

УДК 534.7

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗВУКА В ГРУДНОЙ КЛЕТКЕ ЧЕЛОВЕКА. ЧАСТЬ 1. ТЕОРИЯ

И. В. ВОВК\*, Л. И. КОСОВЕЦ\*, В. Т. МАЦЫПУРА\*\*, В. Н. ОЛИЙНЫК\*

\*Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

\*\*Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко

Получено 19.04.2011

Предложены физическая и математическая модели грудной клетки человека, учитывающие наличие средостения, правого и левого легких, а также окружающей воздушной среды. На основе метода частичных областей решена соответствующая задача о распространении звука. При этом предполагалось, что источниками звука могут быть колебания трахеи и точечные источники в легких. Проведен численный анализ качества выполнения принятых граничных условий и условий сопряжения полей давлений и колебательных скоростей на границах частичных областей. Установлено, что в диапазоне частот от 100 до 1500 Гц для удовлетворительного выполнения условий сопряжения при численном решении соответствующих алгебраических систем достаточно удерживать от 130 до 520 неизвестных комплексных коэффициентов. Показано, что в этом случае погрешность выполнения закона сохранения энергии не превосходит  $3 \cdot 10^{-4} \%$ .

Запропоновані фізична й математична моделі грудної клітки людини, які враховують наявність середостіння, правої й лівої легень, а також оточуючого повітряного середовища. На основі методу часткових областей розв'язано відповідну задачу про поширення звуку. При цьому припускалося, що джерелами звуку можуть бути коливання трахеї й точкові джерела в легенях. Проведено чисельний аналіз якості виконання прийнятих граничних умов та умов спряження полів тиску й коливальної швидкості на межах часткових областей. Встановлено, що в діапазоні частот від 100 до 1500 Гц для задовільної якості виконання умов спряження при чисельному розв'язуванні відповідних алгебраїчних систем достатньо утримувати від 130 до 520 невідомих комплексних коефіцієнтів. Показано, що в цьому випадку похибка виконання закону збереження енергії не більша за  $3 \cdot 10^{-4} \%$ .

The physical and mathematical models of human thorax are proposed, with the allowance for mediastinum, left and right lungs and environmental air. The corresponding problem on sound propagation has been solved by the method of partial domains. In doing so, the sound sources were assumed to be generated by the tracheal oscillations and point sources in the lungs. The fulfillment quality for the boundary conditions and matching conditions for pressure and vibrational velocity fields has been numerically estimated on the interfaces of subdomains. It is found that for satisfactory meeting of matching conditions in frequency range 100 of 1500 Hz, it is sufficient to retain 130 to 520 unknown complex coefficients when solving the corresponding algebraic systems. The error of fulfillment of energy conservation law in this case is found to be  $\leq 3 \cdot 10^{-4} \%$ .

## ВВЕДЕНИЕ

Шумы и звуки, прослушиваемые врачами с помощью стетофонендоскопа на поверхности грудной клетки, продолжают оставаться одними из важнейших информационных составляющих при диагностике заболеваний легких. На основе многочисленных исследований сложилось мнение, что физическая причина возникновения шумов при акте дыхания связана с особенностями движения воздуха в бронхиальном дереве в норме и патологии (см. например [1–5] и обширную библиографию в них). Таким образом, звуки дыхания имеют аэродинамическую природу и обусловлены преобразованием энергии воздушного потока в звуковую энергию за счет взаимодействия потока со стенками дыхательных путей и различными препятствиями, например, в виде сгустков мокроты, образующихся на стенках при некоторых заболеваниях [6]. Генерируемый потоком шум проникает через расположенные в грудной клетке ор-

ганы и, в конечном итоге, достигает внешней поверхности грудной клетки, заставляя ее совершать колебания. Именно они и прослушиваются врачом с помощью стетофонендоскопа.

Необходимо отметить, что эффективность преобразования энергии потока в звуковую энергию шума весьма низка и, в лучшем случае, не превосходит одного-двух процентов [6]. Кроме того, затухание звука в паренхиме легких и бронхиальном дереве довольно значительно [7–10]. Именно в силу этих причин уровень колебаний поверхности грудной клетки, вызванных потоком воздуха в дыхательных путях, очень мал и в некоторых случаях плохо прослушивается через стетофонендоскоп. Поэтому в последние десятилетия интенсивно разрабатываются электронные стетофонендоскопы, способные регистрировать звуки дыхания эффективнее и в более широком диапазоне частот, чем при прослушивании с помощью традиционного механического стетофонендоскопа [4, 5]. Электронные стетофонендоскопы также обеспечивают

визуализацию респираторных сигналов в виде спектрограмм. Это дает возможность объективизировать исторически сложившиеся у медиков субъективные вербальные модели шумов дыхания и исключить влияние естественного разброса остроты слуха медиков на результаты классификации шумов дыхания [11, 12].

Однако создание эффективных электронных средств регистрации и классификации звуков дыхания в определенной мере связано с необходимостью выработки модели канала распространения их от источника до поверхности грудной клетки. Ее построение необходимо как для оценки фильтрующих свойств различных органов, через которые распространяется звук, так и для решения обратной задачи – по регистрируемым на поверхности грудной клетки сигналам определять координаты источника звука внутри нее [13]. Анализ литературных источников показывает, что в настоящее время указанная проблема весьма далека от своего решения. Причины этого очевидны – колоссальная сложность анатомического строения грудной клетки и недостаточное количество данных об акустических свойствах ее внутренних органов.

Остановимся на описанных в литературе моделях более подробно. В 1989 году в статье [7] предложена простейшая физическая система, состоящая из двух элементов – трубы, моделирующей трахею, и окружающего ее кольцевого слоя вязкой жидкости, моделирующего паренхиму легкого. Осесимметричные колебания стенок трубы возбуждали цилиндрические звуковые волны в кольцевом слое и колебания его внешней поверхности. Полагая, что внешний диаметр слоя существенно меньше длины звуковой волны в нем, авторы на основе теории электромеханических аналогий заменили исходную пространственную физическую систему эквивалентной электрической схемой с сосредоточенными параметрами. С использованием этой модели была получена расчетная оценка передаточной функции при прохождении сигнала от трахеи к внешней поверхности паренхимы. Показано, что коэффициент передачи имеет тенденцию снижаться с ростом частоты, что в общих чертах согласуется с экспериментальными данными.

В 1995 году опубликована статья [14], в которой модель грудной клетки была значительно усложнена. Она состояла из трахеи, кольцевого слоя паренхимы легкого, кольцевых мышечно-реберного и внешнего мышечно-жирового слоев. как и в [7], источником звука считались осесимметричные колебания стенок трахеи. Даже такой грубый учет топографии биологических тканей

грудной клетки позволил получить более реалистичные передаточные функции при прохождении сигнала от трахеи к поверхности тела. Кроме того, с помощью этой модели удалось оценить частотные зависимости механического импеданса поверхности грудной клетки, что позволило выработать технические требования к акустическим датчикам, регистрирующим ее колебания.

Наконец, в 2001 году появилась работа [15], в которой сделана попытка определить координаты источника сигнала внутри грудной клетки по регистрируемым на ее поверхности сигналам. Были разработаны специальная многоэлементная акустическая (фазированная) антенная решетка из  $Q$  микрофонов и компьютерный алгоритм для обработки получаемых с них сигналов. Тестовые эксперименты при  $Q=16$  проводились на простейшем макете грудной клетки, состоящем из трех элементов – “трахеи” в виде резиновой трубки и “паренхимы” в виде цилиндра из вспененного желатина, охваченного тонким слоем обычного желатина, на котором располагались микрофоны. После тестирования, по аналогичной методике проводились эксперименты на реальных пациентах, имеющих проблемы с легкими.

Авторы обсуждаемой публикации утверждают, что разработанная методика оправдала их ожидания и ее, в принципе, можно использовать для диагностики заболеваний легких. Однако с этим выводом трудно согласиться. Дело в том, что, как уже отмечалось выше, в грудной клетке находятся не только легкие, но и ряд других органов. Все они сильно отличаются друг от друга не только по конфигурации, объему и месту расположения в грудной клетке, но и по плотности, скорости распространения в них звука и величине его затухания. Более того, даже беглый взгляд на картинки анатомического атласа [16] убеждает, что грудная клетка, в отличие от моделей [14, 15] не является в геометрическом смысле осесимметричным объектом. Кроме того, легкие здесь моделировались цилиндром, акустические свойства которого не зависят от азимутального направления распространения звука к поверхности. Поэтому, если внутри макета имеется некоторый источник звука и мы с помощью антенной решетки, размещенной на его внешней поверхности, хотим определить его координаты, то такая задача становится тривиальной, ибо величина задержки сигнала при его прохождении от источника до  $q$ -го микрофона будет пропорциональна расстоянию между ними. Очевидно, что в грудной клетке пациента такая зависимость сохраняться не будет и прямое перенесение на нее указанной методики не вполне корректно.

## 1. ФИЗИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛИ ГРУДНОЙ КЛЕТКИ

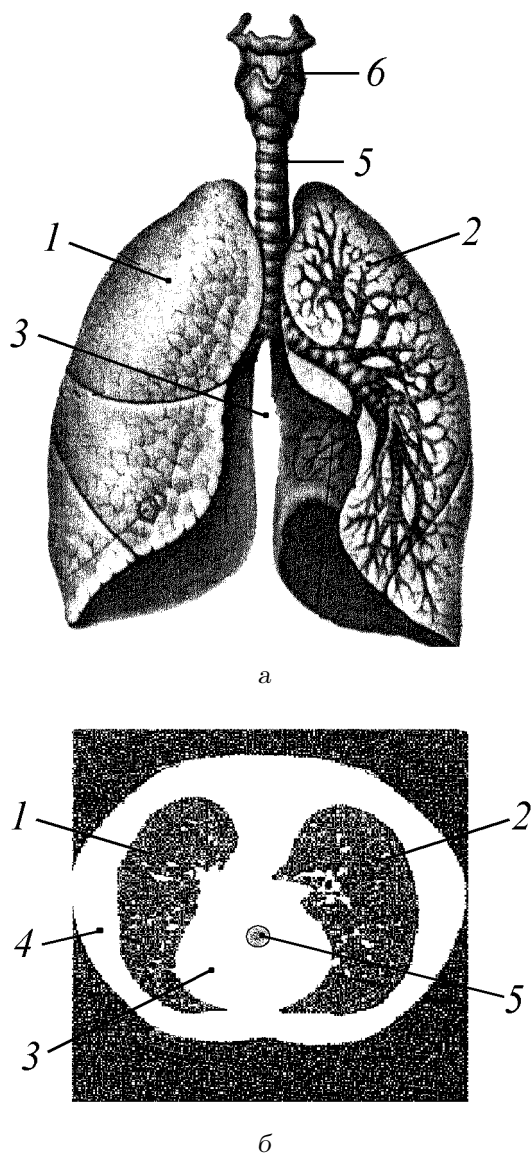


Рис. 1. Легкие и дыхательные пути:  
 а – вид во фронтальной плоскости (эскиз),  
 б – горизонтальное сечение грудной клетки примерно на уровне 8-го позвонка (компьютерная томография);  
 1 – правое легкое, 2 – левое легкое,  
 3 – средостение, 4 – реберно-мышечный и жировой слой,  
 5 – трахея (на оригинальном томографическом изображении не видна) 6 – гортань

Учитывая сказанное, цель данной работы состоит построении более реалистичной физической модели грудной клетки человека, формулировании эквивалентной ей математической модели и решении задачи о распространении звука в грудной клетке человека.

За основу возьмем физическую модель, разработанную в публикации [14]. При этом внесем в нее ряд существенных корректив, суть которых изложим ниже. Для начала отметим некоторые важные особенности анатомического строения легких. На рис. 1, а изображен общий вид легких и дыхательных путей (гортань, трахея, главные бронхи и остальная часть бронхиального дерева) [16]. На рис. 1, б представлено томографическое изображение сечения легких примерно на уровне восьмого позвонка [17]. Как известно, легкие являются парным органом, т. е. делятся на левое и правое, причем их пространственная форма исключительно сложна. Однако если рассматривать только горизонтальное срединное сечение (см. рис. 1б), то в первом приближении каждое из легких выглядит как сектор цилиндрического слоя. Далее, внутри между легкими существует область (имеющая приблизительно цилиндрическую форму), называемая средостением. В ней находится целый комплекс органов, включая многочисленные кровеносные сосуды, лимфатические узлы, стволы нервов и т. д. Примерно в середине средостения располагается трахея, от которой ответвляются главные бронхи.

Таким образом, колебания стенок трахеи, вызванные потоком воздуха в трахее при акте дыхания [3, 4, 6, 7, 14], вызывают появление звуковых волн, прежде всего, в средостении. Затем они проникают в легкие и в зоны, расположенные между ними со стороны спины и груди. Наконец, пройдя через реберно-мышечный слой и жировой слой, эти звуки достигают поверхности кожи грудной клетки, вызывая ее колебания.

Результаты такого краткого анатомического анализа дают основание считать, что для получения более реалистичной картины процесса распространения звука в грудной клетке разработанную в [14] модель необходимо усложнить за счет дополнительного введения области средостения и еще четырех областей, занимаемых правым и левым легкими, а также зонами, расположенными между ними во фронтальном и дорсальном направлениях (рис. 2).

Остановимся на особенностях предлагаемой физической модели более подробно. Как и в работе [14], данная модель двумерна, т. е. ее свойства определяются в двумерной полярной системе координат  $(r, \psi)$ . Моделируемая область имеет форму круга, причем главный источник звука – колеблющиеся стенки трахеи, на внеш-

ней поверхности которой (при  $r=r_0$ ) создается звуковое давление  $p_0$ . Область I, ограниченная координатами  $r_0 \leq r \leq r_1$ ,  $0 \leq \psi \leq 2\pi$ , моделирует средостение. Сегменты цилиндрических слоев II и IV, ограниченные координатами  $r_1 \leq r \leq r_2$ ,  $2\pi - \psi_0 \leq \psi \leq \psi_0$  и  $r_1 \leq r \leq r_2$ ,  $\pi - \psi_0 \leq \psi \leq \pi + \psi_0$  соответственно, моделируют левое и правое легкие. Сегменты цилиндрических слоев III и V, ограниченные координатами  $r_1 \leq r \leq r_2$ ,  $\psi_0 \leq \psi \leq \pi - \psi_0$  и  $r_1 \leq r \leq r_2$ ,  $\pi + \psi_0 \leq \psi \leq 2\pi - \psi_0$  соответственно, моделируют межлегочные зоны. Кольцевая цилиндрическая область VI, ограниченная координатами  $r_2 \leq r \leq r_6$ ,  $0 \leq \psi \leq 2\pi$ , моделирует реберно-мышечный слой, а область VII, ограниченная координатами  $r_6 \leq r \leq r_7$ ,  $0 \leq \psi \leq 2\pi$ , – жировой слой и кожную поверхность грудной клетки. Помимо этого, мы ввели в модель внешнюю область VIII с координатами  $r \geq r_7$ ,  $0 \leq \psi \leq 2\pi$ , моделирующую окружающее грудную клетку воздушное пространство.

Следует сказать, что колебания стенок трахей – не единственный источник шумов, прослушиваемых на поверхности грудной клетки. При определенных заболеваниях легких и бронхиального дерева могут возникать так называемые сухие и влажные хрипы [18]. В общем случае, причина их появления связана с набуханием отдельных бронхов и бронхиол и выделением вязкой мокроты, которая частично или полностью перекрывает прохождение по ним воздуха при акте дыхания. При этом могут возникать свисты и шелчки различного характера. Такие источники звука носят преимущественно локальный характер и их можно рассматривать как точечные. Поэтому, чтобы иметь возможность исследовать распространение в грудной клетке звука, возникающего от такого типа источников, мы ввели в областях, моделирующих легкие, точечные источники  $p_2^{(1)}, p_2^{(2)}, \dots, p_2^{(i)}$  (область II) и  $p_4^{(1)}, p_4^{(2)}, \dots, p_4^{(i)}$  (область IV). Здесь  $i$  – номер источника (см. рис. 2). Разумеется, при наличии таких источников необходимо задавать координаты их расположения.

Будем полагать, что каждая из пространственных областей I–VIII принятой физической модели заполнена акустической средой с плотностью  $\rho_m$  и скоростью распространения звука  $c_m = \bar{c}_m(1 - i\mu_m)$ , где  $\mu_m$  – коэффициент затухания;  $m$  – номер области.

Остается последний открытый вопрос: какими акустическими свойствами наделить границы, разделяющие области легких II и IV и межлегочные области III и V, т. е. поверхности  $r_1 \leq r \leq r_2$  при  $\psi = \psi_0, \pi - \psi_0, \pi + \psi_0, 2\pi - \psi_0$ ? Ответ может

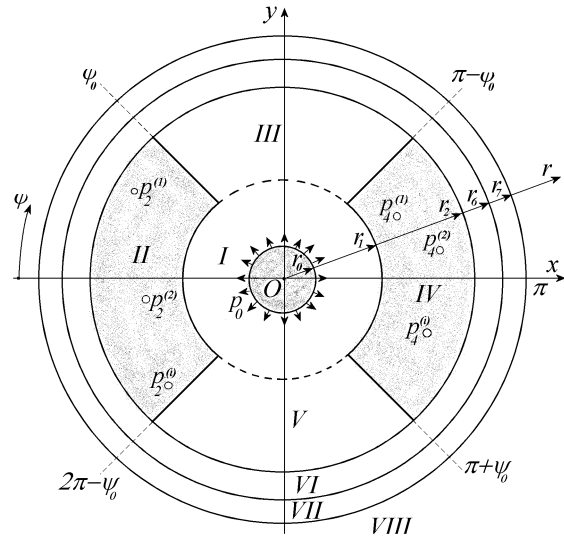


Рис. 2. Геометрия модели грудной клетки

оказаться простым, если вспомнить, что волновое сопротивление паренхимы легких намного меньше волнового сопротивления мышечной и жировой тканей, а также органов, заполненных кровью и лимфой. Действительно, по данным работ [7, 14] среднее волновое сопротивление паренхимы легких составляет около  $10^4$  кг/(м<sup>2</sup>с), а для остальных биотканей его уровень составляет  $1.5 \cdot 10^6$  кг/(м<sup>2</sup>с) и более. Таким образом, волновое сопротивление легочной ткани на два порядка ниже, чем для остальных. Эта оценка дает основание считать, что со стороны легочных областей указанные границы вполне допустимо считать акустически жесткими, а со стороны межлегочных областей – акустически мягкими.

Наделив всеми необходимыми свойствами физическую модель грудной клетки, можно перейти к ее эквивалентной математической формулировке и решению. Итак, мы имеем плоскую задачу излучения звука в цилиндрической системе координат. Будем полагать все источники гармоническими с частотой  $\omega$ . Полная область существования звукового поля разбита на ряд граничащих между собой подобластей, каждая из которых заполнена акустической средой с известными значениями плотности, скорости звука и его затухания в среде. Заданы координаты гармонических источников звука и характер распределения звукового поля на их поверхности. Требуется определить поле давлений и колебательных скоростей в каждой из подобластей на заданных частотах. Очевидно, что мы пришли к классической многосвя-

зной задаче излучения звука, в которой необходимо отыскать решение уравнения Гельмгольца в цилиндрической системе координат при следующих граничных условиях.

На поверхности трахеи

$$p_I = p_0, \quad r = r_0, \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi, \quad (1)$$

где  $p_0$  – амплитуда давления источника звука на поверхности, моделирующей трахею;  $p_I$  – поле давления в области I. Временной множитель  $\exp(-i\omega t)$  здесь и ниже опускаем.

Как уже отмечалось, с внутренних сторон легочных областей II и IV запишем граничное условие для акустически жестких поверхностей:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{II}}{\partial \psi} = 0, \quad r_1 \leq r \leq r_2, \quad \psi = \psi_0, \quad 2\pi - \psi_0; \\ \frac{\partial p_{IV}}{\partial \psi} = 0, \quad r_1 \leq r \leq r_2, \quad \psi = \pi - \psi_0, \quad \pi + \psi_0, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $p_{II}$  и  $p_{IV}$  – давление в областях II и IV.

В то же время, со стороны межлегочных областей III и V навяжем граничное условие для акустически мягких поверхностей:

$$\begin{aligned} p_{III} = 0, \quad r_1 \leq r \leq r_2, \quad \psi = \pi + \psi_0, \quad 2\pi - \psi_0; \\ p_V = 0, \quad r_1 \leq r \leq r_2, \quad \psi = \psi_0, \quad \pi - \psi_0, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $p_{III}$  и  $p_V$  – давление в областях III и V. Что касается точечных источников в легочных областях, то способ их введения мы укажем ниже.

## 2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Сформулированную граничную задачу будем решать методом частичных областей [19, 20]. Изначально предположим, что задача симметрична относительно оси  $Ox$  (рис. 2), т. е. достаточно рассматривать только область  $y \geq 0$ , где угловая координата изменяется в пределах  $0 \leq \psi \leq \pi$ . С одной стороны, такое допущение фактически не ограничивает общности рассмотрения исследуемой проблемы, а с другой – существенно облегчает построение вычислительного алгоритма.

В каждой из частичных областей звуковое поле представим в виде суперпозиции известных частных решений уравнения Гельмгольца для нее. Поле давления в области I запишем в виде [19, 20]

$$\begin{aligned} p_I = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(1)} \frac{J_n(k_1 r)}{J'_n(k_1 r_1)} \cos(n\psi) + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(1)} \frac{Y_n(k_1 r)}{Y'_n(k_1 r_0)} \cos(n\psi), \end{aligned} \quad (4)$$

где волновое число  $k_1 = \omega/c_1$ ;  $J_n(k_1 r)$  и  $Y_n(k_1 r)$  – функции Бесселя и Неймана соответственно. Благодаря наличию в формуле (4) двух последовательностей произвольных величин  $A_n^{(1)}$  и  $B_n^{(1)}$ , имеется возможность удовлетворить необходимые условия на граничных поверхностях области I – окружностях с радиусами  $r_0$  и  $r_1$ .

В области II возможно присутствие точечных источников. Сама же область представляет собой внешность жесткого клина, образованного лучами  $\psi = 0$  и  $\psi = \psi_0$ . Поле давления точечного источника в области II определим через функцию Грина для клина с жесткими границами [20]:

$$\begin{aligned} G_j^{(2)}(r, \psi, r_j, \psi_j) = p_2^{(j)} \frac{\pi i}{2\psi_0} \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n J_{\alpha_n}(k_2 r_<) H_{\alpha_n}^{(1)}(k_2 r_>) \times \\ \times \cos(\alpha_n \psi) \cos(\alpha_n \psi_j). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $k_2 = \omega/c_2$  – волновое число;  $r$  и  $\psi$  – координаты произвольной точки в области II;  $r_j$  и  $\psi_j$  – координаты источника, которому приписан номер  $j$ ;  $\varepsilon_0 = 1$ ,  $\varepsilon_n = 2$  при  $n > 0$ ,  $H_{\alpha_n}^{(1)}(k_2 r_>)$  – функция Ханкеля первого рода. Величины  $r_<$  и  $r_>$  определяют меньшее и большее из расстояний  $r$  и  $r_j$  соответственно. Числа  $\alpha_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  находятся из граничных условий на плоских поверхностях области II. Поскольку последние полагаются акустически жесткими, то  $\alpha_n = n\pi/\psi_0$ .

Тогда поле в области II можно представить как

$$\begin{aligned} p_{II} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(2)} \frac{J_{\alpha_n}(k_2 r)}{J'_{\alpha_n}(k_2 r_2)} \cos(\alpha_n \psi) + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(2)} \frac{Y_{\alpha_n}(k_2 r)}{Y'_{\alpha_n}(k_2 r_1)} \cos(\alpha_n \psi) + \\ + \sum_{j=1}^{J_2} G_j^{(2)}(r, \psi, r_j, \psi_j), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $J_2$  – количество точечных источников в области II ( $y \geq 0$ ).

Поле в области III будет

$$\begin{aligned} p_{III} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(3)} \frac{J_{\beta_n}(k_1 r)}{J'_{\beta_n}(k_1 r_2)} \sin(\beta_n(\psi - \psi_0)) + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(3)} \frac{Y_{\beta_n}(k_1 r)}{Y'_{\beta_n}(k_1 r_1)} \sin(\beta_n(\psi - \psi_0)). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь числа  $\beta_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  определяются из граничных условий на плоских поверхностях области

III. В области III они полагаются акустически мягкими, так что  $\beta_n = (n+1)\pi/(\pi-2\psi_0)$ .

В области IV также возможно присутствие точечных источников. По аналогии с формулой (6), поле здесь зададим в форме

$$p_{IV} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(4)} \frac{J_{\alpha_n}(k_4 r)}{J'_{\alpha_n}(k_4 r_2)} \cos(\alpha_n(\psi - \pi)) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(4)} \frac{Y_{\alpha_n}(k_4 r)}{Y'_{\alpha_n}(k_4 r_1)} \cos(\alpha_n(\psi - \pi)) + \sum_{j=1}^{J_4} G_j^{(4)}(r, \psi, r_j, \psi_j), \quad (8)$$

где волновое число  $k_4 = \omega/c_4$ , а  $J_4$  – количество точечных источников в области IV ( $y \geq 0$ ). Функция Грина точечного источника в области IV будет

$$G_j^{(4)}(r, \psi, r_j, \psi_j) = p_4^{(i)} \frac{\pi i}{2\psi_0} \times \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n J_{\alpha_n}(k_2 r_{<}) H_{\alpha_n}^{(1)}(k_2 r_{>}) \times \cos(\alpha_n(\psi - \pi)) \cos(\alpha_n(\psi_j - \pi)). \quad (9)$$

Поля в областях VI и VII записываются в виде, аналогичном формуле (4):

$$p_{VI} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(6)} \frac{J_n(k_6 r)}{J'_n(k_6 r_6)} \cos(n\psi) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(6)} \frac{Y_n(k_6 r)}{Y'_n(k_6 r_2)} \cos(n\psi), \quad (10)$$

$$p_{VII} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(7)} \frac{J_n(k_7 r)}{J'_n(k_7 r_7)} \cos(n\psi) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(7)} \frac{Y_n(k_7 r)}{Y'_n(k_7 r_6)} \cos(n\psi), \quad (11)$$

где  $k_6 = \omega/c_6$ ,  $k_7 = \omega/c_7$ .

Поле в области VIII – внешности цилиндрической поверхности радиуса  $r_7$  – представляется в виде суперпозиции цилиндрических волн:

$$p_{VIII} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(8)} \frac{H_n^{(1)}(k_8 r)}{H_n^{(1)'}(k_8 r_7)} \cos(n\psi), \quad (12)$$

где  $k_8 = \omega/c_8$ .

Сформируем систему функциональных уравнений, определяющую условия непрерывности звукового поля на границах раздела областей I, II, III, IV, VI, VII и VIII:

$$p_I = p_0, \quad r = r_0, \quad \psi = [0, 2\pi]; \quad (13)$$

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_{VI}}{\partial r} = \begin{cases} \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_{II}}{\partial r}, & r = r_1, \quad \psi = [0, \psi_0], \\ \frac{1}{\rho_3} \frac{\partial p_{III}}{\partial r}, & r = r_1, \quad \psi = [\psi_0, \pi - \psi_0], \\ \frac{1}{\rho_4} \frac{\partial p_{IV}}{\partial r}, & r = r_1, \quad \psi = [\pi - \psi_0, \pi]; \end{cases} \quad (14)$$

$$p_I = p_{II}, \quad r = r_1, \quad \psi = [0, \psi_0]; \quad (15)$$

$$p_I = p_{III}, \quad r = r_1, \quad \psi = [\psi_0, \pi - \psi_0]; \quad (16)$$

$$p_I = p_{IV}, \quad r = r_1, \quad \psi = [\pi - \psi_0, \pi]; \quad (17)$$

$$\frac{1}{\rho_6} \frac{\partial p_{VI}}{\partial r} = \begin{cases} \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_{II}}{\partial r}, & r = r_2, \quad \psi = [0, \psi_0], \\ \frac{1}{\rho_3} \frac{\partial p_{III}}{\partial r}, & r = r_2, \quad \psi = [\psi_0, \pi - \psi_0], \\ \frac{1}{\rho_4} \frac{\partial p_{IV}}{\partial r}, & r = r_2, \quad \psi = [\pi - \psi_0, \pi]; \end{cases} \quad (18)$$

$$p_{VI} = p_{II}, \quad r = r_2, \quad \psi = [0, \psi_0]; \quad (19)$$

$$p_{VI} = p_{III}, \quad r = r_2, \quad \psi = [\pi - \psi_0, \pi]; \quad (20)$$

$$p_{VI} = p_{IV}, \quad r = r_2, \quad \psi = [\pi - \psi_0, \pi]; \quad (21)$$

$$\frac{1}{\rho_7} \frac{\partial p_{VII}}{\partial r} = \frac{1}{\rho_6} \frac{\partial p_{VI}}{\partial r}, \quad r = r_6, \quad \psi = [0, \pi]; \quad (22)$$

$$p_{VII} = p_{VI}, \quad r = r_6, \quad \psi = [0, \pi]; \quad (23)$$

$$\frac{1}{\rho_8} \frac{\partial p_{VIII}}{\partial r} = \frac{1}{\rho_7} \frac{\partial p_{VII}}{\partial r}, \quad r = r_7, \quad \psi = [0, \pi]; \quad (24)$$

$$p_{VIII} = p_{VII}, \quad r = r_7, \quad \psi = [0, \pi]. \quad (25)$$

После подстановки выражений (4)–(12) в систему (13)–(25), проведем стандартную процедуру алгебраизации полученных функциональных уравнений. Это приводит к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений второго рода относительно неизвестных коэффициентов  $A_n^{(j)}$ ,  $j=1, \dots, 8$ ;  $B_n^{(i)}$ ,  $i=1, \dots, 7$ ;  $n=0, 1, 2, \dots, \infty$ .

Согласно геометрии задачи (см. рис. 2), в построенной модели присутствуют угловые точки на окружностях радиуса  $r=r_1$  и  $r=r_2$  с угловыми координатами  $\psi=\psi_0$ ,  $\pi-\psi_0$ ,  $\pi+\psi_0$ ,  $2\pi-\psi_0$ . Как хорошо известно, при приближении к этим точкам колебательная скорость будет неограниченно возрастать [19, 20]. Однако этот эффект носит исключительно локальный характер и не может повлиять на результаты расчета полей, если основной интерес представляют их характеристики вдали от угловых точек. В таком случае, как показывают многочисленные исследования (см., например, [19]), приемлемую точность численных результатов можно обеспечить с помощью метода простой редукции, удерживая в системе достаточное конечное количество неизвестных.

### 3. АНАЛИЗ КАЧЕСТВА ВЫПОЛНЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ И УСЛОВИЙ СОПРЯЖЕНИЯ

Как известно, при решении задач такого класса методом частичных областей количество удерживаемых неизвестных в полученных системах алгебраических уравнений определяется опытным путем при анализе точности выполнения закона сохранения энергии, а также качества выполнения граничных условий и условий сопряжения на границах раздела частичных областей [19, 20]. При этом большое значение имеют также частоты, для которых получают расчетные данные. В нашем случае наибольший интерес представляет диапазон частот примерно от 100 до 1500 Гц, так как именно в нем проявляются основные диагностические признаки звуков дыхания, характеризующие состояние респираторной системы человека в норме и патологии [4, 5, 7].

Что касается граничных условий (1)–(3), то они выполняются точно за счет возможности получения непосредственной связи между коэффициентами  $A_n^{(1)}$  и  $B_n^{(1)}$  в соотношении (4) и соответствующего выбора величин  $\alpha_n$  и  $\beta_n$  в соотношениях (6) и (7). Что касается качества выполнения условий сопряжения (14)–(25), то, как показали численные эксперименты, приемлемых результатов можно добиться, если на низких частотах в соответ-

ствующей алгебраической системе удерживать не менее 130, а на высоких – не менее 520 неизвестных.

В качестве примера на рис. 3 и 4 представлены результаты расчета полей на границах между смежными частичными областями I–VII, которые позволяют наглядно оценить качество выполнения условий сопряжения (14)–(25). Расчеты проводились на частоте 1000 Гц при  $\psi_0=50^\circ$  и  $p_0=100$  Па. Количество удерживаемых неизвестных комплексных коэффициентов, при решении соответствующей алгебраической системы уравнений, составляло 520. Физические размеры и параметры биотканей в каждой из областей брались такими же, как и в работе [14]. Так, линейные размеры составляли  $r_0=0.01$ ,  $r_1=0.07$ ,  $r_2=0.14$ ,  $r_6=0.15$ ,  $r_7=0.16$  (все значения – в м); плотности  $\rho_1=1000$ ,  $\rho_2=\rho_4=300$ ,  $\rho_3=\rho_5=\rho_7=1000$ ,  $\rho_6=2000$  и  $\rho_8=1.22$  (все значения – в кг/м<sup>3</sup>); скорости звука  $c_1=1500(1-0.2i)$ ,  $c_2=c_4=30(1-0.25i)$ ,  $c_3=c_5=c_7=1500(1-0.2i)$ ,  $c_6=2500(1-0.3i)$  и  $c_8=340$  (все значения – в м/с). Комплексный характер величины скорости звука моделирует поглощение звука в биотканях человека. Кроме того, на этапе тестирования предполагалось, что точечные источники в областях II и IV отсутствуют.

Для начала обратимся к рис. 3, на котором представлены модули и фазы давлений на тех окружностях, где стыкуются частичные области I–VIII. Как видно из этих данных, качество выполнения условий сопряжения по давлению достаточно хорошее – модули и фазы соответствующих давлений совпадают с графической точностью.

Теперь посмотрим, как на этих же границах выполняются условия сопряжения по колебательной скорости. Как и ожидалось, здесь на окружностях  $r=r_1$  и  $r=r_2$  (см. рис. 4, а, б) качество сопряжения несколько хуже. Причины этого очевидны. Во-первых, представленные колебательные скорости – по сути, производные от давлений по координате  $r$ , имеющие меньшую гладкость по сравнению с самой функцией. Во-вторых, поверхности  $r_1 \leq r \leq r_2$ ,  $\psi=\psi_0$  и  $\psi=\pi-\psi_0$  были наделены специфическими свойствами: с одной стороны – они акустически мягкие, а с другой – акустически жесткие. Такая смена свойств автоматически приводит к тому, что на концах этих зон (в точках  $r=r_1$ ,  $r=r_2$  при  $\psi=\psi_0$  и  $\psi=\pi-\psi_0$ ) возникают особенности (сингулярности) – колебательные скорости неограниченно возрастают [19, 20]. При решении урезанной системы алгебраических уравнений это проявляется в наличии резких пиковых “выбросов” колебательной скорости коне-

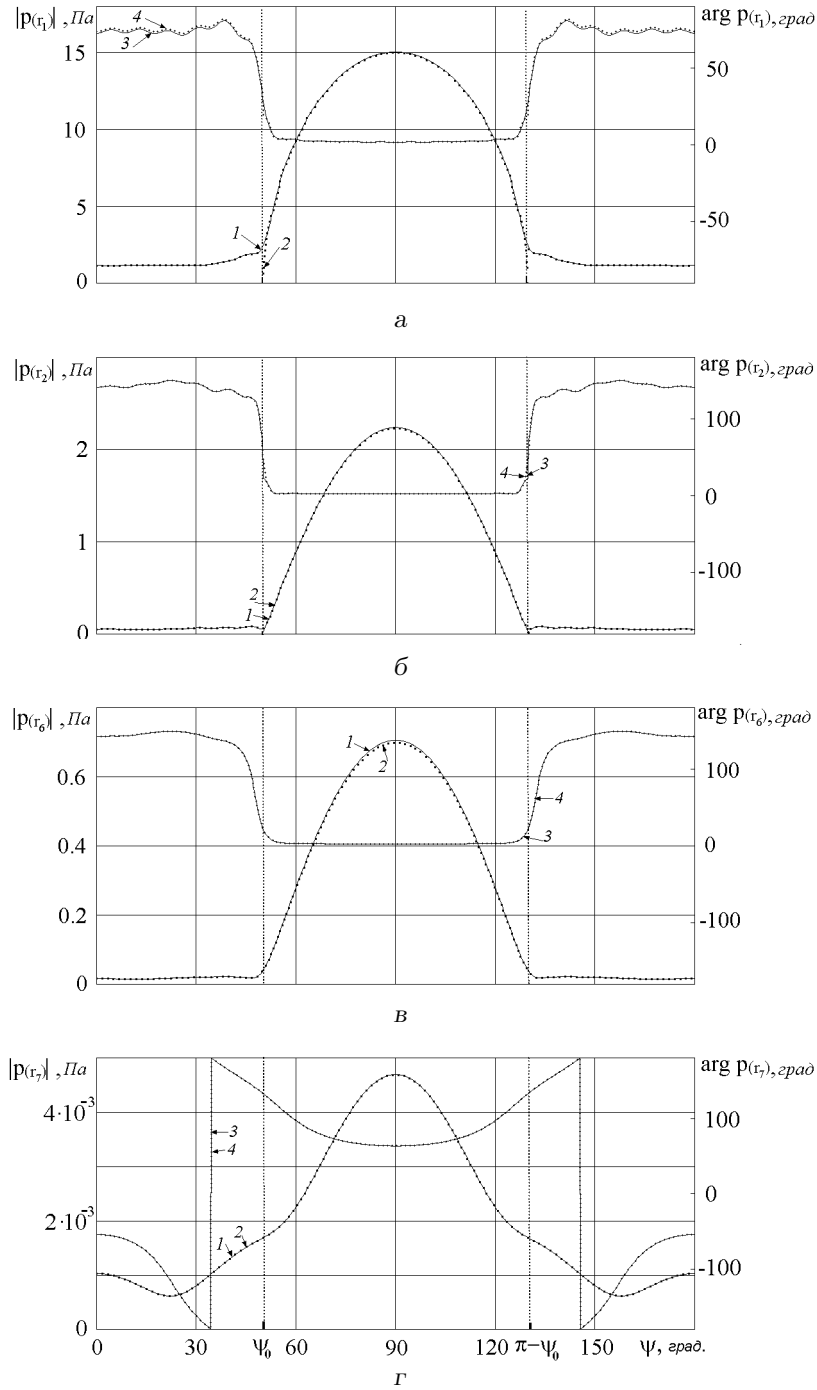


Рис. 3. Уровни давлений на окружных срезах:

- а -  $r=r_1$ , б -  $r=r_2$ , в -  $r=r_6$ , г -  $r=r_7$ ;
- 1, 2 - модули давлений, 3, 4 - фазы давлений;
- 1, 3 - значения с внутренних сторон окружностей,
- 2, 4 - значения с внешних сторон окружностей

чного уровня при подходе к  $\psi=\psi_0$  и  $\psi=\pi-\psi_0$ , см. рис. 4, а, б. Повторим, что этот эффект имеет исключительно локальный (точечный) характер, а в остальных точках (т. е. вдали от  $\psi=\psi_0$  и

$\psi=\pi-\psi_0$ ) качество выполнения условий сопряжения по скорости вполне удовлетворительно. Замечательно, что очень хорошо выполняются условия сопряжения при всех без исключения  $\psi$  на окру-



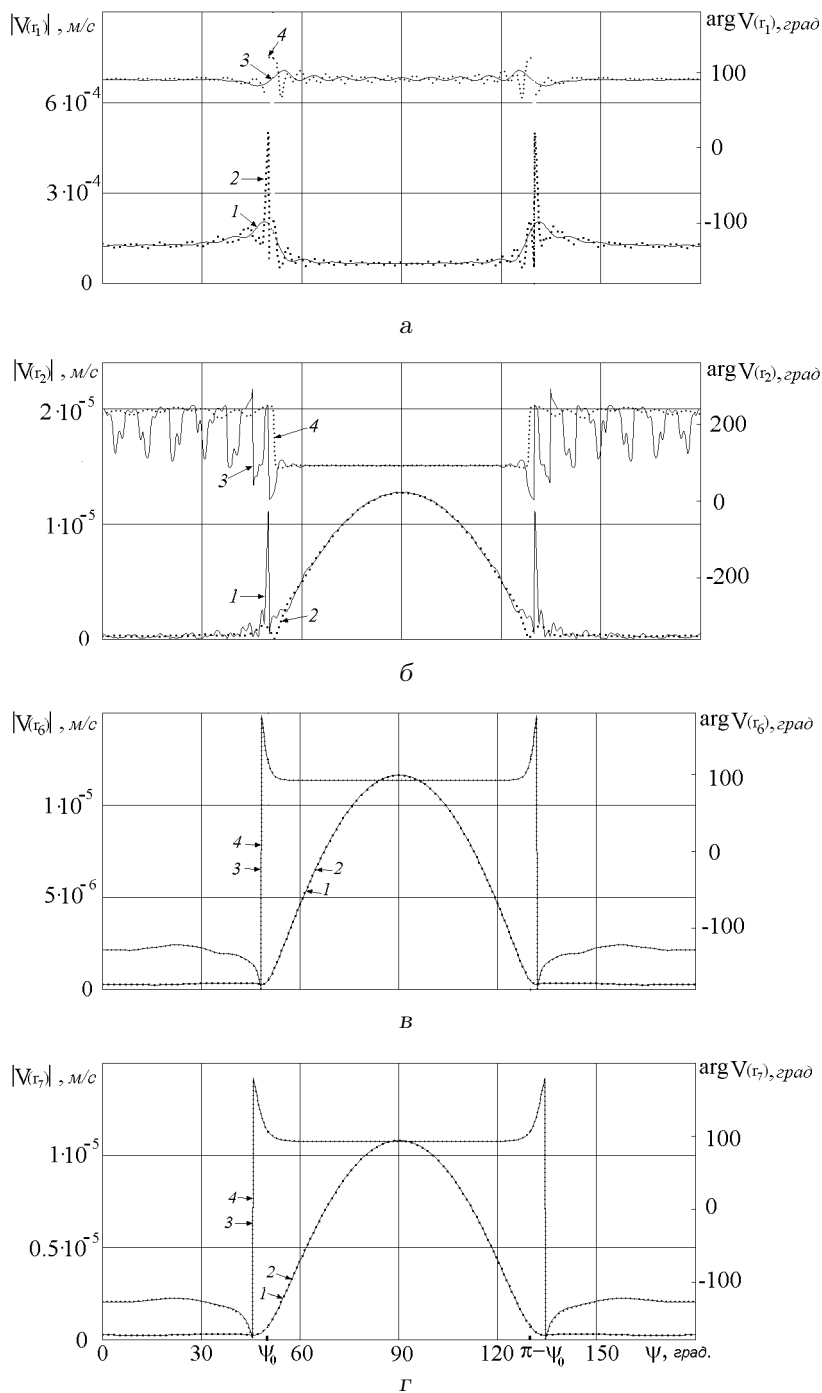


Рис. 4. Уровни скоростей на окружных срезах:  
 а -  $r=r_1$ , б -  $r=r_2$ , в -  $r=r_6$ , г -  $r=r_7$ ;  
 1, 2 - модули скоростей, 3, 4 - фазы скоростей;  
 1, 3 - значения с внутренних сторон окружностей,  
 2, 4 - значения с внешних сторон окружностей

жностях  $r=r_6$  и  $r=r_7$  (см. рис. 4, в, г). Здесь никаких эффектов, связанных с сингулярностью, не наблюдается. Заметим, что окружность  $r=r_7$  как раз и моделирует поверхность грудной клетки, т. е.

именно здесь и регистрируются шумы легких.

Подтверждением того, что наличие особых точек и поверхностей не оказывают существенного влияния на общее распределение полей давлений

и скоростей в разработанной модели, может служить также качество выполнения закона сохранения энергии. Численная проверка показала, что мощность заданного источника звука на окружности  $r=r_0$  отличается от мощности звуковой волны, достигшей окружности  $r=r_7$ , всего лишь на  $3 \cdot 10^{-4} \%$ .

В заключение укажем, что развернутый анализ акустических свойств, предложенной модели грудной клетки человека будет представлен в последующих публикациях.

## ВЫВОДЫ

1. Предложены физическая и математическая модели грудной клетки человека, учитывающие наличие средостения, двух легких, а также воздушной среды, окружающей грудную клетку.
2. На основе метода частичных областей решена задача о распространении звука в предложенной области существования акустического поля. При этом предполагалось, что источниками звука могут быть колебания трахеи и точечные источники в легких.
3. Проведен численный анализ качества выполнения принятых граничных условий и условий сопряжения полей давлений и колебательных скоростей на границах частичных областей. Установлено, что в диапазоне частот от 100 до 1500 Гц для приемлемого выполнения условий сопряжения при численном решении соответствующих алгебраических систем уравнений достаточно удерживать от 130 до 520 неизвестных комплексных коэффициентов. Показано, что в этом случае погрешность выполнения закона сохранения энергии составляет не более  $3 \cdot 10^{-4} \%$ .

1. Большая Медицинская Энциклопедия: том 2.– М.: Сов. Энцикл, 1975.– С. 532–534.
2. Martini P., Meuller H. Studien Über das bronchialastmen // Dtsh. Arch. F. Klin. Med.– 1923.– 143.– S. 159–172.

3. Pasterkamp H., Sanchez I. Tracheal sounds in upper airway obstruction // Chest.– 1992.– 102.– P. 963–965.
4. Gavriely N. Breath sounds methodology.– London/Tokyo: CRC Press, 1995.– 203 p.
5. Вовк И. В., Гринченко В. Т., Красный Л. Г., Макаренков А. П. Проблемы регистрации и классификации шумов дыхания человека // Акуст. ж.– 1994.– 40, № 1.– С. 50–56.
6. Вовк И. В., Гринченко В. Т. Звук, рожденный потоком.– К.: Наук. думка, 2010.– 221 с.
7. Wodicka G. R., Stevens K. N., Golub H. L., Cravalho E. G., Shannon D. C. A model of acoustic transmission in the respiratory system // IEEE Trans. Biomed. Eng.– 1989.– 36, N 9.– P. 925–933.
8. Вовк И. В., Вовк О. И. Распространение звука в бронхиальном дереве человека. Часть I. Теория // Акуст. вісн.– 2000.– 3, № 2.– С. 19–32.
9. Басовский В. Г. Вовк И. В., Вовк О. И. Распространение звука в бронхиальном дереве человека. Часть II. Анализ численных результатов // Акуст. вісн.– 2000.– 3, № 4.– С. 11–20.
10. Олийнык В. Н. О механизмах формирования акустических свойств легочной паренхимы // Акуст. вісн.– 2001.– 4, N 3.– С. 53–66.
11. Pasterkamp H., Carson C., Daien D., Oh Y. Digital respirosonography. New images of lung sounds // Chest.– 1989.– 96, № 6.– P. 1405–1412.
12. Вовк И. В., Гринченко В. Т., Дахнов С. Л., Крижановский В. В., Олийнык В. Н. Шумы дыхания человека: объективизация аускультативных признаков // Акуст. вісн.– 1999.– 2, № 3.– С. 11–32.
13. Крижановский В. В., Крижановский В. В. (мл.) Оценка эффективности обнаружения неоднородности стенки конечного кусочно-однородного цилиндра // Акуст. вісн.– 2005.– 8, № 1-2.– С. 69–84.
14. Вовк И. В., Гринченко В. Т., Олейник В. Н. Проблемы моделирования акустических свойств грудной клетки и измерения шумов дыхания // Акуст. ж.– 1995.– 41, № 5.– С. 758–768.
15. Kompis M., Pasterkamp H., Wodicka G. Acoustic imaging of the human chest // Chest.– 2001.– 120.– P. 1309–1321.
16. Сапин М. Р., Билич Г. Л. Анатомия человека.– М.: Высшая школа, 1989.– 544 с.
17. Wei Q., Hu Ya., Gelfand G., MacGregor J. H. Segmentation of lung lobes in high-resolution isotropic CT images // IEEE Trans. Biomed. Eng.– 2009.– 56 № 5.– P. 1383–1393.
18. Губергриц А. Я. Непосредственное исследование больного.– Ижевск: Удмуртия, 1996.– 332 с.
19. Гринченко В. Т., Вовк И. В. Волновые задачи рассеяния звука на упругих оболочках.– К.: Наук. думка, 1986.– 240 с.
20. Гринченко В. Т., Вовк И. В., Мацыпура В. Т. Основы акустики.– К.: Наук. думка, 2007.– 640 с.