

УДК 539.3

# РЕЗОНАНСНІ КОЛИВАННЯ Й ВІБРОРОЗІГРІВ ГНУЧКИХ КРУГЛИХ ПЛАСТИНОК З П'ЄЗОАКТУАТОРАМИ ПРИ ШАРНІРНОМУ Й ЖОРСТКОМУ ЗАКРІПЛЕННЯХ

І. Ф. КИРИЧОК\* Т. В. КАРНАУХОВА\*\*

\*Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ

\*\*Національний технічний університет України "КПІ", Київ

Одержано 01.10.2010

Розв'язано спряжену задачу про вимушені резонансні осесиметричні коливання й дисипативний розігрів гнучких круглих пластинок з п'єзоактивними актуаторами. Розглянуті питання механічного й електричного збудження коливань, а також можливість демпфування механічних коливань за допомогою подачі відповідної різниці електричних потенціалів на електроди актуаторів. Досліджено вплив граничних механічних і теплових умов, геометричної нелінійності й температури дисипативного розігріву на активне демпфування гнучких пластинок.

Решена связанная задача о вынужденных резонансных осесимметричных колебаниях и диссипативном разогреве гибких круглых вязкоупругих пластинок с пьезоактивными актуаторами. Рассмотрены вопросы механического и электрического возбуждения колебаний, а также возможность демпфирования механических колебаний с помощью подвода соответствующей разности электрических потенциалов к электродам актуаторов. Исследовано влияние граничных механических и тепловых условий, геометрической нелинейности и температуры диссипативного разогрева на активное демпфирование гибких пластинок.

The paper deals with considering of a coupled problem on forced resonant axisymmetric vibrations and dissipative heating of circular flexible viscoelastic plates with piezoactive actuators. Different aspects of mechanical and electrical excitation of vibrations are considered, along with the possibility of damping of mechanical vibrations by means of voltage application to electrodes of the actuators. The effect of mechanical and thermal boundary conditions, geometric nonlinearity and temperature of the dissipative heating on the active damping of circular flexible plates is investigated.

## ВСТУП

Тонкі пластинки з в'язкопружних матеріалів – один з найпоширеніших конструктивних елементів у багатьох галузях сучасної техніки. У процесі експлуатації вони часто знаходяться під дією динамічних, зокрема, гармонічних у часі навантажень. Особливо небезпечними є резонансні режими експлуатації тонкостінних елементів, коли значення амплітуд прогинів можуть бути порядку товщини пластинки. У зв'язку з цим виникає потреба у демпфуванні вимушених коливань гнучких тонкостінних круглих пластинок, яка породжує ряд відповідних задач. В останні роки поряд із пасивними методами демпфування коливань тонкостінних елементів [1–3] широко почали використовуватись методи активного демпфування за допомогою п'єзоактивних тонких накладок (актуаторів) [4,5]. До такого актуатора підводиться різниця електричних потенціалів, яка компенсує дію механічного навантаження. На ефективність гасіння механічних коливань об'єкта впливають такі фактори як електромеханічні й геометричні характеристики пасивної та п'єзоактивної складових системи, механічні граничні умови, темпера-

турні фактори, обумовлені дисипативним розігрівом внаслідок гістерезисних втрат у матеріалі або теплообміном із зовнішнім середовищем. Дослідженню впливів цих факторів на термомеханічні процеси при активному демпфуванні вимушених коливань негнучких пластинок присвячені роботи [1, 6–12].

Питання математичного моделювання термомеханічної поведінки в'язкопружних гнучких пластинок з розподіленими актуаторами та розв'язки окремих задач методом Бубнова – Гальоркіна розглядались у статтях [13–15]. Зауважимо, що при розв'язку конкретних задач товщина п'єзошарів та їхні в'язкопружні властивості тут не враховувались.

У даній статті в геометрично нелінійній постановці розглядається задача про вимушені резонансні коливання й дисипативний розігрів в'язкопружних гнучких круглих пластинок з п'єзоелектричними актуаторами при шарнірному й жорсткому закріпленнях зовнішнього контура. Враховуються в'язкопружні властивості п'єзоматеріалу, товщина п'єзоактуаторів у жорсткістних характеристиках і геометрична нелінійність у квадратичному наближенні.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо тришарову гнучку круглу пластинку радіуса  $R$ , середній шар якої товщини  $h_0$  виготовлено з ізотропного пасивного (без п'єзоефекту) матеріалу, а два зовнішні шари однакової товщини  $h_1$  – із трансверсально-ізотропного п'єзоактивного матеріалу з однаковими властивостями, але протилежним напрямком їхньої поляризації по товщині. Для конкретності вважаємо, що верхній ( $z \geq h_0/2$ ) і нижній ( $z \leq -h_0/2$ ) шари характеризуються значеннями п'єзомодуля  $d_{31}$  і  $-d_{31}$ , відповідно. Зовнішні та внутрішні поверхні п'єзос шарів – актуаторів, що контактують з пасивним шаром, – електродовані. Внутрішні електроди підтримуються при нульовому електричному потенціалі.

На пластинку діє поверхневий тиск, який змінюється за моногармонічним у часі  $t$  законом з круговою частотою  $\omega$ , близькою до резонансної. До зовнішніх електродів кругового актуатора радіуса  $r=r_0 \leq R$  з частотою механічного навантаження підводиться різниця електричних потенціалів

$$\phi_1 \left( \frac{h_0}{2} + h_1 \right) - \phi_1 \left( -\frac{h_0}{2} - h_1 \right) = \mathbf{Re} (2V_A e^{i\omega t}).$$

Електроди в області  $r > r_0$  закорочені ( $V_A = 0$ ). Механічно контур пластинки вільний у радіальному напрямку та шарнірно або жорстко закріплений у поперечному напрямку. На поверхнях пластинки реалізуються умови конвективного теплообміну з навколишнім середовищем, яке має температуру  $T_s$ . При активному демпфуванні вимушених коливань пластинки, обумовлених механічним навантаженням, необхідно на основі розв'язку механічної задачі розрахувати амплітуду й фазу електричного потенціалу, який підводиться до електродів актуатора для компенсації дії навантаження.

Коливання такої пластинки описуються на основі гіпотез Кірхгофа – Лява, доповнених адекватними їм гіпотезами відносно розподілу електричних польових величин [16,17]. Дисипативні властивості матеріалів пасивних і п'єзоактивних шарів враховуються на основі концепції комплексних характеристик [1]. Температура дисипативного розігріву приймається постійною по товщині пакету шарів. Вважається, що деформації малі, але прогини пластинки такі, що в кінематичних співвідношеннях необхідно враховувати квадрати кутів повороту. При цьому рівняння руху також є нелінійними.

На основі вказаних припущень задача про вимушені осесиметричні електромеханічні коливання гнучкої круглої пластинки в полярних координатах зводиться до розв'язку рівнянь руху [18,19]

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{1}{r}(N_r - N_\theta) &= \rho_h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \bar{Q}_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\bar{Q}_r + q_z &= \rho_h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{1}{r}(M_r - M_\theta) - \bar{Q}_r - N_r \vartheta_r = 0;$$

співвідношень в'язкопружності

$$\begin{aligned} N_r &= C_{11} \oplus \varepsilon_r + C_{12} \oplus \varepsilon_\theta, \\ N_\theta &= C_{12} \oplus \varepsilon_r + C_{11} \oplus \varepsilon_\theta, \end{aligned} \quad (2)$$

$$M_r = D_{11} \oplus \kappa_r + D_{12} \oplus \kappa_\theta + M_E,$$

$$M_\theta = D_{12} \oplus \kappa_r + D_{11} \oplus \kappa_\theta + M_E;$$

а також кінематичних залежностей

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2}\vartheta_r^2, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad (3)$$

$$\kappa_r = \frac{\partial \vartheta_r}{\partial r}, \quad \kappa_\theta = \frac{\vartheta_r}{r}, \quad \vartheta_r = -\frac{\partial w}{\partial r}.$$

У рівняннях (1)–(3) введені такі позначення:

$$C_{11} = h_0 B_{11}^E + 2h_1 B_{11}^S;$$

$$C_{12} = h_0 \nu B_{11}^E + 2h_1 \nu_E B_{11}^S;$$

$$D_{11} = \frac{h_0^3}{12} B_{11}^E + \hat{h}^3 (B_{11}^S + \gamma_{33});$$

$$D_{12} = \frac{h_0^3}{12} \nu B_{11}^E + \hat{h}^3 (\nu_E B_{11}^S + \gamma_{33});$$

$$\hat{h}^3 = \frac{1}{6} (4h_1^3 + 6h_1^2 h_0 + 3h_1 h_0^2);$$

$$B_{11}^E = \frac{E}{1 - \nu^2}; \quad B_{11}^S = \frac{1}{s_{11}^E (1 - \nu_E^2)}; \quad (4)$$

$$\nu_E = -\frac{s_{12}^E}{s_{11}^E}; \quad k_p^2 = \frac{2d_{31}^2}{s_{11}^E \varepsilon_{33}^T (1 - \nu_E)};$$

$$\gamma_{33} = \frac{b_{31}^2}{b_{33}}; \quad \rho_h = 2h_1 \rho_1 + \rho_0 h_0;$$

$$M_E = (h_0 + h_1) b_{31} \oplus V_A; \quad \bar{Q}_r = Q_r - N_r \vartheta_r;$$

$$b_{31} = \frac{d_{31}}{s_{11}^E (1 - \nu_E)}; \quad b_{33} = \varepsilon_{33}^T (1 - k_p^2).$$

Окрім того,  $s_{11}^{E*}$ ,  $s_{12}^{E*}$ ,  $d_{31}^*$ ,  $\varepsilon_{33}^{T*}$  – незалежні від температури податливості, п'єзомодуль і діелектрична проникність у п'єзоелектричних шарах відповідно;  $N_r$ ,  $N_\theta$ ,  $Q_r$  – зусилля;  $M_r$ ,  $M_\theta$  – моменти;  $u$ ,

$w, \vartheta_r$  – переміщення й кут повороту;  $\rho_1, \rho_0$  – питомі густини п'єзоактивного й пасивного матеріалів;  $E^*$  – в'язкопружний модуль Юнга;  $\nu = \text{const}$  – коефіцієнт Пуассона пасивного матеріалу. Символ “ $\oplus$ ” в рівняннях стану (2), який надалі опускаємо, позначає відомий з лінійної теорії в'язкопружності [17, 20] інтегральний оператор

$$D^* f = \overset{\circ}{D} f - \int_{-\infty}^t \overset{\circ}{D}(t - \tau) f(\tau) d\tau,$$

який для гармонічних процесів деформування призводить до концепції комплексних характеристик [1, 17], так що

$$D^* f = (D' + iD'')(f' + if''). \quad (5)$$

Усереднене за цикл коливань і по всій товщині пакету шарів пластинки рівняння енергії, яке описує осесиметричний розподіл температури дисипативного розігріву, має вигляд

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2\alpha_n}{\lambda h} (T - T_s) + \frac{\dot{W}}{\lambda h}, \quad (6)$$

де  $h = 2h_1 + h_0$ ;  $\alpha_n = (\alpha_1 + \alpha_2)/2$ ;  $\alpha_1, \alpha_2$  – коефіцієнти теплообміну на поверхнях  $\gamma = \mp(h_0/2 + h_1)$ ;  $\lambda$  – усереднений коефіцієнт теплопровідності;  $a$  – коефіцієнт температуропровідності;  $\dot{W}$  – усереднена за період коливань і по товщині пластинки швидкість дисипації.

Розв'язувальні рівняння (1)–(6) необхідно доповнити граничними механічними й тепловими умовами на контурі пластинки й початковою умовою для рівняння теплопровідності. Механічні граничні умови запишуться так:

- при шарнірному закріпленні краю

$$N_r = 0, \quad w = 0, \quad M_r = 0 \quad \text{при} \quad r = R; \quad (7)$$

- при жорсткому защемленні краю

$$N_r = 0, \quad w = 0, \quad \vartheta_r = 0 \quad \text{при} \quad r = R. \quad (8)$$

Теплові гранична й початкова умови мають вигляд

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial r} = -\alpha_R (T - T_s) \quad \text{при} \quad r = R, \quad (9)$$

$$T = T_0 \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Оскільки для круглої суцільної пластинки точка  $r = 0$  є особливою, то при чисельному розв'язку задачі розглядається пластинка з отвором досить малого радіуса  $r = \epsilon$  у центрі, на контурі якого

задаються умови регулярності й симетрії [19] для рівнянь механіки (1)–(3) й теплопровідності (6), так що

$$N_r = 0, \quad \bar{Q}_r = 0, \quad \vartheta_r = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad \text{при} \quad r = \epsilon. \quad (10)$$

## 2. ПОВБУДОВА РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ

Для побудови розв'язку задачі про коливання гнучкої круглої пластинки рівняння руху (1) і кінематичні співвідношення (3) запишемо відносно шуканих величин  $u, w, \vartheta_r, N_r, \bar{Q}_r, M_r$  у вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \epsilon_r - \frac{1}{2} \vartheta_r^2,$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = -\vartheta_r, \quad \frac{\partial \vartheta_r}{\partial r} = -\kappa_r,$$

$$\frac{\partial N_r}{\partial r} = -\frac{1}{r} N_r + \frac{1}{r} N_\theta + \rho_h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \bar{Q}_r}{\partial r} = -\frac{1}{r} \bar{Q}_r + \rho_h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q_z,$$

$$\frac{\partial M_r}{\partial r} = -\frac{1}{r} M_r + \frac{1}{r} M_\theta + \bar{Q}_r + N_r \vartheta_r.$$

Із визначальних рівнянь (2) знаходимо

$$\epsilon_r = J_c \oplus N_r - \nu_c \oplus \frac{u}{r},$$

$$\kappa_r = J_D \oplus M_r + \nu_D \oplus \frac{\vartheta_r}{r} - J_D \oplus M_E,$$

$$N_\theta = \nu_c \oplus N_r + B_{22} \oplus \frac{u}{r}, \quad (12)$$

$$M_\theta = -\nu_D \oplus M_r + D_{22} \oplus \frac{\vartheta_r}{r} + (1 + \nu_D) \oplus M_E,$$

де

$$J_c = \frac{1}{C_{11}}; \quad J_D = \frac{1}{D_{11}}; \quad \nu_c = \frac{C_{12}}{C_{11}}; \quad \nu_D = -\frac{D_{12}}{D_{11}}; \quad (13)$$

$$B_{22} = C_{11}(1 - \nu_c^2); \quad D_{22} = D_{11}(1 - \nu_D^2).$$

При моногармонічному механічному навантаженні

$$q_z = q'_z \cos \omega t - q''_z \sin \omega t, \quad q''_z = 0, \quad (14)$$

внаслідок геометричної нелінійності розв'язок задачі (11), окрім основної частоти (частоти навантаження), буде мати й інші гармоніки, тобто коливальний процес – полігармонічний. Обмежимося побудовою розв'язку нелінійної задачі в одномодовому наближенні для змінних  $A = \{w, \vartheta_r, \bar{Q}_r, M_r, M_\theta, \kappa_r\}$ , які характеризують згин пластинки, та утриманням інших гармонік для змінних  $B = \{u, N_r, \varepsilon_r, N_\theta\}$  плоского деформування пластинки, так що

$$A = A' \cos \omega t - A'' \sin \omega t, \quad (15)$$

$$B = \overset{0}{B} + \sum_{k=1}^2 \left( \overset{k}{B}' \cos k\omega t - \overset{k}{B}'' \sin k\omega t \right).$$

Підставимо залежності (14), (15) у розв'язувальні рівняння (11) і прирівняємо коефіцієнти при  $\cos k\omega t$  і  $\sin k\omega t$  ( $k=0, 1, 2$ ). Після цього з отриманих співвідношень виключимо стаціонарні складові  $\overset{0}{\varepsilon}_r, \overset{0}{N}_r$  й амплітудні змінні  $\overset{1'}{\kappa}_r, \overset{1''}{\kappa}_r, \overset{1'}{M}_\theta, \overset{1''}{M}_\theta, \overset{k'}{\varepsilon}_r, \overset{k'}{N}_\theta, \overset{k''}{N}_\theta$  ( $k=1, 2$ ). Величини  $\overset{0}{\varepsilon}_r, \overset{0}{N}_\theta$  визначаються першим і третім співвідношеннями (12), в яких операторна зірочка опускається і жорсткісні характеристики  $J_c, \nu_c, B_{22}$  обчислюються згідно із залежностями (4), (13), у яких в'язкопружні модулі замінюються на їхні дійсні пружні значення. Змінні  $\overset{1'}{\kappa}_r, \dots, \overset{k''}{N}_\theta$  знаходимо згідно з процедурою (5) із залежностей (12), які справедливі для кожної гармоніки [1, 17]. При цьому для величин з верхнім індексом "1" комплексні жорсткості (4), (13) обчислюються при частоті  $\omega$ , а з індексом "2" – при частоті  $2\omega$ . У результаті отримуємо таку наближену систему нелінійних диференціальних рівнянь відносно амплітудних складових шуканих величин:

$$\frac{d\overset{0}{u}}{dr} = \overset{0}{J}_c \overset{0}{N}_r - \overset{0}{\nu}_c \frac{\overset{0}{u}}{r} - \frac{1}{2}(\overset{1'}{\vartheta}_r^2 + \overset{1''}{\vartheta}_r^2),$$

$$\frac{d\overset{1'}{u}}{dr} = J'_c N'_r + J''_c N''_r - \nu'_c \frac{u'}{r} + \nu''_c \frac{u''}{r}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial u''}{\partial r} = -J''_c N'_r + J'_c N''_r - \nu''_c \frac{u'}{r} - \nu'_c \frac{u''}{r},$$

$$\frac{d\overset{2'}{u}}{dr} = J'^2_c N'^2_r + J''^2_c N''^2_r - \nu'^2_c \frac{\overset{2'}{u}}{r} + \nu''^2_c \frac{\overset{2'}{u}}{r} - \frac{1}{4}(\overset{1'}{\vartheta}_r^2 - \overset{1''}{\vartheta}_r^2),$$

$$\frac{d\overset{2''}{u}}{dr} = -J''^2_c N'^2_r + J'^2_c N''^2_r - \nu''^2_c \frac{\overset{2''}{u}}{r} - \nu'^2_c \frac{\overset{2''}{u}}{r} - \frac{1}{2}\overset{1'}{\vartheta}_r \overset{1''}{\vartheta}_r, \quad (17)$$

$$\frac{dw'}{dr} = -\vartheta'_r, \quad \frac{dw''}{dr} = -\vartheta''_r,$$

$$\frac{d\vartheta'_r}{dr} = J'_D M'_r + J''_D M''_r + \nu'_D \frac{\vartheta'_r}{r} - \nu''_D \frac{\vartheta''_r}{r} - (J'_D M'_E + J''_D M''_E),$$

$$\frac{d\vartheta''_r}{dr} = -J''_D M'_r + J'_D M''_r + \nu''_D \frac{\vartheta'_r}{r} + \nu'_D \frac{\vartheta''_r}{r} + (J''_D M'_E - J'_D M''_E),$$

$$\frac{d\overset{2'}{N}_r}{dr} = -\frac{1 - \nu'^2_c}{r} \overset{2'}{N}_r - \frac{\nu''^2_c}{r} \overset{2''}{N}_r + \frac{B'_{22}}{r} \overset{2'}{u}' - \frac{B''_{22}}{r^2} \overset{2''}{u}'' - 4\rho_h \omega^2 \overset{2'}{u}',$$

$$\frac{d\overset{2''}{N}_r}{dr} = \frac{\nu''^2_c}{r} \overset{2'}{N}_r - \frac{1 - \nu'^2_c}{r} \overset{2''}{N}_r + \frac{B''_{22}}{r} \overset{2'}{u}' + \frac{B'_{22}}{r^2} \overset{2''}{u}'' - 4\rho_h \omega^2 \overset{2''}{u}'',$$

$$\frac{d\bar{Q}'_r}{dr} = -\frac{1}{r} \bar{Q}'_r - \rho_h \omega^2 w' - q'_z, \quad (18)$$

$$\frac{d\bar{Q}''_r}{dr} = -\frac{1}{r} \bar{Q}''_r - \rho_h \omega^2 w'',$$

$$\frac{d\overset{0}{N}_r}{dr} = -\frac{1 - \nu^0_c}{r} \overset{0}{N}_r + \frac{B_{22}^0}{r^2} \overset{0}{u},$$

$$\frac{dN'_r}{dr} = -\frac{1 - \nu'_c}{r} N'_r - \frac{\nu''_c}{r} N''_r + \frac{B'_{22}}{r^2} \overset{1'}{u}' - \frac{B''_{22}}{r^2} \overset{1''}{u}'' - \rho_h \omega^2 \overset{1'}{u}',$$

$$\frac{dN''_r}{dr} = \frac{\nu''_c}{r} N'_r - \frac{1 - \nu'_c}{r} N''_r + \frac{B''_{22}}{r^2} \overset{1'}{u}' + \frac{B'_{22}}{r^2} \overset{1''}{u}'' - \rho_h \omega^2 \overset{1''}{u}'',$$

$$\begin{aligned} \frac{dM'_r}{dr} = & -\frac{1+\nu'_D}{r}M'_r + \frac{\nu''_D}{r}M''_r + \\ & + \frac{D'_{22}}{r^2}\vartheta'_r - \frac{D''_{22}}{r^2}\vartheta''_r + \bar{Q}'_r + \overset{\circ}{N}_r\vartheta'_r + \\ & + \frac{1}{2}\overset{\circ}{N}'_r\vartheta'_r + \frac{1}{2}\overset{\circ}{N}''_r\vartheta''_r + \frac{1+\nu'_D}{r}M'_E - \frac{\nu''_D}{r}M''_E, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \frac{dM''_r}{dr} = & -\frac{\nu'_D}{r}M'_r - \frac{1+\nu'_D}{r}M''_r + \\ & + \frac{D'_{22}}{r^2}\vartheta'_r + \frac{D''_{22}}{r^2}\vartheta''_r + \bar{Q}''_r + \overset{\circ}{N}_r\vartheta''_r + \\ & + \frac{1}{2}\overset{\circ}{N}'_r\vartheta''_r + \frac{1}{2}\overset{\circ}{N}''_r\vartheta'_r + \frac{\nu'_D}{r}M'_E + \frac{1+\nu'_D}{r}M''_E. \end{aligned}$$

Механічні граничні умови (7) і (8) відповідно записуються так:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{N}_r = N'_r = N''_r = \overset{\circ}{N}'_r = \overset{\circ}{N}''_r = w'_r = w''_r = \\ = M''_r = M'_r = 0 \quad (r = R), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{N}_r = N'_r = N''_r = \overset{\circ}{N}'_r = \overset{\circ}{N}''_r = w'_r = w''_r = \\ = \vartheta'_r = \vartheta''_r = 0 \quad (r = R). \end{aligned} \quad (21)$$

а умови (10):

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{N}_r = N'_r = N''_r = \overset{\circ}{N}'_r = \overset{\circ}{N}''_r = \vartheta'_r = \vartheta''_r = \\ = \bar{Q}'_r = \bar{Q}''_r = 0 \quad (r = \varepsilon), \end{aligned} \quad (22)$$

Дисипативна функція  $\hat{W}$  у рівнянні енергії (6) для гнучкої в'язкопружної пластинки з п'єзоелектричними актуаторами через розв'язувальні функції системи рівнянь (16)–(19) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \frac{2}{\omega}\hat{W} = & \sum_{k=1}^2 (\overset{k}{N}'_r \overset{k}{\varepsilon}'_r - \overset{k}{N}'_r \overset{k}{\varepsilon}''_r + \overset{k}{N}''_r \overset{k}{\varepsilon}'_r - \overset{k}{N}''_r \overset{k}{\varepsilon}''_r) + \\ & + M''_r \kappa'_r - M'_r \kappa''_r + M''_\theta \kappa'_\theta - M'_\theta \kappa''_\theta + \\ & + (h_0 + h_1)[(b''_{31}\kappa'_r + b'_{31}\kappa''_r)V'_A - \\ & - (b'_{31}\kappa'_r - b''_{31}\kappa''_r)V''_A] + 2\frac{b''_{33}}{h_1}(V'^2_A + V''^2_A). \end{aligned} \quad (23)$$

Тут  $\kappa = \kappa_r + \kappa_\theta$ . Для скорочення запису індекс “1” над змінними у рівняннях (16)–(23) опущено.

До нелінійних рівнянь (16)–(19) застосуємо метод квазілінеаризації [17, 19], а отриману лінеаризовану систему звичайних диференціальних рівнянь на кожній ітерації проінтегруємо методом

дискретної ортогоналізації [19] з використанням типової програми [21]. На першому кроці розв'язується лінійна задача. Після обчислення дисипативної функції (23) нестационарна задача теплопровідності (6), (9) розв'язується за допомогою явної схеми методу скінченних різниць. При реалізації вказаного алгоритму слід використовувати безрозмірні просторову  $x = (r - \varepsilon)/L$  ( $L = R - \varepsilon$ ) й часову  $\tau = at/L^2$  координати.

### 3. РЕЗУЛЬТАТИ РОЗРАХУНКІВ

Числові розрахунки проведено для круглої пластинки з пасивного в'язкопружного матеріалу типу поліметилметакрилат [22] з такими теплофізичними характеристиками:

$$\overset{k}{E}^* = \overset{k}{E}' + i\overset{k}{E}'', \quad k = 1, 2;$$

$$\overset{k}{E}' = \overset{\circ}{E}(k\omega)^p; \quad \overset{k}{E}'' = \overset{k}{E}'b(k\omega)^q;$$

$$\overset{\circ}{E} = 0.308 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; \quad \nu = 0.35;$$

$$b = 0.16; \quad p = 0.076; \quad q = -0.145;$$

$$\rho_0 = 2.77 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3; \quad \lambda = 0.45 \text{ Вт/(м}^2 \text{ град)}.$$

П'єзоелектричні шари актуаторів виготовлено з в'язкопружної кераміки типу ЦГСтБС-2 [23] з такими незалежними від частоти фізико-механічними характеристиками, що відповідають початковій температурі  $T_0$ :

$$s_{11}^{E*} = (12.5 - 0.02i) \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{Н};$$

$$d_{31}^* = (-1.6 + 0.0064i) \cdot 10^{-10} \text{ Кл/м};$$

$$\varepsilon_{33}^* = (21 - 0.735i) \cdot 10^2 \varepsilon_0;$$

$$\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}; \quad \nu'_E = 0.37; \quad \nu''_E = 0;$$

$$\rho_1 = 7520 \text{ кг/м}^3; \quad \lambda = 0.47 \text{ Вт/(м}^2 \text{ град)};$$

$$T_0 = T_s = 20^\circ\text{C}, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Розміри пластинки вибирались такими:  $R = 0.2$  м;  $\varepsilon = 0.1 \cdot 10^{-3}$  м;  $h_0 = 0.01$  м;  $h_1 = 0.5 \cdot 10^{-6}$  м.

У зв'язку з тим, що в об'єкті реалізуються переважно згинальні коливання, числові розрахунки проводились для частот навантаження, близьких до першого резонансу згинальної моди. Розглядалися три способи навантаження пластинки – механічне, електричне й одночасна протифазна дія механічного й електричного навантажень. При цьому обмежувались випадком дії на поверхню пластинки рівномірного вздовж радіуса тиску з амплітудою  $q'_z = q_0$ .

Для компенсації впливу механічного навантаження методом активного демпфування необхідно розрахувати показник актуатора  $V_A$ . За аналогією з лінійною задачею [8], прийемо лінійну залежність між  $V_A$  і  $q_0$  у вигляді

$$V_A = k_a(x_0)q_0, \quad (24)$$

де  $k_a$  – коефіцієнт керування;  $x_0 = (r_0 - \varepsilon)/L$  – безрозмірний радіус кругового актуатора.

Згідно з [8], коефіцієнт  $k_a$  у рівнянні (24) розраховується як відношення амплітуди максимального прогину, обумовленого на частоті лінійного резонансу одиничним механічним навантаженням ( $q_0 = 1$  Па), до відповідного значення амплітуди прогину  $w_E$  при підведенні до електродів актуатора одиничного електричного потенціалу ( $V'_A = 1$  В;  $V''_A = 0$ ), так що

$$k_A = \frac{|w_p \max|}{|w_E \max|}. \quad (25)$$

Якщо механічне навантаження змінюється за часом відповідно до закону (14), то для компенсації цього навантаження обчислене згідно з (24), (25) протифазне електричне навантаження повинно змінюватися за законом  $V_A \cos(\omega t + \pi) = -V_A \cos \omega t$ .

На рис. 1 показано розраховані за формулою (25) на частотах лінійного резонансу  $\omega_p$  залежності коефіцієнта керування  $k_a$  (неперервні лінії) й максимальні значення відносних прогинів  $w_1 = 4|w_E(0)|/h_0$  і  $w_2 = |w_E(0)|/h_0$  (штрихові лінії), обумовлені одиничним електричним навантаженням, від безрозмірного радіуса  $x_0$  кругового актуатора. Тут криві 1 відповідають жорсткому, а 2 – шарнірному закріпленню краю пластинки (те саме означають індекси в позначеннях максимальних прогинів). Проведені розрахунки показують, що актуатори з радіусами  $x_0 = 0.67$  для жорстко закріпленої та  $x_0 = 1$  для шарнірно опертої пластинки реалізують максимальні прогини при мінімальному значенні  $k_a$ . Вони виявляються оптимальними при електричному збудженні коливаний пластинки та найефективнішими для активного гасіння вимушених механічних коливаний.

Числові дослідження ефектів нелінійності представлено графіками на рис. 2–5, на яких співставлялись результати розв'язків лінійної (штрихові лінії) й геометрично нелінійної (неперервні лінії) задач. Графіки на рис. 2, а, 3, а, 4, а отримані для шарнірного опираючого (7), а на рис. 2, б, 3, б, 3, б – жорсткого для защемлення (8) зовнішнього краю пластинки.

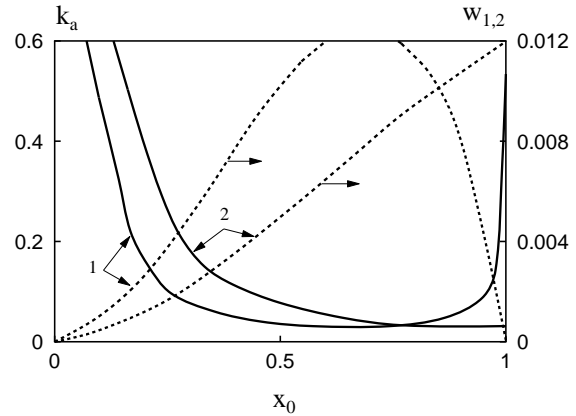


Рис. 1. Залежність  $k_a$  й відносних прогинів від безрозмірного радіуса  $x_0$  актуатора

На рис. 2 наведені амплітудно-частотні характеристики (АЧХ) максимального значення віднесеної до товщини пасивного шару амплітуди прогину  $\tilde{w} = |w(0)|/h_0$  при механічному навантаженні пластинки з такими значеннями амплітуди  $q_0 \cdot 10^{-4}$ : крива 1 – 0.05 Па; крива 2 – 0.10 Па; крива 3 – 0.15 Па; крива 4 – 0.20 Па; крива 5 – 0.30 Па; крива 6 – 0.35 Па. При цьому  $V_A = 0$ . Для зазначених амплітуд механічного навантаження відповідні температурно-частотні характеристики (ТЧХ) максимального значення усталеної ( $\tau = 0.1$ ) температури дисипативного розігріву, за умов конвективного теплообміну на поверхнях пластинки з коефіцієнтом  $\alpha_n = \alpha_R = 15$  Вт/(м<sup>2</sup> град), показані на рис. 3.

З аналізу рис. 2 випливає, що при навантаженнях, які обумовлюють максимальне значення відносного прогину  $\tilde{w} \leq 0.2$ , можна обмежитись лінійною постановкою задачі. Видно, що в умовах жорсткого закріплення краю пластинки така постановка задачі справедлива при більш високих рівнях навантажень. При розглянутих умовах теплообміну для жорсткого закріплення спостерігається суттєво вищий рівень температури дисипативного розігріву (криві 4 на рис. 3, б), ніж при шарнірному (криві 1, рис. 3, а). Зі зростанням амплітуди відносного прогину ( $\tilde{w} > 0.2$ ) вклад геометричної нелінійності стає більш помітним, що проявляється у зсуві резонансної частоти в бік її збільшення та формуванні АЧХ і ТЧХ жорсткого типу.

На рис. 4 для розглянутої пластинки з шарнірно опертим краєм наведені АЧХ максимальних амплітуд прогинів  $w_E = |w(0)|/h_0$  (рис. 4, а) й ТЧХ максимального значення температури дисипативного розігріву  $T_m$  (рис. 4, б), розраховані у випадку

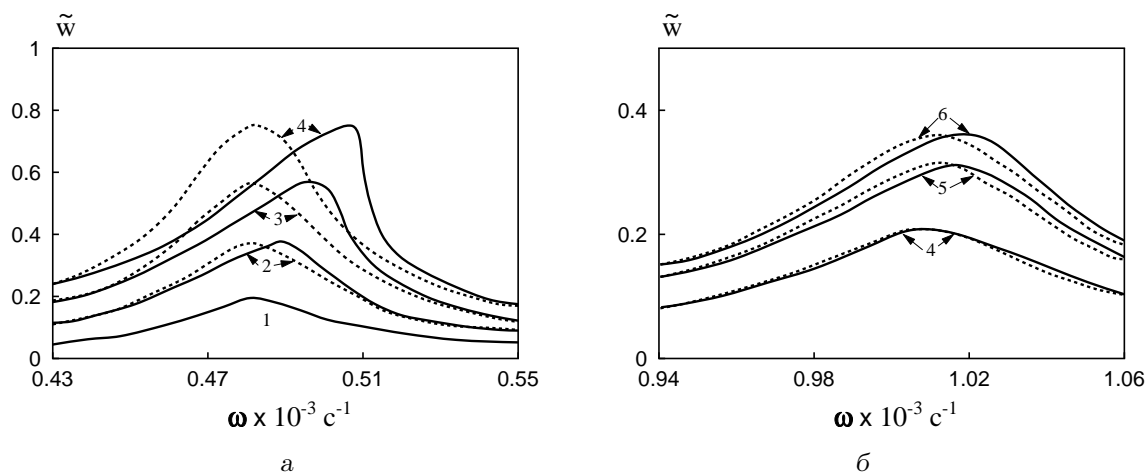


Рис. 2. Амплітудно-частотна характеристика (АЧХ) при механічному навантаженні:  
 а – для шарнірного закріплення, б – для жорсткого закріплення

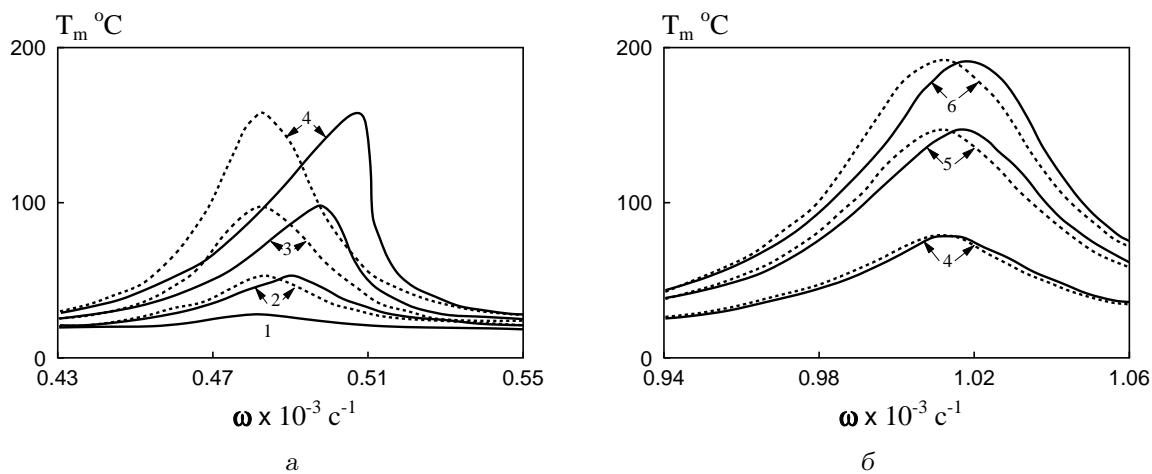


Рис. 3. Температурно-частотна характеристика (ТЧХ) при механічному навантаженні:  
 а – для шарнірного закріплення, б – для жорсткого закріплення

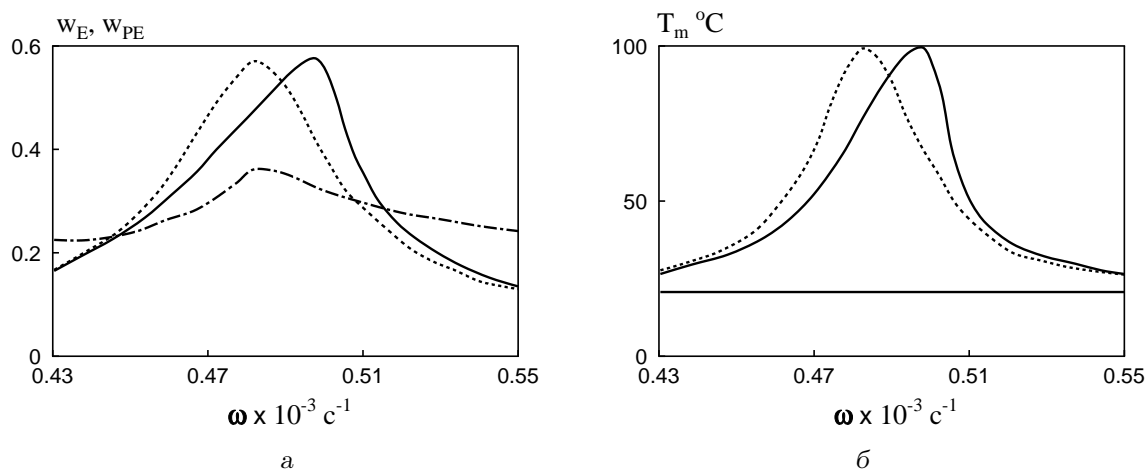


Рис. 4. Частотні характеристики системи при різних типах навантаження:  
 а – АЧХ, б – ТЧХ

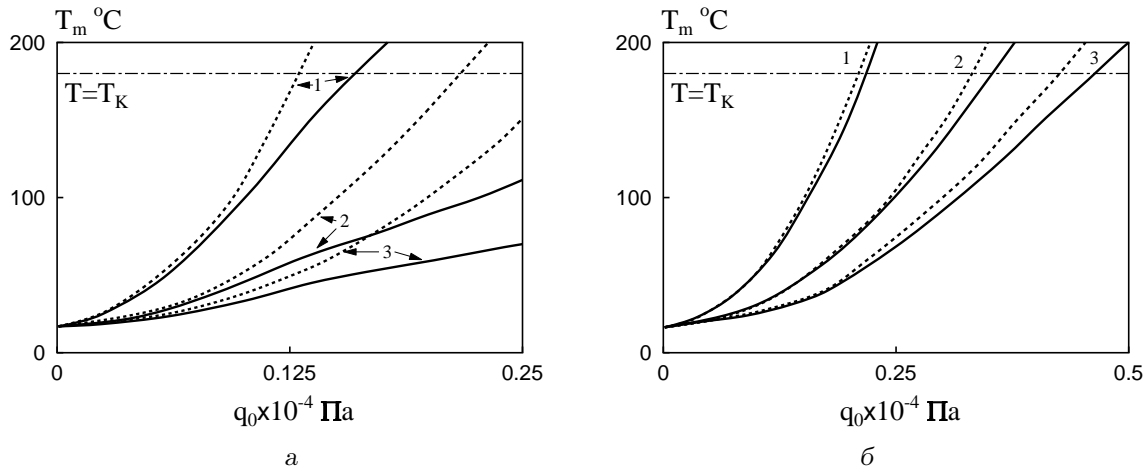


Рис. 5. Залежність максимальної температури від амплітуди механічного навантаження: а – для шарнірного закріплення, б – для жорсткого закріплення

ках лінійної (штрихові лінії) і нелінійної (суцільні лінії) постановок задачі при підведенні до електродів оптимального актуатора ( $x_0=1$ ) електричних потенціалів  $\pm V_A=46.8$  В. Видно, що ефекти нелінійності тут аналогічні до випадку механічного навантаження. При цьому результати для лінійної й нелінійної задач у масштабі графіків співпадають з кривими 3 на рис. 2, а і 3, а. Відзначимо, що величина  $V_A=46.8$  В є компенсаційною до механічного навантаження  $q_0=0.15 \cdot 10^4$  Па й розраховувалась за формулою (24) при  $k_a=0.0312$  згідно кривої 2 на рис. 1. На цьому ж рисунку представлені штрихові лінії – це АЧХ відносного прогину  $w_{pE}=|w(0)|/h_0 \cdot 10^2$  і ТЧХ пластинки при одночасній дії механічного навантаження  $q_0=0.15 \cdot 10^4$  Па й протифазно підведених до електродів актуатора компенсаційних потенціалів  $V_A=46.8$  В. Вони демонструють ефективність активного демпфування механічних коливань розглянутої пластинки.

На рис. 5 показано залежності максимальної температури дисипативного розігріву  $T_m$  від величини амплітуди механічного навантаження  $q_0$  для коефіцієнтів теплообміну  $\alpha_n=\alpha_R=5, 15$  і  $25$  Вт/(м<sup>2</sup>град) (криві 1–3 відповідно). Ці результати отримано на частотах лінійного резонансу  $\omega_p=482$  рад/с при шарнірному (рис. 5, а) і  $\omega_p=1010$  рад/с при жорсткому (рис. 5, б) закріпленні зовнішнього краю пластинки в лінійній (штрихові лінії) і геометрично нелінійній (неперервні лінії) постановках задачі. На осі ординат показано значення температури Кюрі  $T_K=180^\circ\text{C}$  п'єзокераміки ЦТСтБС-2, при якій п'єзоматеріал деполяризується. Аналіз рис. 5 показує, що при активному демпфуванні пластинок із в'язкопружних матеріалів обов'язковим буде розра-

хунок температури дисипативного розігріву, яка залежить не тільки від амплітуди навантаження, а й від умов механічного закріплення контуру пластинки й теплообміну її поверхонь із зовнішнім середовищем. Урахування геометричної нелінійності супроводжується зниженням температури розігріву. Вважаючи, що п'єзоактуатор втрачає свою функціональну працездатність при досягненні температури Кюрі хоча б в одній точці елемента, можна визначити критичне значення амплітуди механічного навантаження при відомих умовах теплообміну й механічного закріплення пластинки.

## ВИСНОВКИ

Досліджено особливості термомеханічних процесів при роздільному та спільному моногармонічному електричному й механічному навантаженнях гнучких круглих в'язкопружних пластинок з п'єзоактуаторами при різних умовах механічного закріплення й теплообміну з зовнішнім середовищем. Показано, що для пластинки з протилено поляризованими по товщині шарами актуатора при електромеханічному збудженні максимальні амплітуди прогинів на лінійному і нелінійному резонансах за величиною мало відрізняються між собою. Цей факт служить доказом того, що урахування геометричної нелінійності не впливає на показник актуатора і його можна визначати з розв'язку лінійної задачі. Граничні умови механічного закріплення пластинки й умови теплообміну на її поверхнях відіграють суттєву роль при визначенні показника актуатора й допустимих значень амплітуди механічного навантаження, коли п'єзо-



елемент деполаризується, досягаючи температури Кюри внаслідок саморозігрівання.

1. Карнаухов В. Г., Михайленко В. В. Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении.– Житомир: Изд-во ЖТТУ, 2005.– 428 с.
2. Матвеев В. В. Демпфирование колебаний деформируемых тел.– К.: Наук. думка, 1985.– 264 с.
3. Нашиф А., Джоунс Д., Хендерсон Дж. Демпфирование колебаний.– М.: Мир, 1988.– 488 с.
4. Tzou H. S., Anderson G. L. (eds.) Intelligent structural systems.– Dordrecht – Boston – London: Kluwer Academic Publisher, 1992.– 453 p.
5. Tzou H. S. Piezoelectric shells (distributed sensing and control of continua).– Dordrecht – Boston – London: Kluwer Academic Publisher, 1993.– 400 p.
6. Карнаухов В. Г., Карнаухова Т. В. Демпфирование резонансных изгибных колебаний гибкой шарнирно опертой вязкоупругой круглой пластины при совместном использовании сенсоров и актуаторов // Теор. прикл. мех.– 2009.– 46.– С. 125–131.
7. Карнаухов В. Г., Козлов А. В., Пятецкая Е. В. Демпфирование колебаний вязкоупругих пластин при помощи распределенных пьезоэлектрических включений // Акуст. вісн.– 2002.– 5, № 4.– С. 15–32.
8. Киричок И. Ф., Пятецька О. В., Карнаухов М. В. Згинні коливання та дисипативний розігрів кільцевої в'язкопружної пластинки з п'єзоелектричними актуаторами при електромеханічному моногармонічному навантаженні // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки.– 2006.– Вип. 2.– С. 84–92.
9. Karnaukhova T. V., Piatetskaya E. V. On the basic relationships of thin termoviscoelastic plates with distributed actuators under monoharmonic loading // Int. Appl. Mech.– 2009.– 45, № 2.– P. 200–214.
10. Karnaukhova T. V., Piatetskaya E. V. Damping the bending resonance vibrations of a rigidly clamped plate with using the actuators // Int. Appl. Mech.– 2009.– 45, № 4.– P. 448–456.
11. Kirichok I. F. Resonance vibrations and heating of electromechanically loaded ring plates with piezoactuators with allowance for the shear deformation // Int. Appl. Mech.– 2009.– 45, № 2.– P. 215–222.
12. Kirichok I. F., Karnaukhov M. V. Monoharmonic vibrations and vibroheating of electromechanically loaded circular plate with piezoelectric actuators with allowance for the shear deformations // Int. Appl. Mech.– 2008.– 44, № 9.– P. 1041–1049.
13. Карнаухов В. Г., Карнаухова Т. В., Зражевская В. Ф. Активное демпфирование резонансных изгибных колебаний гибкой шарнирно опертой круглой пластины при помощи пьезоактуаторов // Теор. прикл. мех.– 2009.– 45.– С. 114–123.
14. Карнаухов В. Г., Козлов В. И., Карнаухова Т. В. Моделирование вынужденных резонансных колебаний и диссипативного розігріву гнучких в'язкопружних пластин із розподіленими актуаторами // Фіз.-мат. модел. інформ. технол.– 2008.– 8.– С. 48–67.
15. Zhuk Ya. A., Guz I. A. Active damping the piezoelectric layers with allowance for geometrical nonlinearities // Int. Appl. Mech.– 2009.– 45, № 1.– P. 118–135.
16. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А. Электроупругость / Механика связанных полей в элементах конструкций: том 5.– К.: Наук. думка, 1989.– 290 с.
17. Карнаухов В. Г., Киричок И. Ф. Электротермовязкоупругость / Механика связанных полей в элементах конструкций: том 4.– К.: Наук. думка, 1988.– 320 с.
18. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек.– М.: Наука, 1972.– 432 с.
19. Григоренко Я. М., Мукоїд А. П. Розв'язання лінійних і нелінійних задач теорії оболонок на ЕОМ.– К.: Либідь, 1992.– 148 с.
20. Ильюшин А. А., Победра Б. Е. Основы математической теории термовязкоупругости.– М.: Наука, 1970.– 280 с.
21. Григоренко Я. М., Беспалова Е. И., Василенко А. Т. и др. Численное решение краевых задач статики ортотропных оболочек вращения на ЭВМ типа М-220.– К.: Наук. думка, 1971.– 152 с.
22. Стивенс К. Поперечные колебания вязкоупругого стержня с начальной кривизной под действием периодической осевой силы // Прикладная механика, сер. Е. Труды Американского общества инженеров-механиков: вып. 4.– М.: Мир, 1969.– P. 168–173.
23. Болкисев А. М., Карлаш В. Л., Шульга Н. А. О зависимости свойств пьезокерамических материалов от температуры // Прикл. мех.– 1984.– 20, № 7.– P. 70–74.