ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

3 • 2009

ТЕПЛОФІЗИКА

УДК 536.242

Член-корреспондент НАН Украины **А. А. Авраменко,**
член-корреспондент НАН Украины **Б. И. Басок, А. И. Скицько,**
А. В. Коваленко

Неустойчивость потоков в вертикальном канале при смешанной конвекции

На основі методу лінійних збурень виведено рівняння для визначення критеріїв стійкості при змішаній конвекції у вертикальних каналах. Рівняння одержані у двовимірному та тривимірному наближеннях. Дослідження рівнянь на власні значення дало змогу визначити критерії стійкості.

При аварийных и переходных режимах работы ядерных реакторов возникают ситуации, когда доминирует естественная или смешанная (вынужденная и естественная) конвекция [1]. В данном случае очень важным аспектом является проблема интенсивности теплоотвода, которая определяется гидродинамическим режимом течения. Поэтому необходимо знать критерии гидродинамической неустойчивости при различных сочетаниях взаимодействия вынужденной и естественной конвекции. В настоящей работе рассматривается метод получения таких критериев и их анализ.

Система уравнений, описывающих процессы гидродинамики и конвективного теплообмена в вертикальном канале при воздействии свободной конвекции, имеет следующий вид:

$$\frac{DV}{D\widetilde{t}} = -\nabla\widetilde{p} + \nu\nabla^2 V + kg\varsigma(\widetilde{T} - \widetilde{T}_w), \qquad \nabla\cdot V = 0, \qquad \frac{D\widetilde{T}}{D\widetilde{t}} = a\nabla^2\widetilde{T}, \tag{1}$$

где $\widetilde{p}$ — давление; $\widetilde{t}$ — время; $\widetilde{x}$ — продольная координата вдоль канала, направленная вертикально вверх; $\widetilde{y}$ — нормальная (в направлении между стенками плоского канала) координата; $\widetilde{z}$ — трансверсальная координата; V — вектор скорости с компонентами $\widetilde{u}$, $\widetilde{\mathrm{v}}$, $\widetilde{w}$ по координатам $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$, $\widetilde{z}$ соответственно; ν — кинематическая вязкость; ρ — плотность; $\widetilde{T}$ — температура потока; $\widetilde{T}_w$ — температура стенки канала; g — ускорение свободного падения; ς — коэффициент объемного расширения; a — температуропроводность; $D/D\widetilde{t}$ — субстанциальная производная; $\nabla = i\partial/\partial\widetilde{x} + j\partial/\partial\widetilde{y} + k\partial/\partial\widetilde{z}$ — лапласиан. Данная система является базовой для вывода линеаризированных уравнений возмущающих амплитуд, на основе которых рассчитываются критерии устойчивости течения. Уравнение для возмущающих амплитуд может быть получено как для трехмерного, так и для двухмерного приближения.

В трехмерном приближении уравнения возмущающих амплитуд выводятся на основе метода малых (линейных) возмущений, в соответствии с которым квадратичными слагаемыми относительно возмущающих величин пренебрегают. Следуя этому методу, представим поля скоростей, давления и температуры в виде суммы основных (невозмущенных) и малых возмущающих составляющих

$$\begin{aligned}&\{\widetilde{u}(\widetilde{t},\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z}),\widetilde{\mathrm{v}}(\widetilde{t},\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z}),\widetilde{w}(\widetilde{t},\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z}),\widetilde{p}(\widetilde{t},\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z}),\widetilde{T}(\widetilde{t},\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z})-T_w\}=\\&\quad=\{\widetilde{U}(\widetilde{y})+u'(\widetilde{t},\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z}),\mathrm{v}'(\widetilde{t},\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z}),w'(\widetilde{t},\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z}),\widetilde{P}(\widetilde{x})+p'(\widetilde{t},\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z}),\\&\qquad\widetilde{\theta}(\widetilde{y})+\theta'(\widetilde{t},\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z})\},\end{aligned}\tag{2}$$

где

$$\begin{aligned}&\{u'(\widetilde{t},\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z}),\mathrm{v}'(\widetilde{t},\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z}),w'(\widetilde{t},\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z})p'(\widetilde{t},\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z})\}=\\&\quad=\left\{U_m u_A(y),U_m\mathrm{v}_A(y),U_m w_A(y),\rho U_m^2 p_A(y),\frac{C_1U_mh^2}{a}\theta_A(y)\right\}\times\\&\qquad\times\exp[i(\widetilde{\alpha}\widetilde{x}+\widetilde{\gamma}\widetilde{z}-\widetilde{\beta}\widetilde{t})].\end{aligned}\tag{3}$$

Здесь $\widetilde{U}(\widetilde{y})$, $\widetilde{P}(\widetilde{x})$, $\widetilde{\theta}(\widetilde{y})$ — скорость, давление и относительная температура невозмущенного потока; $u'(\widetilde{t},\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z})$, $\mathrm{v}'(\widetilde{t},\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z})$, $w'(\widetilde{t},\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z})$ — возмущающие скорости; $p'(\widetilde{t},\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z})$ — возмущающее давление; $\theta'(\widetilde{t},\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z})$ — возмущающая относительная температура; $u_A(y)$, $\mathrm{v}_\mathrm{A}(y)$, $w_A(y)$ — безразмерные возмущающие амплитуды скорости; $p_A(y)$ — безразмерная возмущающая амплитуда давления; $\theta(y)$ — безразмерная возмущающая амплитуда температуры; $y=\widetilde{y}/h$ — безразмерная нормальная координата; h — полуширина канала; $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\gamma}$ — волновые числа; U_m — среднерасходная скорость; $\widetilde{\beta}=\widetilde{\beta}_r+i\widetilde{\beta}_i$, $\widetilde{\beta}_r$ — частота осцилляций; $\widetilde{\beta}_i$ — показатель нарастания возмущений; C_1 — параметр, имеющий размерность градиента температуры.

Рассмотрим два случая, когда температура стенки канала изменяется по линейному закону $\widetilde{T}_w=C_1\widetilde{x}$. Данный закон соответствует условию постоянства теплового потока на стенке. При этом для невозмущенного потока относительная температура $\widetilde{T}(\widetilde{x},\widetilde{y})-T_w(\widetilde{x})$ не зависит от $\widetilde{x}$ [2]. Подставим (3) в (2), а затем (2) в (1). После линеаризации получим следующую систему уравнений для возмущающих амплитуд:

$$\begin{aligned}&D^*u_A-i\mathrm{Re}\alpha Uu_A+\mathrm{Ra}\theta_A=i\mathrm{Re}\alpha p_A+\mathrm{Re}U'\mathrm{v}_A,\\&D^*\mathrm{v}_A-i\mathrm{Re}\alpha U\mathrm{v}_A=\mathrm{Re}p'_A,\qquad D^*w_A-i\mathrm{Re}\alpha Uw_A=i\mathrm{Re}\gamma p_A,\\&i\alpha u_A+\mathrm{v}'_A+i\gamma w_A=0,\qquad D_T^*\theta_A-i\mathrm{RePr}\alpha U\theta_A=u_A+\mathrm{RePr}\theta'\mathrm{v}_A,\end{aligned}\tag{4}$$

где штрих означает дифференцирование по y; $\alpha=\widetilde{\alpha}h$, $\gamma=\widetilde{\gamma}h$; $U=\widetilde{U}/U_m$;

$$\theta=\frac{a\widetilde{\theta}}{C_1U_mh^2};\qquad D^*=\frac{d^2}{dy^2}+i\beta-\kappa^2;\qquad D_T^*=\frac{d^2}{dy^2}+i\beta\mathrm{Pr}-\kappa^2;$$

$$\kappa^2=\alpha^2+\gamma^2;\qquad\beta=\frac{h^2\widetilde{\beta}}{\nu};\qquad\mathrm{Re}=\frac{U_mh}{\nu};\qquad\mathrm{Ra}=\frac{g\varsigma h^4C_1}{\nu a};\qquad\mathrm{Pr}=\frac{\nu}{a}.$$

Исключив $u_A(y)$, $\mathrm{v_A}(y)$ и $p_A(y)$ из первых четырех уравнений (4), получаем $DD^*\mathrm{v}_A + i\alpha\mathrm{Re}(U'' - UD)\mathrm{v}_A = i\mathrm{Ra}\theta'_A$, где $D = d^2/dy^2 - \kappa^2$. Последнее уравнение (4) содержит компоненту $u_A(y)$. Следовательно, необходимо сформировать дополнительное уравнение. Его также можно вывести из первых четырех уравнений (4), сохранив только две компоненты. Сделав это, получим

$$\mathrm{v}_A^{IV} - (\kappa^2 - i\beta + 2\gamma^2 + i\alpha\mathrm{Re}U)\mathrm{v}''_A - i\frac{\alpha^2-\gamma^2}{\alpha}\mathrm{Re}U'\mathrm{v}'_A + \left(2\gamma^2\kappa^2 - 2i\beta\gamma^2 + 2i\alpha\gamma^2\mathrm{Re}U + i\frac{\gamma^2}{\alpha}\mathrm{Re}U''\right)\mathrm{v}_A + i\frac{\alpha^2-\gamma^2}{\alpha}u'''_A - \left(i\frac{\alpha^4-\gamma^4}{\alpha} + \beta\frac{\alpha^2-\gamma^2}{\alpha} - (\alpha^2-\gamma^2)\mathrm{Re}U\right)u'_A + (\alpha^2-\gamma^2)\mathrm{Re}U'u_A = i\frac{\gamma^2}{\alpha}\mathrm{Ra}\theta'_A.$$

Граничные условия имеют вид

$$y=-1, \qquad \mathrm{v}_A = \mathrm{v}'_A = \theta_A = u_A = 0,$$
$$y=1, \qquad \mathrm{v}_A = \mathrm{v}'_A = \theta_A = u_A = 0,$$
$$y=0, \qquad u'_A = 0.$$

Как показывает анализ для приведенных систем, невозможно доказать теорему Сквайра [3] о том, что двухмерные возмущения более опасны с точки зрения потери устойчивости, чем трехмерные. Поэтому указанное утверждение Сквайра необходимо проверять численными расчетами.

В случае двухмерного приближения ($w' = 0$, $\widetilde{\gamma} = 0$) для вывода уравнений возмущающих амплитуд удобно ввести функцию тока ψ таким образом:

$$u' = \frac{\partial\psi}{\partial\widetilde{y}}, \qquad \mathrm{v}' = -\frac{\partial\psi}{\partial\widetilde{x}}, \qquad \psi = \widetilde{\varphi}(\widetilde{y})\exp[i(\widetilde{\alpha}\widetilde{x} - \widetilde{\beta}\widetilde{t})].$$

Повторяя те же операции, что и в трехмерном приближении, получим

$$(U-c)(\varphi'' - \alpha^2\varphi) - U''\varphi = -\frac{i}{\alpha\mathrm{R5}}(\varphi'''' - 2\alpha^2\varphi'' + \alpha^4\varphi + \mathrm{Ra}\theta'_A),$$
$$\theta''_A - (\alpha^2 + i\mathrm{RePr}\alpha(U-c))\theta_A = \varphi' + i\alpha\mathrm{RePr}\theta'\varphi,$$

где $\varphi = \widetilde{\varphi}/(U_m h)$, $c = c_r + ic_i = \widetilde{c}/U_m = \widetilde{\beta}/(\widetilde{\alpha}U_m) = (\widetilde{c}_r + i\widetilde{c}_i)/U_m$.

Задача на собственные значения решается при следующих граничных условиях:

$$y=-1, \qquad \varphi' = \varphi'' = \theta_A = 0,$$
$$y=1, \qquad \varphi' = \varphi'' = \theta_A = 0.$$

Задача на собственные значения для систем уравнений в трех- и двухмерном приближениях решалась методом коллокаций. В качестве пробных функций в трехмерном приближении использовались выражения

$$u_A = \sum_{j=1}^{N} k_j(1-y^2)^2 y^{2j-3}(j(1-y^2) - (1+y^2)),$$

$$\mathrm{v}_A = \sum_{j=1}^{N} l_j (1-y^2)^2 y^{2(j-1)}, \qquad \theta_A = \sum_{j=1}^{N} m_j (1-y^2)^j.$$

В двухмерном приближении имеем

$$\varphi = \sum_{j=1}^{N} l_j (1-y^2)^2 y^{2(j-1)}, \qquad \theta_A = \sum_{j=1}^{N} m_j (1-y^2)^j.$$

Для верификации модели были проведены тестовые расчеты критерия устойчивости для течения в плоском канале в отсутствие свободной конвекции. Тогда профиль невозмущенной скорости имеет вид $U = 1{,}5(1-y^2)$. Расчеты показали, что в этом случае критическое число Рейнольдса $\mathrm{Re}_{\text{кр}} = 3848$. Это значение практически совпадает с данными работы [4].

Профили скорости и температуры невозмущенного течения для случая постоянства теплового потока [2] можно представить в таком виде:

$$\begin{gathered} U = 2K\frac{\mathrm{sh}[K(1+y)]\sin[K(1-y)] + \mathrm{sh}[K(1-y)]\sin[K(1+y)]}{\mathrm{sh}[2K]-\sin[2K]}, \\ \theta = -\frac{1}{2K}\frac{\mathrm{ch}[2K]+\cos[2K]}{\mathrm{sh}[2K]-\sin[2K]}\left(1-\frac{\mathrm{ch}[K(1+y)]\cos[K(1-y)]+\mathrm{ch}[K(1-y)]\cos[K(1+y)]}{\mathrm{ch}[2K]+\cos[2K]}\right), \end{gathered} \tag{5}$$

где $K = \sqrt[4]{\mathrm{Ra}/4}$. В предельном случае $K \to 0$, т. е. когда нет влияния свободной конвекции, профиль невозмущенной скорости принимает форму (5) с максимумом в центре канала. По мере роста числа Релея (K) максимум скорости в центре канала уменьшается и затем превращается в минимум. При этом в области около стенок образуются два максимума, которые смещаются к стенке с ростом K. Такая тенденция поведения профиля невозмущенной скорости оказывает существенное влияние на критерий устойчивости.

Расчеты показали, что в случае трехмерных возмущений минимальное критическое значение числа Рейнольдса достигается при условии $\gamma = 0$, т. е. когда трехмерные возмущения трансформируются в двухмерные. Тем самым показана справедливость теоремы Сквайра. Расчеты, выполненные на основе двухмерной модели, дали такие же результаты, как и расчеты на основе трехмерного приближения при условии $\gamma = 0$.

Результаты расчетов критических значений чисел Рейнольдса как функции чисел Релея и Прандтля представлены в табл. 1. Как видно, зависимость $\mathrm{Re}_{\text{кр}} = \mathrm{Re}_{\text{кр}}(\mathrm{Ra})$ при условии $\mathrm{Pr} = \mathrm{idem}$ носит экстремальный характер — с ростом параметра K значение $\mathrm{Re}_{\text{кр}}$ сначала возрастает, а после достижения максимума начинает убывать. Такое поведение зависимости для $\mathrm{Re}_{\text{кр}}$ обусловлено соотношением взаимовлияния факторов вынужденной и свободной конвекции. С ростом числа Релея максимум профиля скорости уменьшается, и профиль скорости становится более заполненный. Это, в соответствии со второй теоремой

Таблица 1

K	0		1		1,5		2		3		5	
Pr	$\alpha_{\text{кр}}$	$\mathrm{Re}_{\text{кр}}$	$\alpha_{\text{кр}}$	$\mathrm{Re}_{\text{кр}}$	$\alpha_{\text{кр}}$	$\mathrm{Re}_{\text{кр}}$	$\alpha_{\text{кр}}$	$\mathrm{Re}_{\text{кр}}$	$\alpha_{\text{кр}}$	$\mathrm{Re}_{\text{кр}}$	$\alpha_{\text{кр}}$	$\mathrm{Re}_{\text{кр}}$
0,1	1,02	3848	0,96	9170,6	1,06	34762,0	1,59	50176,6	2,67	42550,0	4,49	26466,6
1	1,02	3848	0,96	9174,0	1,06	34773,3	1,59	50188,0	2,67	42554,0	4,49	26470,0
10	1,02	3848	0,96	9174,6	1,06	34778,0	1,59	50190,6	2,67	42555,3	4,49	26472,6
100	1,02	3848	0,96	9174,6	1,06	34778,0	1,59	50191,3	2,67	42555,3	4,49	26472,6

Релея об устойчивости движения потока [3], ведет к стабилизации течения и, как следствие, к возрастанию значения критического числа Рейнольдса. При дальнейшем увеличении числа Релея значение скорости в центре канала становится меньше, чем в области стенки, — появляются два максимума скорости. В этом случае профиль скорости имеет точки перегиба, что, в соответствии с той же теоремой Релея, дестабилизирует поток. Критическое значение числа Рейнольдса уменьшается. Однако в диапазоне исследованных значений чисел Релея (до $K = 5$) значение критического числа Рейнольдса не достигает первоначального значения (при $\mathrm{Ra} = 0$). Очевидно, это происходит вследствие того, что при чисто естественной конвекции поток является более устойчивым, чем при вынужденной. Как видно из табл. 1, влияние числа Прандтля на Re_c незначительное — наблюдается слабый рост $\mathrm{Re}_{\text{кр}}$ при возрастании числа Прандтля. Это можно объяснить тем, что с увеличением вязкости при $a = \mathrm{idem}$ стабилизирует поток. Кроме того, из табл. 1 видно, что с ростом числа Релея (за исключением значения при $K = 1$) длина критических волн возмущений уменьшатся, т. е. для режима свободной конвекции наиболее опасными являются коротковолновые возмущения.

1. *Murata H., Sawada K., Kobayashi M.* Experimental investigation of natural convection in a core of a marine reactor in rolling motion // J. Nuclear science and technology. – 2000. – **37**, No 6. – P. 509–517.
2. *Tao L. N.* On combined free and forced convection in channels // J. Heat transfer. – 1960. – **82**. – P. 233–238.
3. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. – Москва: Наука, 1974. – 712 с.
4. *Orszag S. A.* Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equation // J. Fluid Mech. – 1971. – **50**. – P. 689–703.

Институт технической теплофизики
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 11.08.2008

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **A. A. Avramenko,** Corresponding Member of the NAS of Ukraine **B. I. Basok, A. I. Skitstko, A. V. Kovalenko**

Instability of streams in a vertical channel under combined convection

The equations for the determination of stability criteria under a combined convection in vertical channels are deduced on the basis of a method of linear perturbations in 2D and 3D approximations. The solution of the eigenvalue problem allows determining the criteria of stability.