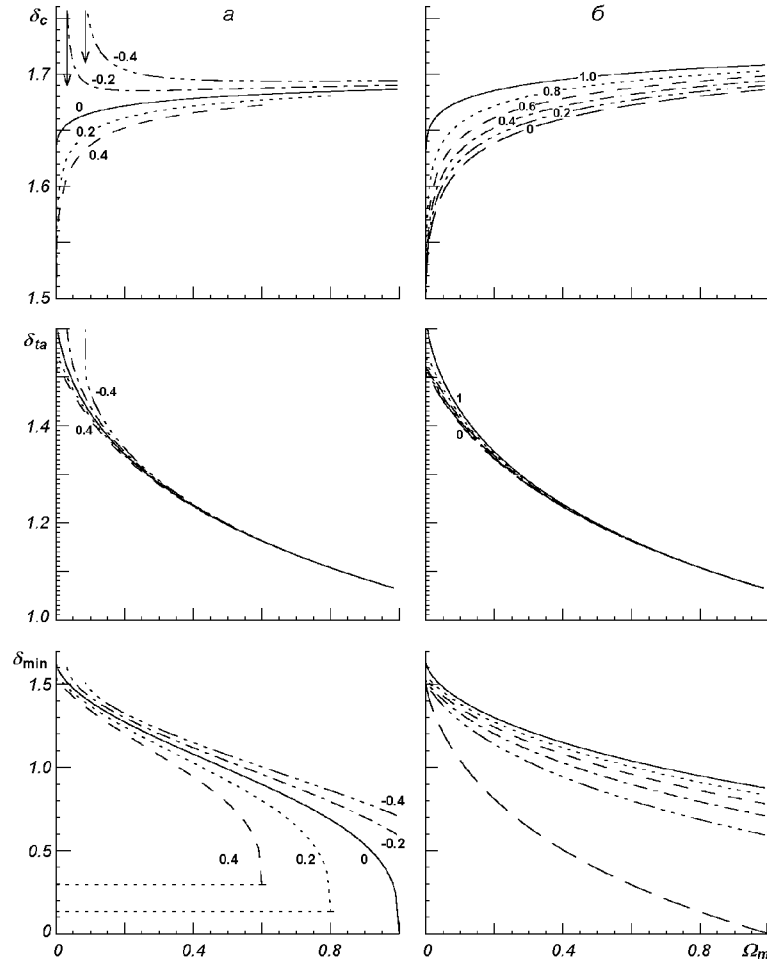


Рис. 3. Залежності значень  $\delta_c$ ,  $\delta_{ta}$ ,  $\delta_{\min}$  від відносного вмісту матерії  $\Omega_m$ . Числа біля кривих — значення параметра кривини  $\Omega_K$  (фрагмент а) і  $\Lambda$ -сталості (фрагмент б)

З рівності (21) можна отримати залежність  $\Omega_f(\tau_{col})$ , яка у поєднанні з виразом (10) дозволяє поставити у відповідність моменту колапсу лінійне значення амплітуди:

$$\delta_c(\tau_{col}) \equiv \frac{3}{5} \frac{\Omega_K - \Omega_f(\tau_{col})}{\Omega_m} D_f(a(\tau_{col})).$$

Момент колапсу (21) слід розраховувати для центральної однорідної області збурення, яка колапсуватиме першою. Для оболонок поза цією областю моменти колапсу на основі рівняння (21) можуть бути розраховані лише тоді, коли вся сколапсована раніше матерія залишатиметься в центрі. У цьому випадку радіус області  $R_{col}$ , яка сколапсувала на заданий момент часу  $\tau_{col}$ , можна розрахувати з рівності  $\Omega_f(R_{col}) = \Omega_f(\tau_{col})$ . Так, для профілю (б) матимемо, що

$$R_{col} = R_c \ln^{1/2} \left[ \frac{5\Omega_m \delta_0}{3(\Omega_K + \Omega_f(\tau_{col}))} \right].$$

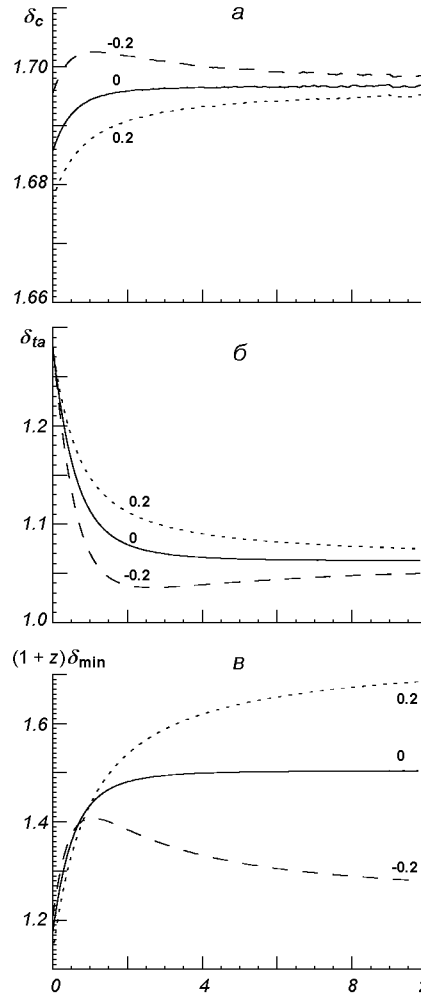


Рис. 4. Значення амплітуд  $\delta_c$ ,  $\delta_{ta}$ ,  $\delta_{\min}$  при  $\Omega_m = 0.3$  для трьох значень параметра кривини  $\Omega_K$  (числа біля кривих)

В моделі Всесвіту Айнштейна — де Сіттера матимемо, що

$$\tau_{col} = 2\tau_{ta} = \frac{\pi}{|\Omega_f|^{3/2}} = \pi \left( \frac{3}{5} \frac{1}{\delta_0} \right)^{3/2} e^{(3/2)(R_{col}/R_c)^2}.$$

Значення лінійної амплітуди збурення, що сколапсувало, в такій моделі не залежить від моменту колапсу ( $\delta_c = (3/5)(3\pi/2)^{2/3} \approx 1.6865$ ). В моделях з ненульовим значенням  $\Lambda$ -сталлої та/або параметра кривини  $\Omega_K$  значення  $\delta_c$  залежить від моменту колапсу  $z_c \equiv z(\tau_{col})$ . Так, при  $z_c \geq 6$ , коли впливом  $\Lambda$ -сталлої можна знехтувати ( $\Omega_\Lambda(1+z_c)^{-3} \ll 1$ ), лінійне значення амплітуди збурення, яке колапсує, описується асимптотичною залежністю

$$\begin{aligned} \delta_c(z_c) &\approx \frac{3}{5} \left( \frac{3\pi}{2} \right)^{2/3} + \frac{3}{5} \left[ 1 - \frac{13}{35} \left( \frac{3\pi}{2} \right)^{2/3} \right] (\Omega_K/\Omega_m)(1+z_c)^{-1} \approx \\ &\approx 1.6865 - 0.0264(\Omega_K/\Omega_m)(1+z_c)^{-1}. \end{aligned}$$

Залежність величини  $\delta_c$  від параметрів космологічної моделі та моменту колапсу приведено на рис. 2—4. Подібні залежності для цієї величини були вже отримані в роботах [3, 15, 10]. Тут їх приведено для порівняння з амплітудами  $\delta_{ta}$  та  $\delta_{min}$ .

#### ЗМІНА АМПЛІТУДИ ТА МАСШТАБУ ЗБУРЕННЯ НА НЕЛІНІЙНІЙ СТАДІЇ ЕВОЛЮЦІЇ

Результати числового інтегрування рівнянь (15) та (16) представлено на рис. 5. Інтегрування здійснювалось до заданого моменту часу, який фіксувався значенням масштабного фактора  $a = 1/(1+z)$ , для різних значень параметра амплітуди  $\delta_0$  та червоного зміщення  $z$ . Результати представлено в залежності від амплітуд  $\delta$  та  $\delta_z$ .

Для зручнішого опису результатів введемо наступні позначення:  $\varphi \equiv \lg(k_{nl}/k)$  та  $\psi \equiv \lg(D_{nl}^r/D_l)$ . Виявляється, що залежність величин  $\varphi$  та  $\psi$  від часу та космологічних параметрів можна наближено описати через залежність від цих параметрів лінійної амплітуди  $\delta_z$  у проміжку  $0 \leq \delta_z(z) < \delta_c(z)$ . Тобто, можна покласти, що  $\varphi \approx \varphi(\delta_z)$  та  $\psi \approx \psi(\delta_z)$ . Обчислення у межах зміни  $0.2 \leq \Omega_m \leq 1.0$  та  $-0.4 \leq \Omega_K \leq 0.4$  показали, що функції  $\varphi(\delta)$  та  $\psi(\delta)$  практично не залежать від значень параметрів

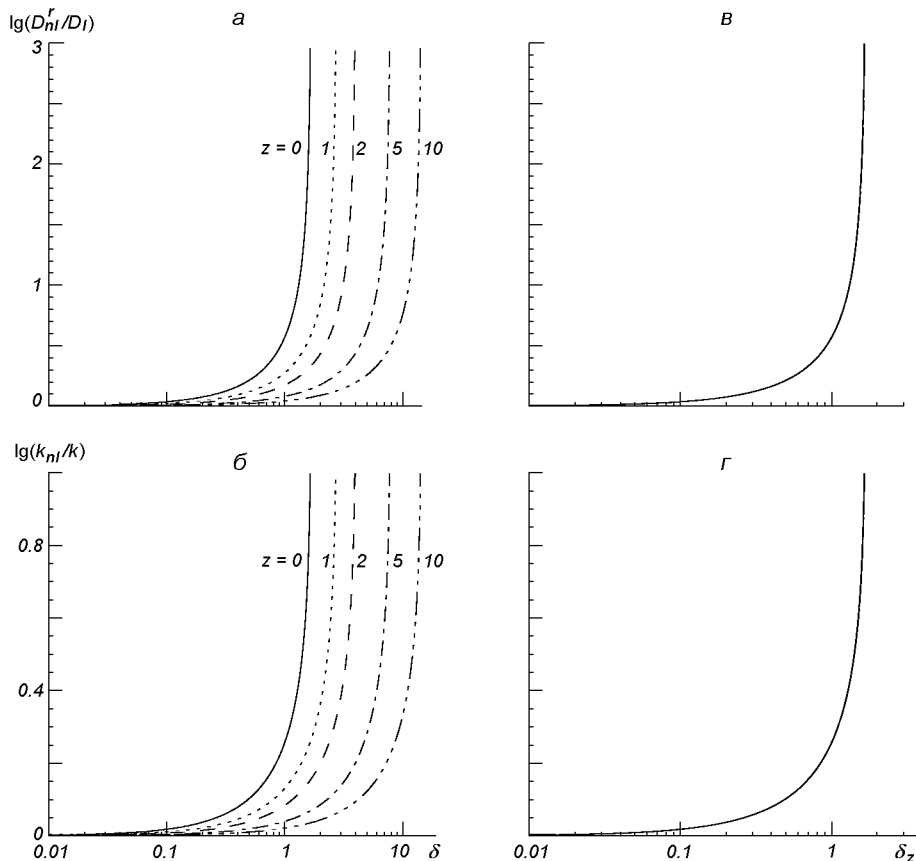


Рис. 5. Логарифми відношень амплітуд  $D_{nl}/D_l$  (а, в), та характерних масштабів збурення  $k_{nl}/k$  (б, г) у залежності від «лінійних» значень амплітуд  $\delta$  та  $\delta_z$  в космологічній моделі із значеннями параметрів  $\Omega_m = 0.3$  та  $\Omega_K = 0$  у моменти часу, які відповідають різним червоним зміщенням  $z$  (числа біля кривих)

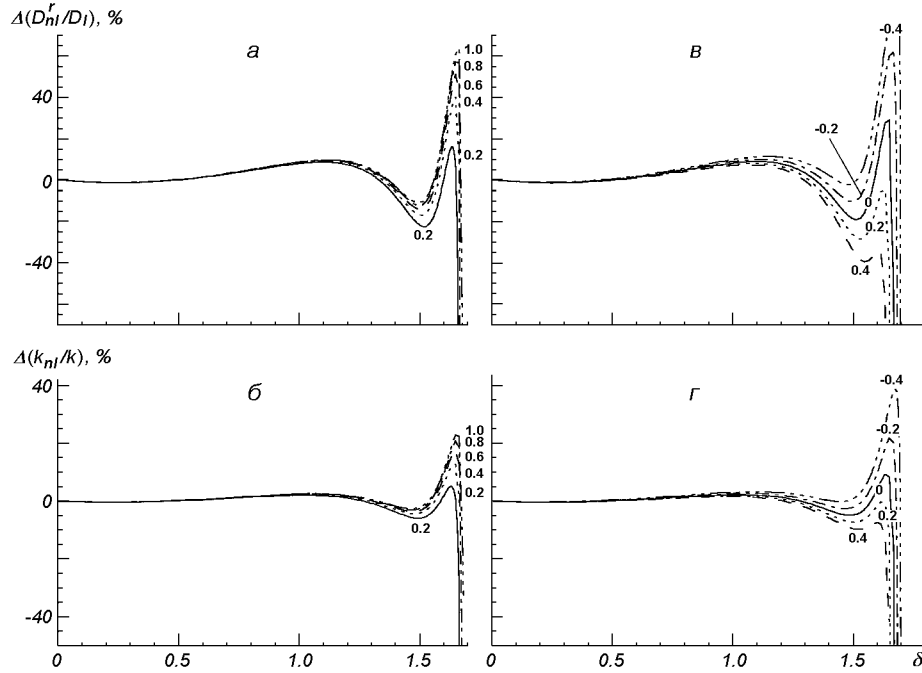


Рис. 6. Відносні похибки апроксимацій (22) та (23) для космологічних моделей з різними значеннями параметрів. Числа біля кривих — значення  $\Omega_m$  при фіксованому значенні  $\Omega_K = 0$  (фрагменти а, б) та значення  $\Omega_K$  при фіксованому значенні  $\Omega_m = 0.3$  (фрагменти в, г)

космологічної моделі. З рис. 5 випливає, що залежності  $\varphi(\delta_z)$  та  $\psi(\delta_z)$  слабо залежать також і від моменту  $z$ , на який здійснюються розрахунки. Як наслідок в області  $0 \leq \delta_z < \delta_c(z)$  результати можемо представити у вигляді

$$\varphi(\delta_z) \approx A_\varphi (e^{\delta_z/\delta_\varphi} + \theta_\varphi (e^{\delta_z/\delta_\varphi})^{\alpha_\varphi} - 1),$$

$$\psi(\delta_z) \approx A_\psi (e^{\delta_z/\delta_\psi} + \theta_\psi (e^{\delta_z/\delta_\psi})^{\alpha_\psi} - 1),$$

де  $A_\varphi \approx 0.18$ ,  $\delta_\varphi \approx 1.1$ ,  $\alpha_\varphi \approx 15.24$ ,  $\theta_\varphi \approx 3 \cdot 10^{-10}$ , та  $A_\psi \approx 0.26$ ,  $\delta_\psi \approx 0.83$ ,  $\alpha_\psi \approx 13.56$ ,  $\theta_\psi \approx 1.2 \cdot 10^{-11}$ . Відносні похибки цих апроксимацій

$$\Delta(D_{nl}^r/D_l) = \left(1 - \frac{D_{nl}^r}{D_l} 10^{-\psi(\delta_z)}\right) \cdot 100 \%, \quad (22)$$

$$\Delta(k_{nl}/k) = \left(1 - \frac{k_{nl}}{k} 10^{-\varphi(\delta_z)}\right) \cdot 100 \% \quad (23)$$

показано на рис. 6.

#### ВИСНОВКИ

В рамках загальної теорії відносності отримано рівняння, які описують еволюцію амплітуди та масштабу сферично-симетричного збурення густини речовини. На основі цих рівнянь аналогічно до вже відомої лінійної амплітуди збурення, яке колапсує в заданий момент часу  $\delta_c$ , введено нові еволюційні параметри — лінійне значення  $\delta_{ta}$  амплітуди збурення, яке в

заданий момент часу зупиняє своє розширення, та найменше значення  $\delta_{\min}$  амплітуди збурення, що досягне моменту зупинки. На основі цих параметрів введено характерні розміри областей збурення: радіус  $R_g$  гравітаційно зв'язаної області, радіус  $R_{ta}$  області (оболонки), що припинила розширюватися, радіус  $R_{col}$  області, яка зазнала колапсу. Для цих областей було означено відповідні моменти часу: момент зупинки  $\tau_{ta}$  та момент колапсу  $\tau_{col}$ .

Всі ці параметри є важливими для опису та аналізу великомасштабної структури Всесвіту. Зокрема, амплітуди  $\delta_{ta}$  та  $\delta_{\min}$  дозволяють на заданий момент часу на основі відомого початкового розподілу амплітуд збурень оцінити частку збурень, які: а) ніколи не досягнуть моменту зупинки, а отже, і стадії колапсу ( $0 \leq \delta < \delta_{\min}$ ); б) досягнуть моменту зупинки у майбутньому ( $\delta_{\min} \leq \delta < \delta_{ta}$ ); в) перебувають на стадії колапсу ( $\delta_{ta} \leq \delta < \delta_c$ ).

З рис. 2 та 3 видно, що значення амплітуди  $\delta_{ta}$  на теперішній момент часу сильно залежить від параметра  $\Omega_m$ , і слабо — від параметрів  $\Omega_\Lambda$  та  $\Omega_K$ . Така ж залежність прослідковується і для густини збурення у момент його зупинки  $\rho_{m,ta}^r$ . Поміж тим стрімке падіння амплітуди  $\delta_{ta}$  із збільшенням червоного зміщення  $z$  зумовлене зменшенням впливу на динаміку Всесвіту  $\Lambda$ -сталюї. Таким чином, встановлення на основі спостережуваних даних значень величин  $\delta_{ta}$  та  $\rho_{m,ta}^r$  на різних червоних зміщеннях дозволяє обчислити значення космологічних параметрів  $\Omega_m$  (при  $z = 0$ ) та  $\Omega_\Lambda$  (при  $0 < z \lesssim 1$ ). При цьому значення амплітуди  $\delta_{ta}$  може бути оцінене на основі статистичних даних, зокрема на основі спостережуваної частки збурень, центральні області яких досягли або не досягли стадії зупинки. Густина  $\rho_{m,ta}^r$  слід встановлювати в області, зовнішній шар якої (супутній до матерії) припинив розширюватися. Таку область можна встановити на основі вимірювання пекулярних швидкостей окремих об'єктів.

Скінченність радіуса  $R_g$  у моделях з  $\Omega_K > 0$  та/або  $\Omega_\Lambda > 0$  свідчить про те, що Всесвіт можна розбити на окремі гравітаційно зв'язані області. Область з радіусом  $R$  є гравітаційно зв'язаною, якщо збурення маси  $\delta_m^r$  в ній перевищує величину  $\delta_{\min} \cdot 10^{\psi(\delta_{\min})}$ .

Для нелінійного розвитку амплітуди та масштабу збурення отримано прості апроксимаційні вирази, які слабо залежать від параметрів космологічної моделі. Це свідчить про нечутливість нелінійних значень амплітуди та масштабу колапсуючого збурення до параметрів космологічної моделі. Отримані вирази дають можливість оцінити вплив нелінійної еволюції на статистичні характеристики спостережуваного просторового розподілу видимої матерії у Всесвіті, що є важливим для їхньої коректної інтерпретації.

Автор вдячний Б. С. Новосядлому за корисні зауваження. Робота виконувалась в рамках держбюджетної теми АО-112Ф та при підтримці цільової комплексної програми наукових досліджень НАН України «Дослідження структури та складу Всесвіту, прихованої маси та темної енергії» (Космомікрофізика).

1. Апуневич С., Венгльовська Б., Кулініч Ю., Новосядлий Б. WMAP-2006: космологічні параметри і великомасштабна структура // Кинематика и физика небес. тел.—2007.—23, № 2.—С. 67—82.
2. Дорошкевич А. Г. Пространственная структура возмущений и происхождение вращения галактик во флуктуационной теории // Астрофизика.—1970.—6.—С. 581—600.
3. Кулініч Ю., Новосядлий Б. Сферично-симетричний колапс і функція мас багатих скупчень галактик у моделях з кривиною та космологічною сталюю // Журн. фіз.



- досліджень.—2003.—7, № 2.—С. 234—246.
4. Новосядлый Б. С., Пелых В. А. Сферически-симметричные возмущения плотности и скорости вещества в пылевидной изотропно расширяющейся Вселенной. // *Астрон. журн.*—1988.—65, № 3.—С. 449—460.
  5. Пиблс Ф. Д. Э. Структура Вселенной в больших масштабах. — М: Мир, 1983.—320 с.
  6. Adami C., Mazure A., Katgert P., Biviano A. The ESO nearby Abell cluster survey. VII. Galaxy density profiles of rich clusters of galaxies // *Astron. and Astrophys.*—1998.—336, N 1.—P. 63—82.
  7. Bardeen J. M., Bond J. R., Kaiser N., Szalay A. S. The statistics of peaks of Gaussian random fields // *Astrophys. J.*—1986.—304, N 1.—P. 15—61.
  8. Bond J. R., Cole S., Efstathiou G., Kaiser N. Excursion set mass function for hierarchical Gaussian fluctuations // *Astrophys. J.*—1991.—379, N 1.—P. 440—460.
  9. Dehnen W. A Family of Potential-Density Pairs for Spherical Galaxies and Bulge // *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.*—1993.—265, N 1.—P. 250—256.
  10. Eke V. R., Cole S., Frenk C. S. Cluster evolution as a diagnostic for Omega // *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.*—1996.—282, N 1.—P. 263—280.
  11. Girardi M., Borgani S., Giuricin G., et al. The observational mass function of nearby galaxy clusters // *Astrophys. J.*—1998.—506, N 1.—P. 45—52.
  12. Hamilton A. J. S., Kumar P., Lu E., Matthews A. Reconstructing the primordial spectrum of fluctuations of the universe from the observed nonlinear clustering of galaxies // *Astrophys. J. Lett.*—1991.—374.—P. L1—L4.
  13. Jain B., Mo H. J., White S. D. M. The evolution of correlation functions and power spectra in gravitational clustering // *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.*—1995.—276, N 1.—P. L25—L29.
  14. Lacey C. G., Cole S. Merger rates in hierarchical models of galaxy formation // *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.*—1993.—262, N 3.—P. 627—649.
  15. Lokas E. L., Hoffman Y. The spherical collapse model in a universe with cosmological constant. // *Proceedings of the 3rd International Workshop on the identification of dark matter* / Eds N. J. C. Spooner, V. Kudryavtsev. — Singapore: World Scientific, 2001.—P. 121.
  16. Markevitch M., Mushotzky R., Inoue H., et al. Abell 2163: temperature, mass, and hydrostatic equilibrium // *Astrophys. J.*—1996.—456.—P. 437—444.
  17. Moore B., Governato F., Quinn T., et al. Resolving the structure of cold dark matter halos // *Astrophys. J. Lett.*—1998.—499.—P. L5.
  18. Peacock J. A., Dodds S. J. Reconstructing the linear power spectrum of cosmological mass fluctuations // *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.*—1994.—267, N 4.—P. 1020—1034.
  19. Peacock J. A., Dodds S. J. Non-linear evolution of cosmological power spectra // *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.*—1996.—280, N 3.—P. L19—L26.
  20. Press W. H., Schechter P. Formation of galaxies and clusters of galaxies by self-similar gravitational condensation // *Astrophys. J.*—1974.—187.—P. 425—438.
  21. Rahman N., Shandarin S. F. Constraining cosmological models by the cluster mass function // *Astrophys. J.*—2001.—550, N 2.—P. L121—L124.
  22. Rines K., Diaferio A., Natarajan P. The virial mass function of nearby SDSS Galaxy clusters // *Astrophys. J.*—2007.—657, N 1.—P. 183—196.
  23. Saslaw W. C. *Gravitational physics of stellar and galactic systems.* — Cambridge: Univ. Press, 1987.—214 p.
  24. Smith R. E., Peacock, J. A., et al. Stable clustering, the halo model and nonlinear cosmological power spectra // *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.*—2003.—341, N 4.—P. 1311—1332.
  25. Tolman R. C. *Relativity thermodynamics and cosmology.* — Oxford: Clarendon Press, 1969.—246 p.

Надійшла до редакції 13.08.07