Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

3 • 2009

МАТЕМАТИКА

УДК 514.7

В. И. Бабенко

К оценке гауссовой кривизны строго выпуклых поверхностей

(Представлено академиком НАН Украины Е. Я. Хрусловым)

Одержано оцінки найменшого значення гауссової кривизни на строго випуклій поверхні за двома її параметрами.

В геометрической теории устойчивости оболочек [1] вопрос об определении критического давления для строго выпуклой, замкнутой (или жестко закрепленной вдоль края) оболочки сводится к отысканию минимума гауссовой кривизны ее срединной поверхности [1–3]. В приведенных в [1, 3] примерах рассматривались простейшие формы оболочки. Вместе с тем при проектировании тонкостенных конструкций, когда заданы лишь некоторые ограничения на размеры оболочки, могут оказаться полезными априорные оценки для критических нагрузок — в нашем случае для гауссовой кривизны срединной поверхности оболочки. В данной работе приведен ряд таких оценок, которые можно рассматривать как обобщение известных результатов О. Бонне и В. Бляшке [4]. Именно, доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть K — гауссова кривизна замкнутой строго выпуклой поверхности F, ограничивающей тело, диаметр и объем которого не меньше соответственно D и V, где $V \leqslant \pi D^3/6$. Пусть K_0 — гауссова кривизна веретенообразной поверхности вращения F_0, ограничивающей тело с объемом V и диаметром D. Тогда справедлива следующая оценка*

$$\min K \leqslant K_0, \tag{1}$$

где минимум берется по всем точкам поверхности F. Если $V = \pi D^3/6$, то F_0 — сфера и в (1) имеет место равенство, когда F совпадает с F_0. Если же $V < \pi D^3/6$, то в (1) строгое неравенство, а K_0 — точная верхняя граница значений $\min K$, к которой можно подойти сколь угодно близко, беря поверхность F достаточно близкой к F_0.

Доказательство. Пусть теорема неверна. Т. е. предположим, что существует удовлетворяющая условиям теоремы поверхность $\widetilde{F}$, гауссова кривизна которой

$$\widetilde{K} \geqslant K_0, \tag{2}$$

где равенство возможно, если $V < \pi D^3/6$. Пусть P и Q — точки поверхности $\widetilde{F}$, расстояние между которыми равно ее диаметру D. Переведем с помощью симметризации Шварца ограниченное поверхностью $\widetilde{F}$ тело $\widetilde{L}$ в тело вращения L' с осью вращения, проходящей через точки P и Q. Затем тело L' с помощью симметризации Штейнера переводим в тело вращения $\overline{L}$, симметричное относительно плоскости α, перпендикулярной отрезку PQ и проходящей через его середину. Ограничивающая тело $\overline{L}$ поверхность вращения $\overline{F}$, как и $\widetilde{F}$, удовлетворяет условиям теоремы; ее гауссова кривизна $\overline{K} \geqslant K_0$; а так как радиус ее экватора $\overline{R} \leqslant 1/\sqrt{\overline{K}}$, то $\overline{R} \leqslant 1/\sqrt{K_0}$ [4, § 25].

Пусть $\overline{F}_0$ — веретенообразная поверхность вращения с гауссовой кривизной K_0 имеет с поверхностью $\overline{F}$ общие ось вращения, экваториальную плоскость α, радиус экватора $\overline{R}$. Тогда тело $\overline{L}$ будет содержаться в теле $\overline{L}_0$, ограниченном поверхностью $\overline{F}_0$ [4, с. 157]. Поэтому диаметры $\overline{D}$ и $\overline{D}_0$ соответственно тел $\overline{L}$ и $\overline{L}_0$ и их объемы $\overline{V}$ и $\overline{V}_0$ подчинены неравенствам

$$\overline{D} < \overline{D}_0, \qquad \overline{V} < \overline{V}_0. \tag{3}$$

Отсюда, в частности, следует, что $\overline{R} < R_0$, где R_0 — радиус экватора поверхности F_0, о которой идет речь в формулировке теоремы. Действительно, пусть $\overline{R} \geqslant R_0$. Имеем [4]

$$\overline{D}_0 = 2\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{1}{K_0} - \overline{R}^2 \sin^2\sigma d\sigma} \leqslant 2\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{1}{K_0} - R_0^2 \sin^2\sigma d\sigma} = D.$$

Поэтому $\overline{D} < D$, что противоречит условиям теоремы.

Далее

$$\overline{V}_0(\overline{R}) = 2\pi\overline{R}^2 \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2\sigma \sqrt{\frac{1}{K_0} - \overline{R}^2 \sin^2\sigma d\sigma}.$$

Нетрудно убедиться в том, что $d\overline{V}_0/d\overline{R} > 0$, поэтому $\overline{V}_0(\overline{R}) < \overline{V}_0(R_0) = V$. Отсюда с учетом (3) заключаем, что $\overline{V} < V$, т. е. поверхность $\overline{F}$, а значит и $\widetilde{F}$, не удовлетворяет условиям теоремы, поэтому предположение (2) неверно. Теорема 1 доказана.

Таким же образом доказывается и следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть K — гауссова кривизна замкнутой строго выпуклой поверхности F, ограничивающей тело L, диаметр которого не меньше D; P и Q — точки на F, расстояние между которыми равно диаметру тела L. Пусть максимальная площадь сечений тела L плоскостями, ортогональными отрезку PQ, не меньше S, где $S \leqslant \pi D^2/4$. Тогда*

$$\min K \leqslant K_0, \tag{4}$$

где минимум берется по всем точкам поверхности F, а K_0 — гауссова кривизна веретенообразной поверхности вращения F_0 с диаметром D и радиусом экватора $\sqrt{S/\pi}$. Если $S = \pi D^2/4$, то F_0 — сфера и в (4) имеет место равенство, когда F совпадает с F_0. Если же $S < \pi D^2/4$, то в (4) строгое неравенство, а K_0 — точная верхняя граница значений $\min K$, к которой можно подойти сколь угодно близко, беря поверхность F близкой к F_0.

Теорема 3. *Пусть K — гауссова кривизна односвязной строго выпуклой поверхности F с высотой H и с плоским краем, ограничивающим область площадью S. Пусть среди* *всех веретенообразных поверхностей вращения, содержащих осесимметричный сегмент с высотой H и с радиусом основания $r = \sqrt{S/\pi}$, поверхность F' с таким сегментом F^0 имеет наибольшую гауссову кривизну K^0. Тогда*

$$\min K \leqslant K^0, \tag{5}$$

где минимум берется по всем точкам поверхности F. При $H \leqslant r$ F^0 — сферический сегмент F_s с радиусом кривизны $R = (r^2 + H^2)/2H$ и в (5) имеет место равенство, если F совпадает с F_s. При $H > r$ F^0 — колпак, несовпадающий с $F_s (K^0 > 1/R^2)$, и в (5) имеет место строгое неравенство, в котором сколь угодно близко можно подойти к равенству, беря поверхность F достаточно близкой к F^0.

Доказательство теоремы 3. Допустим, что теорема неверна. Т. е. существует поверхность $\widetilde{F}$, для которой выполняются условия теоремы, но для ее гауссовой кривизны вместо (5) имеет место ограничение

$$\widetilde{K} \geqslant K^0, \tag{6}$$

где знак равенства возможен лишь при $H/r > 1$, поэтому $\widetilde{K} > 1/R^2$ при любых значениях H/r.

Обозначим через α плоскость края поверхности $\widetilde{F}$. Введем декартову систему координат (x, y, z), приняв плоскость α за координатную — xy. Ось z направим в сторону поверхности $\widetilde{F}$. Переведем с помощью симметризации Шварца ограниченное поверхностью $\widetilde{F}$ и плоскостью α выпуклое тело $\widetilde{L}$ в тело вращения $\overline{L}$, которое имеет ось вращения — ось z, ограничено плоскостью α и выпуклой поверхностью, которую обозначим через $\overline{F}$. Поверхность вращения $\overline{F}$ будет иметь высоту H, ее край $\partial\overline{F}$ — окружность с радиусом кривизны r — лежит в плоскости α. Пусть $\overline{K}$ — гауссова кривизна поверхности $\overline{F}$, тогда [4, с. 144]

$$\overline{K} \geqslant \widetilde{K} > \frac{1}{R^2}. \tag{7}$$

Вместе с поверхностью $\overline{F}$ рассмотрим сферический сегмент F_s с высотой H и радиусом основания r. Расположим их так, чтобы они имели общую ось вращения — ось z и общий край $\partial\overline{F}$. Тогда они будут иметь и общую вершину O_s — точку их касания. Дополним сегмент F_s до сферы, а $\overline{F}$ — до замкнутой строго выпуклой поверхности вращения так, чтобы была непрерывной ее гауссова кривизна, для которой сохраним прежнее обозначение $\overline{K}$, и чтобы она удовлетворяла условию (7), точнее $\overline{K} > 1/R^2$ и $\overline{K} \geqslant K^0$ при $H/r > 1$. Для замкнутых поверхностей принимаем обозначения их сегментов F_s и $\overline{F}$ соответственно. Пусть C_s и $\overline{C}$ — меридиальные сечения $y = 0$ соответственно поверхностей F_s и $\overline{F}$. Зададим кривые C_s и $\overline{C}$ в параметрической форме $x = x_s(\tau)$, $z = z_s(\tau)$ и $x = \overline{x}(\tau)$, $z = \overline{z}(\tau)$ соответственно. В качестве параметра τ примем угол между положительным направлением оси x и касательной к кривой с началом отсчета $\tau = 0$ в вершине O_s. Для $x \geqslant 0$ $\tau \in [0, \pi]$.

Покажем, что на интервале $0 < \tau \leqslant \pi/2$

$$\overline{x}(\tau) < x_s(\tau). \tag{8}$$

Спроектируем на плоскость $\alpha (z = 0)$ сегменты поверхностей F_s и $\overline{F}$, полученные вращением вокруг оси z частей кривых C_s и $\overline{C}$, соответствующих значениям параметра от 0 до $\tau \leqslant \pi/2$. Площади их проекций равны:

$$\pi[x_s(\tau)]^2 = \iint R^2 \cos\tau d\omega, \tag{9}$$

$$\pi[\overline{x}(\tau)]^2 = \iint \frac{\cos\tau}{\overline{K}} d\omega, \qquad (10)$$

где $d\omega$ — элемент площади сферического изображения поверхности, интегрирование распространяется на соответствующие сегменты сферических изображений. Сравнивая правые части равенств (9), (10) и учитывая при этом (7), убеждаемся в справедливости утверждения (8) для $0 < \tau \leqslant \pi/2$. Аналогично устанавливается его справедливость и для $\tau > \pi/2$.

Для радиусов кривизны $\overline{\rho}(\tau)$ и $\rho_s(\tau) \equiv R$ кривых $\overline{C}$ и C_s непосредственно из (7) следует, что при $\tau = 0$ имеет место неравенство

$$\overline{\rho}(\tau) < \rho_s(\tau),$$

которое будет справедливо и в некоторой окрестности точки $\tau = 0$, т. е. кривая $\overline{C}$ касается окружности C_s в вершине «изнутри» так, что некоторая окрестность точки $\tau = 0$ кривой $\overline{C}$ лежит в круге M_s, ограниченном окружностью C_s. Кривая $\overline{C}$ целиком не принадлежит кругу M_s и не касается окружности C_s при $\tau > 0$, поэтому при некотором значении параметра $\tau = \overline{\tau}^*$ кривая $\overline{C}$ пересечет окружность C_s так, что часть дуги $\tau < \overline{\tau}^*$ кривой $\overline{C}$ будет принадлежать кругу M_s. Обозначим через P^* точку этого пересечения, а через τ_s^* — значение параметра τ на C_s в точке P^*. Тогда для $\tau_s^* \leqslant \pi/2$ будем иметь $\overline{\tau}^* < \tau_s^*$, поэтому $x_s(\overline{\tau}^*) < x_s(\tau_s^*) = \overline{x}(\overline{\tau}^*)$, что противоречит неравенству (8). Итак, кривая $\overline{C}$ не может пересечь окружность C_s при $\tau_s^* \leqslant \pi/2$. Отсюда, в частности, следует, что при $H \leqslant r$ сферический сегмент F_s не может иметь общий край с сегментом поверхности $\overline{F}$, гауссова кривизна которой удовлетворяет ограничению (7); т. е. теорема доказана для случая $H \leqslant r$.

Далее рассмотрим случай $H > r$. Заметим, что при $\tau > \overline{\tau}^*$ кривая $\overline{C}$ более не будет иметь общих точек с кругом M_s, так как в противном случае она пересечет его границу в некоторой точке P^{**}. Пусть в этой точке значение параметра τ на $\overline{C}$ равно $\overline{\tau}^{**}$, а на C_s — τ_s^{**}. Тогда $\overline{\tau}^{**} > \tau_s^{**}$, поэтому $\overline{x}(\overline{\tau}^{**}) = x_s(\tau_s^{**}) > x_s(\overline{\tau}^{**})$, что противоречит неравенству (8). Т. е. поверхность $\overline{F}$ может пересечь сферу F_s только вдоль края ее сегмента $\tau = \tau_s^* > \pi/2$, поэтому $\overline{x}(\overline{\tau}^*) = x_s(\tau_s^*) = r$ и точка $P^* \in \partial\overline{F}$.

Покажем теперь, что $\overline{\tau}^* > \pi/2$. Действительно, пусть $\overline{\tau}^* \leqslant \pi/2$, а $\widetilde{F}_0$ — веретенообразная поверхность вращения, для которой: ось z — ось вращения, сечение $z = 0$ — экватор радиуса r, $1/R^2$ — гауссова кривизна, $x = \widetilde{x}_0(\tau)$ и $z = \widetilde{z}_0(\tau)$ — параметрическое задание ее сечения $\widetilde{C}_0$ плоскостью $y = 0$. Тогда ее диаметр

$$\widetilde{D}_0 = 2\int_0^{\pi/2} \sqrt{R^2 - r^2\sin^2\sigma}\, d\sigma < 2(R + \sqrt{R^2 - r^2}) = 2H. \qquad (11)$$

Сравним площади проекций на плоскость $z = 0$ поясов поверхностей $\overline{F}$ и $\widetilde{F}_0$, полученных при вращении частей сечений $\overline{C}$ и $\widetilde{C}_0$, соответствующих значениям параметра от τ до $\overline{\tau}^*$.

$$\pi(r^2 - \overline{x}^2(\tau)) = \int_\tau^{\overline{\tau}^*} \frac{\cos\tau}{\overline{K}} d\widetilde{\omega} < \int_\tau^{\overline{\tau}^*} R^2\cos\tau\, d\widetilde{\omega} < \int_\tau^{\pi/2} R^2\cos\tau\, d\widetilde{\omega} = \pi(r^2 - \widetilde{x}_0(\tau)), \qquad (12)$$

где $d\widetilde{\omega} = 2\pi\,\sin\tau d\tau$ — элемент площади пояса сферического изображения поверхности. Из (12) следует, что $\widetilde{x}_0(\tau) < \overline{x}(\tau)$, поэтому [4, с. 159] поверхность $\overline{F}$ лежит внутри поверхности $\widetilde{F}_0$. Но тогда, учитывая (11), заключаем, что высота сегмента $\tau \leqslant \overline{\tau}^*$ поверхности

$\overline{F}$ меньше H, что противоречит условию теоремы. Значит, вдоль края $\partial\overline{F}$ $\tau_s^* > \overline{\tau}^* > \pi/2$, т. е. сегмент $z \geqslant 0$ поверхности $\overline{F}$ — выпуклый колпак.

Обозначим через $\overline{R}$ радиус экватора поверхности $\overline{F}(\overline{R} = \overline{x}(\pi/2) < R)$, а через $\overline{F}^0$ — веретенообразную поверхность вращения с радиусом экватора $\overline{R}$, содержащую осесимметричный сегмент с радиусом основания r и с высотой H. Пусть $\overline{K}^0$ — гауссова кривизна поверхности $\overline{F}^0$. Тогда согласно условиям теоремы и ограничениям (6), (7) имеем $\overline{K}^0 \leqslant K^0 < \overline{K}$. Поэтому [4, § 25, п. VIII] поверхность $\overline{F}$ лежит внутри поверхности $\overline{F}^0$, следовательно, высота сегмента $z \geqslant 0$ поверхности $\overline{F}$ меньше H. Теорема 3 доказана.

Автор благодарит А. Д. Милку и А. И. Медяника за полезные обсуждения работы.

1. *Погорелов А. В.* Геометрическая теория устойчивости оболочек. – Москва: Наука, 1966. – 296 с.
2. *Бабенко В. И.* К геометрической теории потери устойчивости жестко закрепленных строго выпуклых оболочек при внешнем давлении // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1983. – № 7. – С. 46–49.
3. *Погорелов А. В.* Изгибания поверхностей и устойчивость оболочек. – Киев: Наук. думка, 1988. – 199 с.
4. *Бляшке В.* Круг и шар. – Москва: Наука, 1967. – 232 с.

Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 07.07.2008

V. I. Babenko

On the estimate of the Gauss curvature of strictly convex surfaces

The estimates for a minimum of the Gauss curvature on a strictly convex surface by its two parameters are obtained.