

МОНОТОНИЗАЦИЯ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

Abstract: Problem of obtaining numerical non-oscillatory solutions for the advection equation by using explicit and implicit adaptive difference schemes is considered. The adaptive scheme is created by addition of anti-diffusion terms in the monotone difference scheme of the first order. It is shown that the anti-diffusion flux-limitation problem for explicit scheme is reduced to linear programming problem. For implicit scheme the anti-diffusion flux-limitation problem is reduced to non-linear programming problem or sequence of the linear programming problems. Simplified algorithm of monotonization is proposed. There are given results of numerical testing.

Key words: advection equation, monotonization of difference schemes, limitation of anti-diffusion fluxes.

Анотація: Розглядається задача для отримання чисельних неосцилюваних рішень рівняння переносу з використанням явної і неявної різницевої схем. Адаптивна схема будується за допомогою введення в монотонну різницеву схему першого порядку антидифузійних членів. Показано, що задача обмеження антидифузійних потоків для явної схеми зводиться до розв'язання задачі лінійного програмування. Для неявної схеми задача обмеження антидифузійних потоків зводиться до задачі нелінійного програмування або послідовності задач лінійного програмування. Запропоновано спрощений алгоритм монотонізації. Приведено результати чисельних розрахунків.

Ключові слова: рівняння переносу, монотонізація різницевої схем, обмеження антидифузійних потоків.

Аннотация: Рассматривается задача получения численных неосциллирующих решений уравнения переноса с использованием явной и неявной адаптивных разностных схем. Адаптивная схема строится посредством добавления в монотонную разностную схему первого порядка антидиффузионных слагаемых. Показано, что задача ограничения антидиффузионных потоков для явной схемы сводится к задаче линейного программирования. Для неявной схемы задача ограничения антидиффузионных потоков сводится к задаче нелинейного программирования или последовательности задач линейного программирования. Предложен упрощенный алгоритм монотонизации. Приведены результаты численных расчетов.

Ключевые слова: уравнение переноса, монотонизация разностных схем, ограничение антидиффузионных потоков.

1. Введение

При решении уравнения переноса часто требуются неотрицательность и монотонность численного решения. Схемами, которые обеспечивают эти свойства численного решения, являются монотонные схемы. Как показал С.К. Годунов [1], не существует линейных монотонных схем второго и выше порядков. Схемы первого порядка обладают большой численной диффузией, что приводит к неудовлетворительному качеству численного решения. Схемы высокого порядка в областях больших градиентов решения порождают осцилляции, которые влекут потерю монотонности решения и зачастую его неотрицательности. Поэтому после того, как стала ясна принципиальная невозможность получения монотонных разрывных численных решений на основе линейных схем повышенной точности, начались попытки построения нелинейных разностных схем. Одним из первых плодотворных подходов получения таких схем был подход, основной идеей которого является комбинирование в конструируемой адаптивной схеме двух схем с различными свойствами. В качестве одной из базовых схем должна быть монотонная схема первого порядка, а второй может быть схема высокого порядка. Идея комбинирования двух схем реализуется посредством добавления в монотонную схему антидиффузионных слагаемых, имеющих смысл аппроксимационных добавок к монотонным потокам первого порядка. Величины этих антидиффузионных слагаемых выбираются таким образом, чтобы адаптивная схема на гладких решениях сохраняла порядок точности схемы высокого порядка, а в областях больших градиентов – монотонность численного решения. В настоящее время для определения величин

антидиффузионных потоков для явных схем используются различные формулы ограничения или коррекции потоков [2]. К сожалению, до сих пор не существует эффективных алгоритмов монотонизации неявных разностных схем. Среди представителей схем, построенных по данному принципу, отметим схемы с коррекцией потоков (FCT) [3, 4].

В данной работе рассматриваются явные и неявные адаптивные разностные схемы для численного решения уравнения переноса. Эти схемы строятся на базе монотонной разностной схемы первого порядка и схемы с центрально-разностной аппроксимацией пространственной производной первого порядка. Задача определения антидиффузионных потоков сводится к решению оптимизационной задачи. Так, в случае явной разностной схемы – это задача линейного программирования. Для неявной разностной схемы задача определения антидиффузионных потоков сводится к решению задачи нелинейного программирования или решению последовательности задач линейного программирования. Для данных оптимизационных задач доказана их разрешимость. Предложен упрощенный алгоритм монотонизации явных и неявных разностных схем. Приведены результаты численных расчетов.

2. Постановка задачи

Рассмотрим на отрезке $[a, b]$ краевую задачу для уравнения переноса:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u\rho) = 0, \quad t > 0 \quad (1)$$

с начальным условием

$$\rho(x, 0) = \rho_h(x). \quad (2)$$

В дальнейшем, без ограничения общности, с целью упрощения выкладок, будем считать, что вектор скорости не изменяется во времени, т.е. $u = u(x)$. Для однозначного решения задачи (1), (2) на каждой границе ставится столько условий, сколько на ней имеется входящих в область характеристик. Обозначим через ρ_0 и ρ_{N+1} значения функции $\rho(x, t)$ соответственно на левом и правом концах отрезка $[a, b]$.

Введем на $[a, b]$ неравномерную сетку Ω_h :

$$\Omega_h = \{x_i : x_{i+1} = x_i + h_i, \quad i = \overline{1, N-1}; \quad x_1 > a, \quad x_N < b\}.$$

Линейное пространство сеточных функций $y(x_i)$, определенных на Ω_h , обозначим через H_h . Будем использовать следующие обозначения для векторной нормы и согласованной с ней матричной нормы:

$$\|y\|_1 = \sum_{i=1}^N |y_i|, \quad \|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq N} \sum_{i=1}^N |a_{ij}|.$$

Аппроксимируем задачу (1) – (2) явной разностной схемой

$$y_t + Ly = 0, \quad (3)$$

$$y = y_h, \quad (4)$$

где $\hat{y}_i = y(x_i, t_j)$, $y_i = y(x_i, t_{j-1})$, $y_t = (\hat{y} - y)/\tau$, $\Omega_t = \{t_j = j\tau, \tau > 0, j = 0, 1, \dots\}$ – временная сетка. Оператор L определяется следующим образом:

$$Ly_i = \frac{1}{\hbar_i} \left\{ u_{i+1/2}^+ y_i + u_{i+1/2}^- y_{i+1} - u_{i-1/2}^+ y_{i-1} - u_{i-1/2}^- y_i + \right. \quad (5)$$

$$\left. + 0.5 \alpha_{i+1/2} |u_{i+1/2}| (y_{i+1} - y_i) - 0.5 \alpha_{i-1/2} |u_{i-1/2}| (y_i - y_{i-1}) \right\}, \quad i = \overline{1, N}$$

где $\hbar_i = 0.5(h_i + h_{i+1})$, $i = 2, \dots, N-1$; $\hbar_1 = 0.5(x_1 + x_2) - a$, $\hbar_N = b - 0.5(x_N + x_{N-1})$,
 $u^\pm = 0.5(u \pm |u|)$, $u_{i+1/2} = u(x_{i+1/2})$, $x_{i+1/2} = 0.5(x_i + x_{i+1})$, $\alpha_{1/2} = \alpha_{N+1/2} = 0$.

$\alpha = (\alpha_{3/2}, \dots, \alpha_{N-1/2}) \in R^{N-1}$ – некоторый числовой вектор, определяющий порядок аппроксимации разностной схемы (3) по пространственной переменной. Заметим, что при $\alpha = 0$, разностная схема (3) является условно монотонной разностной схемой, обладающей большой численной диффузией [5]. Последние два члена в правой части выражения (5) можно рассматривать как антидиффузионные. Значения скорости $u(x)$ на концах отрезка $[a, b]$ в точках $x_0 = a$ и $x_{N+1} = b$ обозначим, соответственно, как $u_{1/2}$ и $u_{N+1/2}$.

Неявная разностная схема для уравнения (1) имеет вид

$$y_t + L\hat{y} = 0. \quad (6)$$

Решение явной разностной схемы (3) – (4) или неявной разностной схемы (6), (4) сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений

$$A\hat{y} = \phi, \quad (7)$$

где $A = \{a_{ij}\}_j^i$ – трехдиагональная квадратная матрица порядка N . Представим матрицу A в виде

$$A(\sigma, \alpha) = B(\sigma) - \sigma C(\alpha),$$

где B и C – трехдиагональные квадратные матрицы порядка N с элементами

$$b_{ii}(\sigma) = \frac{\hbar_i}{\tau} + \sigma(u_{i+1/2}^+ - u_{i-1/2}^-), \quad c_{ii}(\alpha) = 0.5(\alpha_{i-1/2}|u_{i-1/2}| + \alpha_{i+1/2}|u_{i+1/2}|), \quad i = \overline{1, N},$$

$$b_{i\overline{i+1}}(\sigma) = \mp \sigma u_{i\mp 1/2}^\pm; \quad c_{i\overline{i-1}}(\alpha) = c_{i\overline{i}}(\alpha) = -0.5\alpha_{i-1/2}|u_{i-1/2}|.$$

Параметр σ равен нулю для явной разностной схемы и $\sigma = 1$ – для неявной разностной схемы.

Вектор ϕ в правой части системы уравнений (7) вычисляется по формуле

$$\phi = A(\sigma - 1, \alpha)y + g, \quad (8)$$

где вектор g имеет вид $g = (u_{1/2}^+ \hat{y}_0, 0, \dots, 0, -u_{N+1/2}^- \hat{y}_{N+1})$.

Заметим, что для любого $z \in R^N$

$$C(\alpha)z = D(z)\alpha,$$

где $D(z)$ – двухдиагональная матрица размера $N \times (N - 1)$ с элементами

$$d_{ii}(z) = -d_{i+1i} = -0.5|u_{i+1/2}|(z_{i+1} - z_i), \quad i = \overline{1, N-1}.$$

3. Явная схема

Рассмотрим явную разностную схему (7) при $\sigma = 0$. Нетрудно видеть, что матрица A в этом случае является диагональной. Поэтому система уравнений (7) однозначно разрешима.

Остановимся более подробно на алгоритме FCT. Базовый алгоритм FCT для решения уравнения $y_t + f_x = 0$ можно представить как шесть последовательных операций в каждой точке i [3, 4]:

1. Расчет потока переноса $f_{i+1/2}^L$ по некоторому методу низкого порядка, гарантирующему монотонность результатов.

2. Расчет потока переноса $f_{i+1/2}^H$ по некоторому методу высокого порядка.

3. Расчет обновленного решения низкого порядка, учитывающего перенос и диффузию

$$y_i^0 = y_i^n - \frac{\tau}{h_i} [f_{i+1/2}^L - f_{i-1/2}^L].$$

4. Определение антидиффузионного потока, представляющего собой часть монотонного потока переноса, на который надо наложить ограничение

$$f_{i+1/2}^{ad} = f_{i+1/2}^H - f_{i+1/2}^L.$$

5. Наложение ограничения на антидиффузионные потоки $\{f_{i+1/2}^{ad}\}$ таким образом, чтобы величины y_i^{n+1} , рассчитываемые на шаге 6, были свободны от выбросов в сторону завышения или занижения, которых не имеется у величин $\{y_i^0\}$. В этом случае

$$f_{i+1/2}^c = \delta_{i+1/2} f_{i+1/2}^{ad}, \quad 0 \leq \delta_{i+1/2} \leq 1.$$

6. Использование скорректированных антидиффузионных потоков для получения новых значений y_i^{n+1} по формуле

$$y_i^{n+1} = y_i^0 - \frac{\tau}{h_i} [f_{i+1/2}^c - f_{i-1/2}^c].$$

Здесь решающим шагом является шаг 5. Без шага 5, т.е. при $f_{i+1/2}^c = f_{i+1/2}^{ad}$, расчет $\{y_i^{n+1}\}$ сводится к алгоритму высокого порядка без коррекции для обеспечения требуемой монотонности.

Таким образом, нетрудно видеть, что корректирующие антидиффузионные потоки можно определить из решения следующей задачи линейного программирования.

Пусть требуется максимизировать функционал

$$\mathfrak{S}(\alpha) = \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_{i+1/2} \rightarrow \max \quad (9)$$

при ограничениях

$$B(0)\hat{y} - D(y)\alpha = B(-1)y + g, \quad (10)$$

$$0 \leq \alpha \leq 1, \quad y^- \leq \hat{y} \leq y^+, \quad (11)$$

где

$$y_i^- = \min(\hat{y}_{i-1}^0, \hat{y}_i^0, \hat{y}_{i+1}^0), \quad y_i^+ = \max(\hat{y}_{i-1}^0, \hat{y}_i^0, \hat{y}_{i+1}^0) \quad (12)$$

и \hat{y}^0 – решение разностной схемы (10) при $\alpha = 0$.

Теорема 1. Пусть τ удовлетворяет неравенству

$$\tau \max_{1 \leq i \leq N} \frac{1}{\hbar_i} (u_{i+1/2}^+ - u_{i-1/2}^-) < 1. \quad (13)$$

Тогда задача (9) – (12) разрешима.

Доказательство. При выполнении условия (13) разностная схема (10) при $\alpha = 0$ является монотонной. Для разрешимости задачи (9) – (12) достаточно показать ограниченность функционала качества и непустоту множества допустимых значений [6]. Ограниченность (9) очевидна, а вектор (α^0, \hat{y}^0) удовлетворяет условиям (10) – (12), где $\alpha^0 = 0$, что и требовалось доказать.

Наряду с ограничениями (12), будем рассматривать также ограничения

$$y_i^- = \gamma_i \min(y_{i-1}, y_i, y_{i+1}), \quad y_i^+ = \gamma_i \max(y_{i-1}, y_i, y_{i+1}), \quad (14)$$

где $\gamma_i = 1 - \frac{\tau}{\hbar_i} (u_{i+1/2}^+ - u_{i-1/2}^-)$.

Теорема 2. Пусть τ удовлетворяет неравенству (13).

Тогда задача (9) – (11), (14) разрешима.

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 1 для разрешимости задачи (9) – (11), (14) достаточно показать непустоту множества допустимых значений.

При выполнении условия (13) и $\alpha = 0$ разностная схема (10) является монотонной и

$$\begin{aligned} \hat{y}_i^0 &\geq \min \left\{ \frac{\tau u_{i-1/2}^+}{\hbar_i} y_{i-1} + \left[1 - \frac{\tau}{\hbar_i} (u_{i+1/2}^+ - u_{i-1/2}^-) \right] y_i - \frac{\tau u_{i+1/2}^-}{\hbar_i} y_{i+1} \right\} \geq \\ &\geq \left[1 - \frac{\tau}{\hbar_i} (u_{i+1/2}^+ - u_{i-1/2}^-) \right] \min(y_{i-1}, y_i, y_{i+1}) = y_i^-. \end{aligned}$$

Таким же образом можно показать, что $\hat{y}_i^0 \leq y_i^+$.

Поэтому вектор $(0, \hat{y}^0)$ удовлетворяет условиям (10) – (11), (14) и, следовательно, множество допустимых значений непусто, что и требовалось доказать.

Заметим, что данный метод определения антидиффузионных потоков легко обобщается на многомерный случай и схемы высоких порядков.

4. Неявная схема

Рассмотрим неявную разностную схему (7) при $\sigma = 1$.

Теорема 3. Пусть $\alpha \in R^{N-1}$ и $\alpha \geq 0$. Тогда для того, чтобы линейная система (7) имела единственное решение, достаточно τ выбрать так, чтобы выполнялось неравенство

$$\tau \max_{1 \leq i \leq N} (\alpha_{i-1/2} |u_{i-1/2}| + \alpha_{i+1/2} |u_{i+1/2}|) < \hbar^-, \quad (15)$$

$$\hbar^- = \min \left\{ \hbar_1 - \tau u_{1/2}^-, \min_{2 \leq i \leq N-1} \hbar_i, \hbar_N + \tau u_{N+1/2}^+ \right\}.$$

Доказательство. Для однозначной разрешимости системы уравнений (7) достаточно показать невырожденность матрицы $A(1, \alpha)$.

Нетрудно видеть, что матрица B является матрицей с положительной доминирующей диагональю по столбцам и неположительными внедиагональными элементами. Поэтому матрица B невырождена и, согласно [7],

$$\|B^{-1}\|_1 \leq \frac{\tau}{\hbar^-}.$$

Матрица C есть симметричная матрица со слабым диагональным преобладанием, и

$$\|C\|_1 = \max_{1 \leq i \leq N} (\alpha_{i-1/2} |u_{i-1/2}| + \alpha_{i+1/2} |u_{i+1/2}|). \quad (16)$$

Из (16) с учетом (15) получим, что

$$\|B^{-1}C\|_1 < 1. \quad (17)$$

Таким образом, матрицу A можно представить в виде произведения двух невырожденных матриц [8]:

$$A = B(E - B^{-1}C)$$

и, следовательно, матрица $A(1, \alpha)$ невырождена, что и требовалось доказать.

По аналогии с явной разностной схемой антидиффузионные потоки для неявной разностной схемы будем определять из решения следующей задачи нелинейного программирования.

Пусть требуется минимизировать функционал

$$\mathfrak{S}(\alpha, \hat{y}) = - \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_{i+1/2} \rightarrow \inf, \quad (\alpha, \hat{y}) \in U, \quad (18)$$

где

$$U = \{(\alpha, \hat{y}) \in R^{N-1} \times R^N : (\alpha, \hat{y}) \in U_0, q(\alpha, \hat{y}) = 0\}, \quad (19)$$

$$U_0 = \{(\alpha, \hat{y}) : 0 \leq \alpha \leq 1, y^- \leq \hat{y} \leq y^+\},$$

$$q(\alpha, \hat{y}) = B(1)\hat{y} - C(\alpha)\hat{y} - B(0)y - g, \quad (20)$$

$$y_i^- = \min(\hat{y}_{i-1}^0, \hat{y}_i^0, \hat{y}_{i+1}^0), \quad y_i^+ = \max(\hat{y}_{i-1}^0, \hat{y}_i^0, \hat{y}_{i+1}^0)$$

и \hat{y}^0 – решение разностной схемы $q(\alpha, \hat{y}) = 0$ при $\alpha = 0$.

Вместо задачи нелинейного программирования (18) – (20) можно рассматривать решение следующей последовательности задач линейного программирования:

$$\mathfrak{S}(\alpha^k, \hat{y}^k) = -\sum_{i=1}^{N-1} \alpha_{i+1/2}^k \rightarrow \inf, \quad (\alpha^k, \hat{y}^k) \in U_k, k = 1, 2, \dots, \quad (21)$$

где

$$U_k = \{(\alpha^k, \hat{y}^k): (\alpha^k, \hat{y}^k) \in U_0, q_k(\alpha^k, \hat{y}^k) = 0\}, \quad (22)$$

$$q_k(\alpha^k, \hat{y}^k) = B(1)\hat{y}^k - D(\hat{y}^{k-1})\alpha^k - B(0)y - g \quad (23)$$

и \hat{y}^0 – решение разностной схемы (23) при $\alpha^0 = 0$ и $k = 0$.

Так как вектор (α^0, \hat{y}^0) удовлетворяет условиям (22), (23) при любых $k = 1, 2, \dots$, то множество допустимых значений U_k не пусто и задача (21) – (23) разрешима при всех $k = 1, 2, \dots$.

Обозначим решение задачи (21) – (23) через $(\alpha_*^k, \hat{y}_*^k)$, т.е.

$$\mathfrak{S}_k^* = \mathfrak{S}(\alpha_*^k, \hat{y}_*^k) = \min_{U_k} \mathfrak{S}(\alpha^k, \hat{y}^k), \quad (\alpha_*^k, \hat{y}_*^k) \in U_k. \quad (24)$$

Теорема 4. Пусть τ удовлетворяет неравенству

$$\tau \max_{2 \leq i \leq N-1} (|u_{i-1/2}| + |u_{i+1/2}|) \leq \beta \bar{h}^-, \quad 0 \leq \beta < 1,$$

где $\bar{h}^- = \min \left\{ \bar{h}_1 - \tau u_{1/2}^-, \min_{2 \leq i \leq N-1} \bar{h}_i, \bar{h}_N + \tau u_{N+1/2}^+ \right\}$.

Тогда последовательность $\{(\alpha_*^k, \hat{y}_*^k)\}$ решений задач (21) – (23) такова, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathfrak{S}_k^* = \mathfrak{S}^* = \inf_U \mathfrak{S}(\alpha, \hat{y}) \quad \text{и} \quad \{(\alpha_*^k, \hat{y}_*^k)\} \rightarrow U^*.$$

Доказательство. Из уравнения (22) следует, что

$$\hat{y}^k = B^{-1}(1)C(\alpha^k)\hat{y}^{k-1} + B^{-1}(1)(B(0)y + g).$$

При выполнении условий теоремы аналогично (17) можно показать, что

$$\|B^{-1}(1)C(\alpha)\|_1 \leq \beta < 1$$

для всех $0 \leq \alpha \leq 1$. Поэтому последовательность $\{\hat{y}^k\}$ является сходящейся при $k \rightarrow \infty$.

По построению $(\alpha_*^k, \hat{y}_*^k) \in U_0$ для любого k . В силу компактности U_0 последовательность $\{(\alpha_*^k, \hat{y}_*^k)\}$ имеет хотя бы одну предельную точку. Пусть $(\tilde{\alpha}, \tilde{y})$ – произвольная предельная точка $\{(\alpha_*^k, \hat{y}_*^k)\}$. Не умаляя общности, можем считать, что сама последовательность $\{(\alpha_*^k, \hat{y}_*^k)\} \rightarrow (\tilde{\alpha}, \tilde{y})$. В силу замкнутости U_0 имеем, что $(\tilde{\alpha}, \tilde{y}) \in U_0$. Далее, переходя к пределу в уравнении,

$$B(1)\hat{y}^k - C(\alpha^k)\hat{y}^{k-1} = B(0)y + g$$

при $k \rightarrow \infty$, получим, что $(\tilde{\alpha}, \tilde{y})$ удовлетворяет уравнению $q(\tilde{\alpha}, \tilde{y}) = 0$ и, следовательно, $(\tilde{\alpha}, \tilde{y}) \in U$.

С другой стороны, любое решение уравнения $q(\alpha, \hat{y}) = 0$ является и решением уравнения $q_k(\alpha^k, \hat{y}^k) = 0$ для любых k . Поэтому $U \subseteq U_k$ для любого k . Отсюда, с учетом полунепрерывности, снизу $\mathfrak{S}(\alpha, \hat{y})$ на U_0 получим

$$\mathfrak{S}^* \leq \mathfrak{S}(\tilde{\alpha}, \tilde{y}) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathfrak{S}(\alpha_*^k, \hat{y}_*^k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathfrak{S}_k^* = \mathfrak{S}^*$$

или $(\tilde{\alpha}, \tilde{y}) \in U^*$.

Тем самым показано, что любая предельная точка последовательности $\{\alpha_*^k, \hat{y}_*^k\}$ принадлежит U^* . Отсюда следует, что $\{\alpha_*^k, \hat{y}_*^k\} \rightarrow U^*$, что и требовалось доказать.

Пусть u и v – сеточные функции из H_n . Дополним функции u и v их граничными значениями.

Определение. Функцию v будем называть монотонно подобной функции u , если ее компоненты удовлетворяют условиям для $i = 0, 1, \dots, N$:

- а) если $u_i = u_{i+1}$, то $v_i = v_{i+1}$;
- б) $(u_{i+1} - u_i)(v_{i+1} - v_i) \geq 0$, в противном случае.

Перепишем систему уравнений (7) при $\sigma = 1$ в виде

$$\tilde{B}\Delta\hat{y} - \tilde{C}(\alpha)\Delta\hat{y} = f, \quad (25)$$

где $\Delta\hat{y} = (\Delta_{1/2}\hat{y}, \Delta_{3/2}\hat{y}, \dots, \Delta_{N+1/2}\hat{y})$ – $(N+1)$ -мерный вектор, $\Delta_{i+1/2}\hat{y} = \hat{y}_{i+1} - \hat{y}_i$. Матрицы \tilde{B} и \tilde{C} являются трехдиагональными матрицами порядка $(N+1)$, элементы которых определяются по формулам

$$\begin{aligned} \tilde{b}_{ii} &= 1 - \eta_{i-1}u_{i-1/2}^- + \eta_i u_{i-1/2}^+, & i = \overline{1, N+1}, \\ \tilde{b}_{ii+1} &= \eta_i u_{i+1/2}^-, & \tilde{b}_{ii-1} &= -\eta_{i-1} u_{i-3/2}^+, \\ \tilde{c}_{ii} &= 0.5(\eta_{i-1} + \eta_i)\alpha_{i+1/2}|u_{i-1/2}|, & i = \overline{1, N+1}, \\ \tilde{c}_{ii-1} &= -0.5\eta_{i-1}\alpha_{i-3/2}|u_{i-3/2}|, & \tilde{c}_{ii+1} &= -0.5\eta_i\alpha_{i+1/2}|u_{i+1/2}|, \\ \eta_i &= \left[\frac{\hbar_i}{\tau} + u_{i+1/2} - u_{i-1/2} \right]^{-1}, & i = \overline{1, N}, & \eta_0 = \eta_{N+1} = 0, \\ f_i &= \tau^{-1}(\hbar_i \eta_i y_i - \hbar_{i-1} \eta_{i-1} y_{i-1}), & i = 2, 3, \dots, N, \\ f_1 &= \tau^{-1}(\hbar_1 \eta_1 y_1 - \hat{y}_0), & f_{N+1} &= \tau^{-1}(y_{N+1} - \hbar_N \eta_N y_N). \end{aligned}$$

Пусть \hat{y}^0 – решение монотонной разностной схемы (7) при $\sigma = 1$ и $\alpha = 0$. Пусть S – диагональная матрица порядка $(N + 1)$, у которой $s_{ii} = \text{sign}(\Delta_{i-1/2}\hat{y}^0)$. Тогда поиск решения, монотонно подобного \hat{y}^0 , сводится к решению следующей задачи нелинейного программирования.

Пусть требуется максимизировать функционал

$$\sum_{i=1}^{N-1} \alpha_{i+1/2} \rightarrow \sup \quad (26)$$

при условиях

$$\tilde{B}S\Delta\tilde{y} - \tilde{C}(\alpha)S\Delta\tilde{y} = f, \quad (27)$$

$$0 \leq \alpha \leq 1, \quad \Delta\tilde{y} \geq 0, \quad (28)$$

$$\Delta_{i-1/2}\tilde{y} \leq \varepsilon, \quad \text{если } |\Delta_{i-1/2}\hat{y}^0| \leq \varepsilon, \quad (29)$$

где $\tilde{y} = S\hat{y}$.

Аналогично задаче (18) – (20) решение задачи (26) – (29) можно свести к решению последовательности задач линейного программирования.

Если в задаче (26) – (29) известна оценка полной вариации функции $\Delta\hat{y}$, то тогда условия (29) можно заменить на условие

$$TV(\hat{y}) = \sum_{i=1}^{N+1} \Delta_{i-1/2}\tilde{y} \leq M. \quad (30)$$

5. Упрощенный алгоритм монотонизации

Обозначим через $I(i_0, i_1, \varepsilon)$ множество последовательных индексов в решении $y = (y_0, y_1, \dots, y_{N+1}) \in R^{N+2}$ разностной задачи (7), удовлетворяющих условиям

$$I(i_0, i_1, \varepsilon) = \{i : |\Delta_{i+1/2}y|, |\Delta_{i+1/2-p}y| > \varepsilon; \Delta_{i+1/2}y\Delta_{i+1/2-p}y < 0, \quad (31)$$

$$p = \text{sign}(u_{i+1/2}) = \text{const}, \alpha_{i+1/2} = 1, i = i_0, i_{0+1}, \dots, i_1; I \leq i_0 \leq i_1 \leq N - I; \varepsilon \geq 0\}.$$

Тогда алгоритм монотонизации для разностной задачи (7) на каждом временном шаге можно сформулировать следующим образом.

Шаг 0. Положить все $\alpha_{i+1/2}$ для $i = \overline{I, N - I}$ равными 1.

Шаг 1. Для заданного α найти решение \hat{y} разностной задачи (7).

Шаг 2. Для полученного решения \hat{y} определить все множества $I_k(i_0^k, i_1^k, \varepsilon)$, $k = \overline{1, K}$.

Шаг 3а. Если для данного \hat{y} множеств $I_k(i_0^k, i_1^k, \varepsilon)$ не существует, то алгоритм монотонизации на этом заканчивается.

Шаг 3б. Для каждого k в множестве $I_k(i_0^k, i_1^k, \varepsilon)$ найдем такой индекс i_k^* , что

$\left| \Delta_{i_k^* - 1/2} \hat{y} \Delta_{i_k^* + 1/2} \hat{y} \right| = \max_{i_0^k \leq i \leq i_1^k} \left| \Delta_{i-1/2} \hat{y} \Delta_{i+1/2} \hat{y} \right|$. Далее, для каждого i_k^* положить $\alpha_{i_k^* + 1/2}$ равным нулю и перейти на Шаг 1.

Заметим, что для явной схемы изменение значения $\alpha_{i+1/2}$ приводит к изменению значений решения \hat{y} в соседних узлах сетки, т.е. \hat{y}_i и \hat{y}_{i+1} , и не требует пересчета \hat{y} для остальных узлов сетки.

Также отметим, что для другого шаблона определение множества $I(i_0, i_1, \varepsilon)$ может быть иным. Например, множество $I(i_0, i_1, \varepsilon)$ можно задать как

$$I(i_0, i_1, \varepsilon) = \left\{ i : \left| \Delta_{i-1/2} y \right|, \left| \Delta_{i+1/2} y \right| > \varepsilon; \Delta_{i-1/2} y \Delta_{i+1/2} y < 0, \right.$$

если $\left| \Delta_{i+1/2} y \right| \geq \left| \Delta_{i-1/2} y \right|$, то $\alpha_{i+1/2} = 1$;

если $\left| \Delta_{i+1/2} y \right| < \left| \Delta_{i-1/2} y \right|$, то $\alpha_{i-1/2} = 1$; $i = i_0, i_0 + 1, \dots, i_1$; $1 \leq i_0, i_1 \leq N$; $\varepsilon \geq 0$ }, которое для данного трехточечного шаблона работает чуть хуже, чем (31).

6. Результаты численных расчетов

Рассматривалось решение тестовой задачи о распространении квадратной волны с постоянной скоростью [3]. В задаче выбиралась равномерная сетка по пространству, состоящая из 260 ячеек, расположенных от $x = 0$ до 260 см. В начальный момент времени волна занимала пространство в 10 ячеек с 10 по 19 ячейку. Скорость течения составляла 1 см/сек. Максимальное значение плотности ρ равно 100, а минимальное значение – 10.

На рис. 1–4 показаны результаты расчетов распространения волны, полученные с использованием различных алгоритмов.

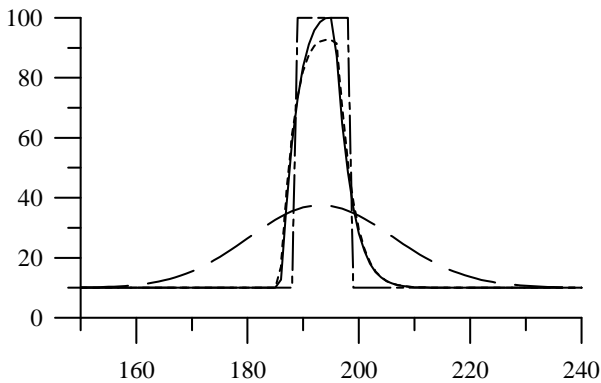


Рис.1. Решения задачи о распространении квадратной волны, полученные после 1800 шагов по времени ($\tau = 0,1$ сек.) по явным разностным схемам: штрих-пунктирная линия – точное решение; штриховая - монотонная схема; сплошная – решение задачи (9) – (11) с ограничениями (14); пунктирная – метод расчета переноса с коррекцией потоков (FCT) второго порядка

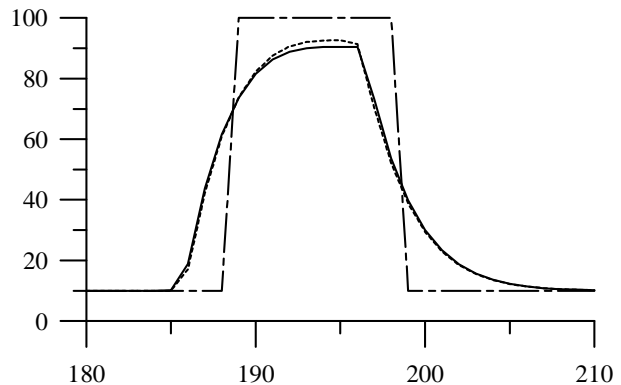


Рис.2. Сравнение решений задачи о распространении квадратной волны, полученных после 1800 шагов по времени по методу FCT (пунктирная линия) и упрощенному алгоритму монотонизации (сплошная линия). Точное решение обозначено штрих-пунктирной линией

На рис. 1 приведены решения уравнения (1) – (2), рассчитанные по явным схемам после

1800 шагов по времени. Шаг по времени равнялся 0,1 сек. Расчеты выполнялись с использованием монотонной разностной схемы (10) при $\alpha = 0$, схемы с коррекцией потоков (FCT) второго порядка [3], а также явных схем (10), у которых вектор α определялся из решения задач (9) – (12) и (9) – (11), (14), а также по упрощенному алгоритму монотонизации. Заметим, что решения, полученные методом FCT и из (9) – (12), практически совпали. Сравнение решений по методу FCT и упрощенному алгоритму монотонизации дано на рис. 2.

Численные решения, полученные по неявной разностной схеме (20) с различными значениями вектора α показаны на рис. 3–4. На рис. 3–4 приведены решения после 400 шагов по времени с временным шагом, равным 0,2 сек. Штриховой линией обозначено решение монотонной схемы при $\alpha = 0$. Задачи (18) – (20) и (26) – (28), (30) решались как задачи линейного программирования в первом приближении, т.е. $y^{k-1} = y^0$ и y^{k-1} не обновлялось. Пунктирная линия – это решение задачи (18) – (20), а сплошная – решение задачи (26) – (28), (30). Штрихпунктирной линией показано точное решение.

Сравнение решений задачи (26) – (28), (30) (пунктирная линия) с решением упрощенного алгоритма монотонизации (сплошная линия) дано на рис. 4.

7. Заключение

В работе предложен новый метод определения антидиффузионных потоков, основанный на решении соответствующих задач линейного программирования, в явных и неявных разностных схемах с коррекцией потоков для уравнения переноса. Данный метод легко обобщается на многомерный случай и любые схемы высокого порядка. Нетрудно видеть, что данная методика также может легко использоваться для монотонизации разностных схем для численного решения уравнений конвективной диффузии.

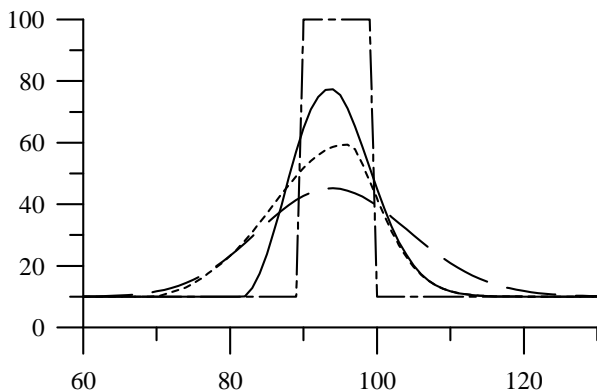


Рис.3. Решения задачи о распространении квадратной волны, полученные после 400 шагов по времени ($\tau = 0,2$ сек.) по неявной разностной схеме (20) с различными значениями α : точное решение (штрихпунктирная линия); монотонная схема (штриховая линия); решение задачи (18) – (20) (пунктирная линия); решение задачи (26) – (28), (30) (сплошная линия)

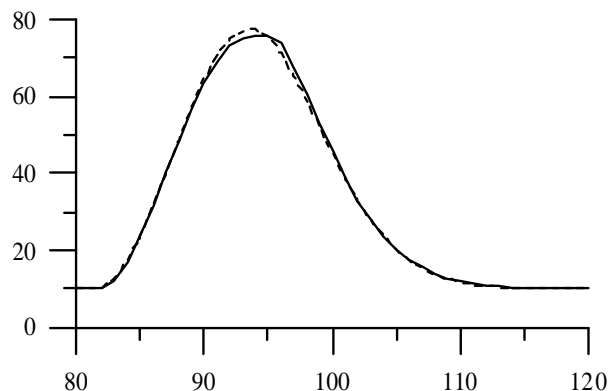


Рис.4. Решения задачи о распространении квадратной волны, полученные после 400 шагов по времени ($\tau = 0,2$ сек.) по неявной разностной схеме (20): пунктирная линия – решение задачи (26) – (28) с ограничением (30); сплошная линия – упрощенный алгоритм монотонизации

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики //

Математический сборник. – 1959. – № 47. – С. 271–306.

2. Пинчуков В.И., Шу Ч.-В. Численные методы высоких порядков для задач аэрогидродинамики. – Новосибирск: СО РАН, 2000. – 232 с.

3. Оран Э., Борис Дж. Численное моделирование реагирующих потоков. – М.: Мир, 1990. – 661 с.

4. Zalesak S.T. Fully Multidimensional Flux-Corrected Transport Algorithms for Fluids // J. Comp. Phys. – 1979. – Т. 31, № 3. – С. 335–362.

5. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989. – 614 с.

6. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1980. – 518 с.

7. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980. – 350 с.

8. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. – М.: Мир, 1975. – 558 с.