ISSN 0233-7665. Кинематика и физика небес. тел. 2007. Т. 23. № 4

УДК 523.44+521.75

В. А. Андрущенко[1], **А. Н. Галенко**[2], **В. А. Головешкин**[2], **Н. Н. Холин**[2]

[1]Институт автоматизации проектирования Российской академии наук
123056 Россия, Москва, 2-я Брестская ул., д. 19/18
[2] Московский государственный университет приборостроения и информатики,
123481 Россия, Москва, ул. Стромынка 20.

О влиянии вращения на напряженно-деформированное состояние космического тела при движении в атмосфере

Исследована модельная задача о разрушении космического тела в атмосфере планеты. Определено напряженно-деформированное состояние метеороида в плоской упругой постановке, выявлено, что его вращение значительно ускоряет процесс разрушения.

ПРО ВПЛИВ ОБЕРТАННЯ НА НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН КОСМІЧНОГО ТІЛА ПРИ РУСІ В АТМОСФЕРІ, Андрущенко В. А., Галенко А. М., Головешкін В. А., Холін М. М. — Досліджується модельна задача про руйнування космічного тіла в атмосфері планети. Визначено напружено-деформований стан метеороїда у плоскій пружній постановці, виявлено, що його обертання значно прискорює процес руйнування.

THE ROTATION EFFECT ON THE STRESS-STRAIN STATE OF A SPACE BODY IN ITS MOTION IN THE ATMOSPHERE OF A PLANET, by Andrushchenko V. A., Galenko A. N., Goloveshkin V. A., Kholin N. N. — A model mathematical problem on the degradation of a space body in the atmosphere planet was analyzed. The stress-strain state of the meteor material in two-dimensional elastic formulation was determined. It was revealed that the rotation of a meteoroid accelerates its degradation.

ВВЕДЕНИЕ

Проводится качественное исследование механизма разрушения космического объекта при движении в атмосфере планеты, вызванного его вращением. Предметом исследования являются космические объекты, входящие в атмосферу со скоростями порядка десятков километров в секунду. Такие объекты, кроме того, могут обладать весьма большой скоростью вращения, инициированной еще во внешнем космосе [2, 4, 6, 10, 12—14]. Уже к началу 1990-х гг. было обнаружено более шестисот вращающихся или «кувыркающихся» астероидов [2]. Самым быстрым из них был астероид Икар, вращающийся с периодом примерно 136 мин. В настоящее время продолжается процесс накопления наблюдательных данных о скоростях, направлениях вращения таких астероидов и ориентации их осей в пространстве, а также об их форме, внутреннем строении и прочности вещества, слагающего эти астероиды. Так, в 1998 г. был обнаружен прошедший мимо

Земли на удалении 810 тыс. км астероид KY26 [13]. Это был углекислый хондрит, имеющий форму слегка вытянутого сфероида диаметром около 30 м, и с поверхностными следами столкновения с другими космическими телами. Это, по-видимому, и явилось первопричиной его вращения вокруг своей оси, причем с необычайно большой скоростью — один оборот за 10.7 мин. Следует отметить, что вращаться могут не только астероиды, но и ядра комет [9].

С целью объяснения некоторых непонятных с точки зрения падения обычных космических объектов фактов, относящихся к Тунгусскому телу, С. С. Григорян [3, 11] предположил, что оно при входе в атмосферу также уже обладало начальным осевым вращением. Расчеты показали, что при определенных (реальных) условиях возникающие в теле метеороида за счет вращательного движения центробежные силы в состоянии разорвать его на фрагменты. При этом разрушение произойдет на бо́льших высотах, чем обычное дробление за счет сил сопротивления, единственное возможное для невращающихся астероидов. Этот прогноз находится в согласии с наблюдательными данными о вращении метеороидов (пульсация их блеска [4, 6]) и их распадении на части на достаточно больших высотах, что объясняет, например, не вполне понятный до этого факт неоднородностей распределения остаточных эффектов — вывала леса и пожара [3].

Исследованию движения в атмосфере такого вращающегося объекта в модельной постановке и посвящена настоящая работа.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для качественного анализа процесса разрушения исследуется напряженно-деформированное состояние метеороида в плоской упругой постановке. Космическое тело моделируется упругим цилиндром радиуса R плотности ρ. Предполагается, что скорость V направлена перпендикулярно к оси цилиндра. Для космических тел внеземного происхождения скорость входа в атмосферу имеет порядок 10—70 км/с [1]. При таких скоростях на поверхности действует давление [8]: $p = P_0\cos^2\varphi$ при $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$; $p = 0$ с теневой стороны. Величина P_0 зависит от скорости объекта и плотности атмосферы. Угол φ отсчитывается от направления вектора скорости.

В рамках упругой постановки [5] имеем

$$\begin{gathered}\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = -\frac{4}{3\pi}\frac{P_0}{R}\cos\varphi,\\ \frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{2}{r}\sigma_{r\varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi} = \frac{4}{3\pi}\frac{P_0}{R}\sin\varphi,\end{gathered} \tag{1}$$

где σ_{rr}, $\sigma_{r\varphi}$, $\sigma_{\varphi\varphi}$ — компоненты тензора напряжений.

Связь тензора напряжений с соответствующими составляющими тензора деформаций определяется упругим законом:

$$\begin{gathered}\sigma_{rr} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{rr},\\ \sigma_{\varphi\varphi} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{\varphi\varphi},\\ \sigma_{r\varphi} = 2\mu\varepsilon_{r\varphi},\end{gathered} \tag{2}$$

где λ и μ — коэффициенты Ламе, $\theta = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}$.

Отметим, что уравнения равновесия (1) записаны в предположении, что угловая скорость вращения ω достаточно мала, и волновыми эффектами можно пренебречь:

$$\omega R/c \ll 1,$$

где $c = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ — скорость распространения объемной волны. Для ε_{rr}, $\varepsilon_{r\varphi}$, $\varepsilon_{\varphi\varphi}$ имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r}, \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r}, \\ \varepsilon_{r\varphi} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\right), \end{aligned} \tag{3}$$

где u, v — радиальные и угловые перемещения.

Граничные условия таковы:

$$\begin{aligned} &\sigma_{rr} = -P_0\cos^2\varphi && \text{при} \quad |\varphi| \le \pi/2, \\ &\sigma_{rr} = 0 && \text{при} \quad \pi/2 \le |\varphi| \le \pi, \\ &\sigma_{r\varphi} = 0 && \text{при} \quad 0 \le |\varphi| \le \pi. \end{aligned} \tag{4}$$

Используя (1)—(3) для определения перемещений u, v, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{b^2}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1-b^2}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial r\partial\varphi} - \frac{1+b^2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\varphi} = -a\cos\varphi, \\ &\frac{1-b^2}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi} + \frac{1+b^2}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi} + b^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2} = a\sin\varphi, \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$b^2 = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}, \qquad a = \frac{4}{3\pi R}\frac{P_0}{\lambda + 2\mu}.$$

Решения системы (5) ищется в виде сумм тригонометрических рядов:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r)\cos n\varphi, \qquad v = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(r)\sin n\varphi.$$

При $n \ne 1$ система уравнений для определения u_n, v_n имеет вид

$$\begin{aligned} &\frac{d^2u_n}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du_n}{dr} - \frac{u_n}{r^2} - \frac{b^2n^2u_n}{r^2} + n\,\frac{1-b^2}{r}\frac{dv_n}{dr} - n\,\frac{1+b^2}{r^2}v_n = 0, \\ &-n\,\frac{1-b^2}{r}\frac{du_n}{dr} - n\,\frac{1+b^2}{r^2}u_n + b^2\left(\frac{d^2v_n}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv_n}{dr} - \frac{v_n}{r^2}\right) - \frac{n^2v_n}{r^2} = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

При $n = 1$ имеем

$$\begin{aligned} &\frac{d^2u_1}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du_1}{dr} - \frac{u_1}{r^2} - \frac{b^2u_1}{r^2} + \frac{1-b^2}{r}\frac{dv_1}{dr} - \frac{1+b^2}{r^2}v_1 = -a, \\ &-\frac{1-b^2}{r}\frac{du_1}{dr} - \frac{1+b^2}{r^2}u_1 + b^2\left(\frac{d^2v_1}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv_1}{dr} - \frac{v_1}{r^2}\right) - \frac{v_1}{r^2} = a \end{aligned} \tag{7}$$

с граничными условиями при $r = R$

$$\begin{aligned} &\frac{du_n}{dr} + (1 - 2b^2)\left(\frac{u_n}{r} + \frac{nv_n}{r}\right) = A_n, \\ &-\frac{nu_n}{r} + \frac{dv_n}{dr} - \frac{v_n}{r} = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$A_0 = -\frac{P_0}{4(\lambda+2\mu)}, \qquad A_2 = -\frac{P_0}{4(\lambda+2\mu)}$$

и

$$A_n = \frac{4\sin(n\pi/2)}{\pi n(n^2-4)}\frac{P_0}{(\lambda+2\mu)}$$

при $n \neq 2$.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ

С учетом ограниченности перемещений при $r = 0$ и граничных условий (8), решение (6), (7) представляется в виде

$$u_0 = \frac{A_0}{2(1-b^2)}r\,.$$

При $n \neq 1$ имеем

$$u_n = A_n\frac{2b^2-n(1-b^2)}{4b^2(1-b^2)(n+1)}\left(\frac{r}{R}\right)^n r + A_n\frac{n}{4b^2(n-1)}\left(\frac{R}{r}\right)^{n-1}R,$$

$$v_n = A_n\frac{2+n(1-b^2)}{4b^2(1-b^2)(n+1)}\left(\frac{r}{R}\right)^n r - A_n\frac{n}{4b^2(n-1)}\left(\frac{R}{r}\right)^{n-1}R,$$

а при $n = 1$ —

$$u_1 = -\frac{a}{4(1-b^2)}r^2 + D,$$

$$v_1 = -\frac{a}{4(1-b^2)}r^2 - D,$$

где D — произвольная постоянная, которая характеризует смещение объекта как жесткого тела и не влияет на напряженно-деформированное состояние.

Напряжения могут быть представлены в виде

$$\sigma_{rr} = \sum_{n=0}^{\infty}\sigma_{rrn}\cos n\varphi,$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty}\sigma_{\varphi\varphi n}\cos n\varphi,$$

$$\sigma_{r\varphi} = \sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{r\varphi n}\sin n\varphi.$$

Здесь

$$\sigma_{rr0} = \sigma_{\varphi\varphi 0} = -\frac{P_0}{4}\,.$$

При $n \neq 1$

$$\sigma_{rrn} = P_0\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\left(\frac{r}{R}\right)^n\left[-\frac{1}{n(n+2)}+\frac{1}{n^2-4}\left(\frac{R}{r}\right)^2\right],$$

$$\sigma_{\varphi\varphi n} = P_0\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\left(\frac{r}{R}\right)^n\left[\frac{1}{n(n-2)}-\frac{1}{n^2-4}\left(\frac{R}{r}\right)^2\right], \qquad (9)$$

$$\sigma_{r\varphi n} = P_0\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\left(\frac{r}{R}\right)^n\left[\frac{1}{n^2-4}-\frac{1}{n^2-4}\left(\frac{R}{r}\right)^2\right]$$

(значения при $n = 2$ получаются из (9) предельным переходом при $n \to 2$).

При $n = 1$

$$\sigma_{rr1} = \sigma_{\varphi\varphi 1} = -P_0 \frac{4}{3\pi}\frac{r}{R}, \qquad \sigma_{r\varphi 1} = 0. \tag{10}$$

РЕЗУЛЬТАТЫ РЕШЕНИЯ

Как известно, в качестве разрушающего фактора наибольшую опасность представляют сдвиговые напряжения. Расчеты показывают, что максимальное сдвиговое напряжение $T_{\max}$ для невращающегося тела достигается на луче $\varphi = 0$ на расстоянии $r = 0.21R$, при этом $T_{\max} = 0.26P_0$. Отметим, что аналогичные оценки, полученные в работе [7] для шара, отличаются от полученных здесь для плоской задачи, однако для качественного анализа явления это различие несущественно.

При вращении зона разрушения (область, где максимальные сдвиговые напряжения превосходят критическую величину) внутри него смещается. Фактически внутри твердого объекта «вырезается» круглая область радиуса $R_1 = 0.21R$. При полном вырезании формируется независимая система — внешний и внутренний объекты. При резком торможении внешнего объекта внутренний ударяет его изнутри, что является одним из возможных механизмов разрушения.

Проведем качественный анализ перераспределения напряжений на начальном этапе процесса разрушения. Предположим, что на луче $\varphi = 0$ при $r = R_1 = 0.21R$ имеется круговая полость радиуса $R_0 \ll R$. Тензор напряжений σ' представляется в виде $\sigma' = \sigma_0' + \Delta\sigma'$, где σ_0' — тензор напряжений, соответствующий решению для сплошного объекта без полости, $\Delta\sigma'$ — дополнительная составляющая, вызванная наличием полости. Поскольку размер полости предполагается малым, то в ее окрестности компоненты тензора напряжений σ_0' в системе координат X, Y, где ось X направлена по вектору скорости, соответственно равны

$$\sigma_{xx}^0 = -0.61P_0,$$
$$\sigma_{yy}^0 = -0.09P_0,$$
$$\sigma_{xy}^0 = 0.$$

Фактически поставленная задача сводится к задаче о двухосном растяжении плоскости, ослабленной круговым отверстием радиуса R_1. В локальной полярной системе координат (r, φ) с началом в центре полости тензор напряжений σ_0' имеет компоненты

$$\sigma_{rr}^0 = -P_0(0.35 + 0.26\cos 2\varphi),$$
$$\sigma_{\varphi\varphi}^0 = -P_0(0.35 - 0.26\cos 2\varphi),$$
$$\sigma_{r\varphi}^0 = -P_0 0.13\sin 2\varphi.$$

Для дополнительных перемещений, вызванным наличием полости, имеем следующую систему уравнений, полученную из (6) для $n = 0$, $n = 2$.

1. Для $n = 0$ имеем

$$\frac{d^2u_0}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du_0}{dr} - \frac{u_0}{r^2} = 0 \tag{11}$$

с граничным условием при $r = R_0$

$$\lambda\left(\frac{du_0}{dr}+\frac{u_0}{r}\right)+2\mu\,\frac{du_0}{dr}=0.35P_0\,. \tag{12}$$

Из условия ограниченности решения (11) на бесконечности имеем

$$u_0=\frac{A_0}{r}\,,$$

а согласно (12)

$$A_0=-\,\frac{0.35P_0}{2\mu}\,R_0^2\,.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_{rr0}&=0.35P_0\,\frac{R_0^2}{r^2}\,,\\ \Delta\sigma_{\varphi\varphi0}&=-0.35P_0\,\frac{R_0^2}{r^2}\,.\end{aligned} \tag{13}$$

2. При $n=2$ имеем

$$\begin{aligned}&\frac{d^2u_2}{dr^2}+\frac{1}{r}\,\frac{du_2}{dr}-\frac{u_2(1+4b^2)}{r^2}+\frac{2(1-b^2)}{r}\,\frac{dv_2}{dr}-\frac{2(1+b^2)}{r^2}\,v_2=0,\\ &-\frac{2(1-b^2)}{r}\,\frac{du_2}{dr}-\frac{2(1+b^2)}{r^2}\,u_2+b^2\left(\frac{d^2v_2}{dr^2}+\frac{1}{r}\,\frac{dv_2}{dr}-\frac{v_2}{r^2}\right)-\frac{4v_2}{r^2}=0\end{aligned} \tag{14}$$

с граничными условиями при $r=R_0$

$$\begin{aligned}\lambda\left(\frac{du_2}{dr}+\frac{u_2}{r}+\frac{2v_2}{r}\right)+2\mu\,\frac{du_2}{dr}&=0.26P_0\,,\\ \mu\left(-\,\frac{2u_2}{r}+\frac{dv_2}{dr}-\frac{v_2}{r}\right)&=0.13P_0\,.\end{aligned} \tag{15}$$

С учетом ограниченности решения на бесконечности согласно (14) имеем

$$u_2=\frac{A}{r}+\frac{B}{r^3}\,,$$

$$v_2=-\,\frac{Ab^2}{r}+\frac{B}{r^3}\,.$$

Используя (15), для определения A и B получим систему уравнений

$$-\,\frac{4b^2(1-b^2)}{R_0^2}\,A-\frac{6b^2}{R_0^4}\,B=\frac{0.26P_0}{\lambda+2\mu}\,,$$

$$-\,\frac{2b^2(1-b^2)}{R_0^2}\,A-\frac{6b^2}{R_0^4}\,B=\frac{0.13P_0}{\lambda+2\mu}\,.$$

Решая ее, находим

$$A=-\,\frac{0.13P_0}{2(\lambda+2\mu)b^2(1-b^2)}\,,\qquad B=0.$$

Тогда

$$\Delta\sigma_{rr2}=0.26P_0\,\frac{R_0^2}{r^2}\cos2\varphi,\qquad \Delta\sigma_{\varphi\varphi2}=0,\qquad \Delta\sigma_{r\varphi2}=0.13P_0\,\frac{R_0^2}{r^2}\sin2\varphi.$$

В таком случае напряженное состояние в окрестности полости выражается соотношениями

$$\sigma_{rr} = -0.35P_0\left(1 - \frac{R_0^2}{r^2}\right) - 0.26P_0\left(1 - \frac{R_0^2}{r^2}\right)\cos 2\varphi,$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = -0.35P_0\left(1 + \frac{R_0^2}{r^2}\right) - 0.26P_0\cos 2\varphi,$$

$$\sigma_{r\varphi} = -0.13P_0\left(1 - \frac{R_0^2}{r^2}\right)\sin 2\varphi.$$

Отметим, что максимальное сдвиговое напряжение $T_{\max} = 0.48P_0$ на границе $r = R_0$ достигается при $\varphi = \pm\pi/2$. Следовательно, $T_{\max}$ существенно увеличивается, то есть образование разрушенных зон приводит к еще большей активизации процесса разрушения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №04-01-00874.

1. *Бронштэн В. А.* Физика метеорных явлений. — М.: Наука, 1981.—416 с.
2. *Величко Ф. П., Лупишко Д. Ф.* Вращение астероидов // Астрон. вестник.—1991.—**25**, № 8.—С. 259—275.
3. *Григорян С. С.* Юбилей Тунгусского «пришельца» // Земля и Вселенная.—2003.—№ 6.—С. 74—83.
4. *Кошкин Н. И.* Определение параметров вращения астероидов с большими амплитудами изменения блеска // Кинематика и физика небес. тел.—1986.—**2**, № 5.—С. 44—50.
5. *Ляв А.* Математическая теория упругости. — М.: ОНТИ НКТП СССР, 1939.—674 с.
6. *Прокофьева В. В., Карачкина Л. Г., Батраков Ю. В.* Частотный анализ модельных световых кривых одиночного астероида // Матер. Всерос. конф. «Астероидно-кометная опасность — 2005». — С.-Пб: ИПА РАН, 2005.—С. 287—288.
7. *Фадеенко Ю. И.* Разрушение метеорных тел в атмосфере // Физ. горения и взрыва.—1967.—№ 2.—С. 276—280.
8. *Черный Г. Г.* Течение газа с большой сверхзвуковой скоростью. — М.: Физматгиз, 1959.—220 с.
9. *Чурюмов К. И., Евтушевский А. М., Кравцов Ф. И.* Движение пылевых структур в околоядерной области кометы Хейла-Боппа и вращение ее ядра // Астрон. вестник.—2001.—**35**, № 1.—С. 76—82.
10. *Шестопалов Д. И.* О вращении астероидов // Кинематика и физика небес. тел.—1988.—**4**, № 5.—С. 67—74.
11. *Grigorian S. S.* The cometary nature of the Tunguska meteorite: on the predictive possibilities of mathematical models // Planet. Space Sci.—1998.—**46**, N 2/3.—P. 213—217.
12. *Magnusson P.* Distribution of spin axes and senses of rotation for 20 large asteroids // Icarus.—1986.—**68**, N 1.—P. 1—39.
13. *Ostro S. J., Pravec P., Benner L. A. M., et al.* Radar and optical observations of asteroid 1998 KY26 // Science.—1999.—**285**, N 5427.—P. 557—559.
14. *Zappala V., Di Martino M., Cellino A., et al.* Rotational properties of outer belt asteroids // Icarus.—1989.—**82**, N 2.—P. 354—368.

Поступила в редакцию 31.05.06