

Реконструкция профиля полюса квадрупольной линзы

А.О.Мыцыков

ИФВЭЯФ ННЦ ХФТИ, г. Харьков

ВВЕДЕНИЕ

Форма полюса магнита – важнейшая характеристика магнита, которая в конечном итоге влияет на абберационные коэффициенты "коротких" линз [1]. Метод конформных отображений находит широкое применение при моделировании полей [2-6] в силу того, что на полюсе магнитное поле не превышает 1Тл. Это позволяет оперировать со скалярным потенциалом – мнимой частью комплексного потенциала. Как известно, поле (в дальнейшем магнитное поле) связано с комплексным потенциалом $z(\omega)$ и функцией, обратной комплексному потенциалу $\omega(z)$, выражением [7]

$$B = -i \sqrt{dz/d\omega} = -i \overline{(d\omega/dz)^{-1}}. \quad (1)$$

Функция $\omega(z)$ является конформным отображением прямолинейной полосы $0 < \text{Im}(z) < H$ плоскости (z) на область полюса (ω). В этой работе исследуется связь параметров поля с геометрией полюса, т.е с параметрами функции $\omega(z)$.

КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ПОЛОСЫ В ПОЛОСУ

Можно показать [7], что отображение прямолинейной полосы $0 < \text{Im}(z) < H$ плоскости (z) на область полюса (ω) (рис.1) имеет вид:

$$\omega(z) = \int_{z_0}^z \exp[G(z)] dz; \quad (2)$$

где

$$G(z) = \frac{1}{2H} \int_{-\infty}^{\infty} v_0(t) \left[\text{cth} \frac{\pi(t-z)}{2H} - \text{th} \frac{\pi t}{H} \right] dt - \frac{1}{2H} \int_{-\infty}^{\infty} v_H(t) \left[\text{th} \frac{\pi(t-z)}{2H} - \text{th} \frac{\pi t}{H} \right] dt \quad (3)$$

Функции v_0 и v_H описывают угол наклона профиля полюса на верхнем и нижнем берегах соответственно. Для квадрупольной симметрии

$$v_0(t) = \begin{cases} -0.5\pi, & t \in [-\infty, 0]; \\ 0, & t \in [0, \infty]. \end{cases} \quad (4)$$

На практике удобно представлять полюс всего 3-я участками: двумя прямолинейными скосами, уходящими на бесконечность, и участком между точками a_1, a_2 . Поэтому

$$v_H(t) = \begin{cases} \text{const} = U_{-\infty}, & t \in [-\infty, a_1]; \\ q(t), & t \in [a_1, a_2]; \\ \text{const} = U_{\infty}, & t \in [a_2, \infty]. \end{cases} \quad (5)$$

$$(12)$$

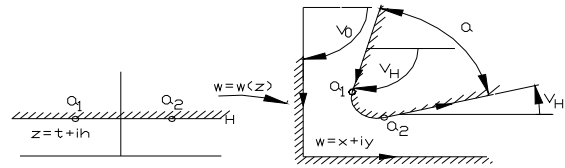


Рис. 1. Отображение прямолинейной полосы в полосу для квадрупольной симметрии.

По соображениям симметрии примем $-a_1 = a_2 = a$; $U_{\infty} = U$; $U_{-\infty} = U_{\infty} + \alpha - \pi$. (6)

При таких соглашениях функция $w(z)$ принимает вид:

$$\omega(z) = \int_{z_0}^z \sqrt{\sqrt{2}/(1 - \exp(-\pi z/H))} \exp[g(z)] dz; \quad (7)$$

где

$$g(z) = \frac{\alpha - \pi}{2\pi} \ln \left[\text{ch} \left(\frac{\pi a}{H} \right) \right] - \frac{\alpha - \pi}{2\pi} \ln(2) + z \frac{(2U + \alpha - \pi)}{2H} + \frac{U}{\pi} \left(\ln \left[\text{ch} \left(\frac{\pi(a-z)}{2H} \right) \right] - \ln \left[\text{ch} \left(\frac{\pi(-a-z)}{2H} \right) \right] \right) - \frac{\alpha - \pi}{\pi} \ln \left[\text{ch} \left(\frac{\pi(-a-z)}{2H} \right) \right] - \frac{1}{2H} \int_{-a}^a v_H(t) \left[\text{th} \frac{\pi(t-z)}{2H} - \text{th} \frac{\pi t}{H} \right] dt \quad (8)$$

Выражения (1,7) дают возможность записать разложение поля в ряд Тэйлора в координатах плоскости w . Действительно, так как

$$d\omega(z) = \sqrt{\sqrt{2}/[1 - \exp(-\pi z/H)]} \exp[g(z)] dz; \quad (9)$$

$$B(z) = \sqrt{[1 - \exp(-\pi z/H)]/\sqrt{2}} \exp[-g(z)], \quad (10)$$

то

$$\frac{d^i B(z)}{d\omega(z)^i} = \frac{\sqrt{[1 - \exp(-\pi z/H)]/\sqrt{2}}}{\exp[g(z)]} \frac{d}{dz} \left[\frac{d^{i-1} B(z)}{d\omega(z)^{i-1}} \right]. \quad (11)$$

Применяя процедуру дифференцирования столько раз, сколько производных мы знаем, получим систему уравнений, в правой части которой требуется разложение поля, в левой – выражения содержащие параметры конформного отображения.

$$\begin{cases} B'(0) = \frac{\pi}{H2\sqrt{2} \exp[2g(0)]}; \\ B^{(3)}(0) = \frac{-\pi^2(\pi + 4Hg'(0))}{H^3 8 \exp[4g(0)]}; \\ B^{(5)}(0) = \frac{\pi^3(2\pi^2 + 13H\pi g'(0) + 26H^2 g'(0)^2 - 9H^2 g''(0)^2)}{H^5 8\sqrt{2} \exp[6g(0)]}; \\ \dots \end{cases} \quad (12)$$

Интеграл по нижнему берегу полосы в выражении (3) для квадрупольной симметрии "занулил" все четные гармоники в разложении поля. На практике это означает, что при соблюдении симметрии относительно плоскостей OX , OY разрешенные для квадрупольей будут только нечетные гармоники. Кроме того, анализ уравнений в системе (11) показывает, что если все нечетные, кроме первой, производные функции $g(z)$ при $z=0$ равны нулю, то производные по полю отличны от нуля через 4 ($B^{(1+4)}(0) \neq 0$). Действительно, рассмотрим интеграл, входящий в функцию $g(z)$ (8).

$$\int_{-a}^a v_H(t) \left[t \operatorname{th} \frac{\pi(t-z)}{2H} - \operatorname{th} \frac{\pi t}{H} \right] dt. \quad (13)$$

При $z=0$ в квадратных скобках стоит нечетная функция. Если положить, что в разложении $v_H(t)$ при $t=0$ кроме постоянной составляющей присутствуют только нечетные степени t

$$v_H(t) = \pi (q_0 + q_1 t + q_3 t^3 + q_5 t^5), \quad (14)$$

то $g'(0) = -\pi/4H$, но все остальные нечетные производные $g^{(1+2i)}(0) = 0$. При этом постоянная составляющая – это угол наклона образующей профиля при $t=0$. Для квадрупольа он равен $\pi/4$ (рис. 2).

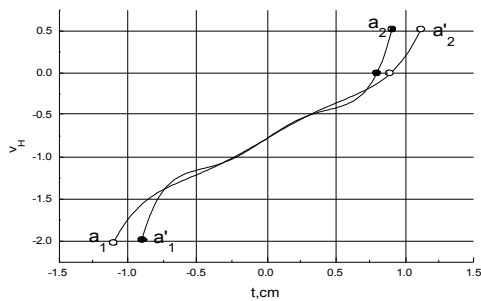


Рис. 2. Зависимость угла наклона образующей профиля полюса от абсциссы плоскости z .

Задав значения производных поля, можно решить систему (12) относительно производных функции g , а

значит, и относительно столько параметров этой функции, сколько производных поля $B^{(i)}(0)$ мы знаем. Такая процедура была проделана для линзы с радиусом апертуры 0.65 см, углом скоса полюса 15° , и требованием занулить 5-ю гармонику. Требования на высшие разрешенные гармоники зачастую определяются поведением железа при больших полях и поэтому здесь специально не оговаривались. На рис. 3 приведены профили половинок полюсов, соответствующие параметрам, сведенным в табл. 1. На рис. 4 приведены поля и градиенты для этих полюсов.

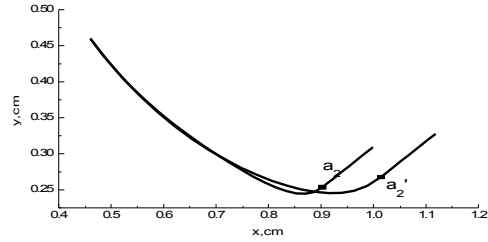


Рис. 3. Образующие профиля полюса.

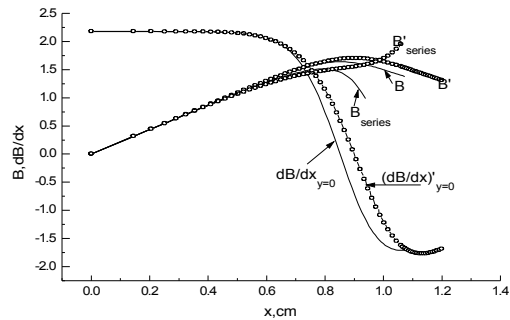


Рис. 4. Поля и градиенты для двух профилей полюса. B_{series} , B'_{series} – поле, полученное по формулам (13); B, B' – поле, полученное по формуле (10).

Параметр	1-ый полюс	2-ой полюс
U	$\pi/6$	$\pi/6$
α	$\pi/6$	$\pi/6$
$a_2 - a_1$	0.91155	1.12017
q_0	-0.25	-0.25
q_1	0.34832	0.30803
q_3	-0.7	-0.2
q_5	1	0.2

Литература

1. В.Плотников. ПТЭ, 1962, №2, с.29–33.
2. S. Snowdon. IEEE Transact. on Nucl.Sci., 1971, v.NS-18 N 3, p.848–852.
3. G.Lee-Whiting, G.Keech, Chalk River, Ontario. 1969: FSD/ING–151, AECL–3253.
4. Ю.Безногих и др. ПТЭ, 1971, №3 с.41.
5. Самсонов Г. В кн.: Электрофизическая аппаратура, 1977, вып.15, с.28–39.
6. L.N.Trefethen SIAM J. Sci. Stat. Comput. 1 (1980),

с.82–102.

- 7 . М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат. Методы теории функции компл. переменного.М.: Наука, 1973.

Статья поступила: в редакцию 25 мая 1998 г.,
в издательство 1 июня 1998 г.