

Измерение параметров электронного пучка в циклических ускорителях с помощью электростатических датчиков

А.Ю.Зелинский, И.М.Карнаухов, В.Н.Лященко, В.И.Троценко

ИФВЭЯФ ННЦ ХФТИ, г. Харьков

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы широкое развитие получили специализированные циклические ускорители с прецизионными пучками (накопители, источники синхротронного излучения), в которых необходимо измерять параметры орбиты с высокой точностью [1]. Важным звеном в этих установках является система диагностики пучка, основу которой составляют датчики тока, положения, бетатронных и синхротронных колебаний пучка. Датчики должны оказывать минимальное воздействие на пучок, иметь высокую температурную стабильность, стойкость к синхротронному излучению. Такими свойствами обладают полевые электростатические датчики (ЭСД) [2], с помощью которых можно измерять все указанные параметры пучка.

Под ЭСД подразумевается один или несколько коротких электродов, вырезанных из стенки пучкопровода и лежащих в одном поперечном сечении. Индуцируемый на ЭСД сигнал в общем случае зависит от интенсивности и положения пучка, формы и размера поперечного сечения пучкопровода, величины и расположения сигнальных электродов. Поэтому при разработке конкретного датчика возникает необходимость математического моделирования его геометрических параметров и электрических характеристик.

Расчету ЭСД посвящен ряд работ [3-7]. Все они основываются на определении заряда, наведенного пучком на электродах датчика. Заряд вычисляется, исходя из решения уравнения Пуассона. Для пучкопровода прямоугольного поперечного сечения обычно используют решение уравнения Пуассона, полученное методом разделения переменных [3,4], для более сложных сечений - методом конформного отображения [4-6] или методом сеток (конечных разностей) [4,7]. Последние два метода значительно сложнее первого, особенно при расчетах с высокой точностью. Их применение оправдано в тех случаях, когда невозможно найти приемлемое аналитическое решение уравнения Пуассона.

В настоящей работе описана методика расчета сигналов датчиков тока и положения пучка прямоугольного, круглого и эллиптического поперечного сечения, основанная на решении

уравнений Пуассона методом функции Грина для соответствующих координатных систем [8]. Такой подход позволяет описать сигналы и характеристики ЭСД удобными для пользования аналитическими выражениями. В качестве основной характеристики ЭСД рассматривается импеданс связи датчика с пучком [9,10], который определяет чувствительность к току (для датчиков интенсивности пучка) или чувствительность к смещению (для датчиков положения пучка).

Рассмотрена возможность получения рабочих измерительных характеристик 4-х электродного датчика положения пучка с использованием найденных выражений, описывающих сигналы на его электродах.

2. ПОЛЕ, СОЗДАВАЕМОЕ ПУЧКОМ

В установившемся режиме будем рассматривать пучок как непрерывную периодическую последовательность M одинаковых сгустков электронов, движущихся по замкнутой орбите вдоль оси Z со скоростью света c . Период следования сгустков - T_b , период вращения по орбите - $T_o = M \cdot T_b$. В циклических ускорителях, например, в источниках синхротронного излучения, формируется пучок с минимальными поперечными размерами. Поэтому при определении поля будем считать, что пучок имеет одномерную продольную плотность распределения заряда $\rho(t,z)$, измеряемую в Кл/м. Заряд движущихся сгустков можно описать бесконечной суммой гармоник, представляемых рядом Фурье [3]:

$$\rho(t,z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_k \exp ik\beta = \frac{P_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} P_k \cos k\beta, \quad (1)$$

где $\beta = 2\pi/(ct-z)\lambda$,

k - номер гармоники;

λ - длина волны первой гармоники;

$P_0/2 = \rho_0$ - постоянная составляющая заряда пучка,

P_k - амплитуды гармоник;

$2\pi c/\lambda = 2\pi/T_b = \omega_b$ - круговая частота первой гармоники.

При расчете поля пучка будем считать, что траектория движения сгустков электронов параллельна оси пучкопровода, форма поперечного

сечения которого постоянна по всей длине, стенки пучкопровода имеют идеальную электродинамическую гладкость и проводимость. Эти условия позволяют рассчитать поле пучка, основываясь на двухмерной электростатической задаче, которая трактуется как нахождение поля бесконечно тонкой заряженной нити внутри бесконечно длинного металлического цилиндра.

Введем в рассмотрение обобщенную криволинейную ортогональную цилиндрическую систему координат $w_1, w_2, w_3 = z$. Электрическое поле, создаваемое гармоникой пучка ρ_k , находится путем решения уравнения Пуассона:

$$\nabla^2 U = - \frac{\sigma_k(w_1, w_2)}{\epsilon_0}, \quad (2)$$

$$\text{где } \sigma_k(w_1, w_2) = \rho_k \frac{\delta(w_1 - w_{1b})\delta(w_2 - w_{2b})}{h_1 h_2};$$

δ - функция Дирака;

h_1, h_2 - метрические коэффициенты Ламе;

w_{1b}, w_{2b} - поперечные координаты пучка;

U - скалярный потенциал электрического поля;

ϵ_0 - электрическая постоянная ($8,8419 \cdot 10^{-12}$ Ф/м).

Решение будет зависеть от краевых условий, задаваемых формой поперечного сечения электропровода, его размером и потенциалом. В дальнейшем будем считать потенциал электропровода равным нулю.

Решив уравнение (2), можно найти напряженность электрического поля пучка

$$E = -\text{grad}U \quad (3)$$

и заряд, индуцируемый на поверхности S электрода датчика

$$q = \epsilon_0 \iint_S E_n ds, \quad (4)$$

где E_n - нормальная составляющая напряженности на стенке пучкопровода.

Электрический сигнал, наведенный на электроде датчика пучком, равен

$$V = q/C \quad (5)$$

где C - емкость электрода по отношению к пучкопроводу.

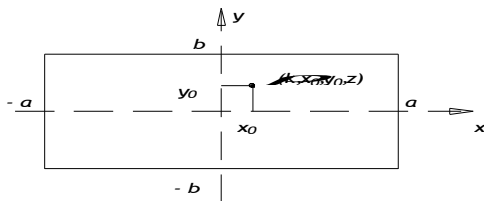


Рис. 1

2.1 Поле в пучкопроводе прямоугольного сечения

Данная задача решается в декартовой системе координат, для которой $w_1=x, w_2=y, h_1=h_2=1$ (рис.1). Геометрические параметры пучкопровода: $2a$ - размер стенки по горизонтали; $2d$ - размер стенки по вертикали.

Решение уравнения Пуассона:

$$\frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y^2} = - \frac{\sigma_k(x, y)}{\epsilon_0},$$

имеет вид:

$$U = \frac{2\rho_k}{\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sh}[\alpha_n(d + my_b)]\text{sh}[\alpha_n(d - my)]}{n\text{sh}(n\pi d/a)} \sin[\alpha_n(x_b + a)]\sin[\alpha_n(x + a)], \quad (6)$$

где $\alpha_n = n\pi/2a; m=1(y > y_b); m=-1(y < y_b)$, или

$$U = \frac{2\rho_k}{\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sh}[\beta_n(a + mx_b)]\text{sh}[\beta_n(a - mx)]}{n\text{sh}(n\pi d/a)} \sin[\beta_n(y_b + d)]\sin[\beta_n(y + d)] \quad (7)$$

где $\beta_n = n\pi/2d; m=1(x > x_b); m=-1(x < x_b)$.

Решение (6) удобно использовать при вычислении заряда на плоскостях $y = \pm d$, а (7) - на плоскостях $x = \pm a$.

Нормальная составляющая напряженности электрического поля E_n на соответствующих стенках электропровода равна

$$E_n(x, y = \pm d) = - \left(\frac{\partial U(6)}{\partial y} \right)_{y=\pm d} = \frac{m\rho_k}{a\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sh}[\alpha_n(d + my_b)]}{\text{sh}(n\pi d/a)} \sin[\alpha_n(x_b + a)] \times \sin[\alpha_n(x + a)] \quad (8)$$

где $m=1(y=d), m=-1(y=-d)$,

$$E_n(x = \pm a, y) = - \left(\frac{\partial U(7)}{\partial x} \right)_{x=\pm a} = \frac{m\rho_k}{d\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sh}[\beta_n(a + mx_b)]}{\text{sh}(n\pi a/d)} \sin[\beta_n(y_b + d)] \times \sin[\beta_n(y + d)] \quad (9)$$

где $m=1(y=a), m=-1(y=-a)$.

2.2 Поле в пучкопроводе круглого сечения

Решение уравнения Пуассона выполняется в цилиндрической системе координат (рис. 2),

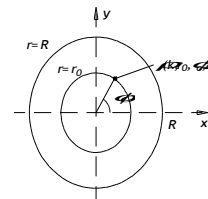


Рис. 2

в которой $w_1=r, w_2=\varphi, h_r=1, h_\varphi=r$, Поперечные координаты пучка r_b, φ_b . Уравнение поперечного сечения пучкопровода $r=R$. Связь с декартовой системой координат:

$$x=r \cos \varphi, y=r \sin \varphi, \quad (10)$$

Решение уравнения Пуассона:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U(r, \varphi)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} = - \frac{\sigma_k(r, \varphi)}{\varepsilon_0} \quad (11)$$

для $r > r_b$ имеет вид:

$$U(r, \varphi) = \frac{\rho_k}{2\pi \varepsilon_0} \left\{ \ln \frac{R}{r} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\left(\frac{r_b r}{R^2} \right)^n - \left(\frac{r_b}{r} \right)^n \right] \cos n(\varphi - \varphi_b) \right\}. \quad (12)$$

Напряженность электрического поля на поверхности пучкопровода

$$E_r(r=R) = \frac{\rho_k}{2\pi \varepsilon_0 R} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_b}{R} \right)^n \cos n(\varphi - \varphi_b) \right\}. \quad (13)$$

2.3 Поле в пучкопроводе эллиптического сечения

Задача решается в эллиптической цилиндрической системе координат, в которой $w_1 = \mu$, $w_2 = \nu$. Координаты пучка μ_b, ν_b (рис. 3).

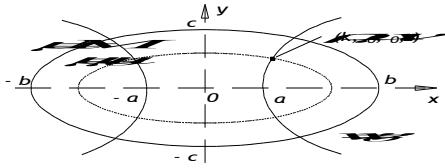


Рис. 3

Уравнение поперечного сечения пучкопровода $\mu=M$, геометрические параметры: $2a$ - межфокусное расстояние, $2d$ - большая ось, $2c$ - малая ось. Связь между ними $a^2 = d^2 - c^2$. Связь эллиптической системы координат с декартовой:

$$x + iy = a \operatorname{ch}(\mu + i\nu). \quad (14)$$

Область определения μ : $0 < \mu < \infty$ область определения ν : $-\pi < \nu < \pi$. Метрические коэффициенты Ламе:

$$h_\mu = h_\nu = a \sqrt{\operatorname{ch}^2 \mu - \cos^2 \nu}. \quad (15)$$

Уравнение Пуассона в эллиптических координатах имеет вид:

$$\frac{\partial^2 U(\mu, \nu)}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2 U(\mu, \nu)}{\partial \nu^2} = - \frac{\sigma_k(\mu, \nu)}{\varepsilon_0}. \quad (16)$$

Его решение для $\mu > \mu_b$ представляется следующим выражением:

$$U = \frac{\rho_k}{2\pi \varepsilon_0} \left\{ M - \mu + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\frac{\operatorname{sh}[n(M - \mu)]}{\operatorname{ch}(nM)} \operatorname{ch}(n\mu_b) \cos(n\nu_b) \cos(n\nu) + \frac{\operatorname{sh}[n(M - \mu)]}{\operatorname{sh}(nM)} \operatorname{sh}(n\mu_b) \sin(n\nu_b) \sin(n\nu) \right] \right\} \quad (17)$$

Напряженность электрического поля на поверхности пучкопровода равна:

$$E_\mu (\mu = M) = \frac{\rho_k}{2\pi \varepsilon_0 a \sqrt{\operatorname{ch}^2 M - \cos^2 \nu}} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\operatorname{ch}(n\mu_b) \cos n\nu_b \cos n\nu}{\operatorname{ch} nM} + \frac{\operatorname{sh}(n\mu_b) \sin n\nu_b \sin n\nu}{\operatorname{sh} nM} \right] \right\} \quad (18)$$

3. ИЗМЕРЕНИЕ ЗАРЯДА (ТОКА) ПУЧКА

Датчиком заряда или тока пучка (ДТП) может быть электрод в виде отрезка пучкопровода длиной $2l$ по оси Z . Сигнал, индуцируемый пучком на датчике, будет равен согласно (4), (5)

$$V = \frac{\varepsilon_0}{C} \iint_s E_n ds.$$

Интегрирование по поперечному сечению датчика дает значение сигнала

$$V_k = p_k 2l g_k / C,$$

где $p_k = P_k \cos(k\omega t)$, $g_k = \sin(2lk\pi/\lambda)/(2lk\pi/\lambda)$.

Если выполняется условие $2lk \ll \lambda$ при $k \gg 1$, то при измерении сигнала на низких гармониках можно считать $g_k = 1$ и

$$V_k = p_k 2l / C. \quad (19)$$

Если при $k \gg 1$ $2lk$ остается меньше длины сгустков пучка, то ДТП будет достаточно широкополосным, чтобы регистрировать импульсы заряда пучка

$$V = \sum_k V_k = \frac{2l}{C} \sum_k p_k g_k \approx p(t) \frac{2l}{C}, \quad (20)$$

$$\text{где } p(t) = \frac{P_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} P_k \cos k\omega t.$$

Измеряя узкополосный (19) или широкополосный (20) сигнал ДТП, можно определить плотность распределения заряда конкретной гармоники пучка

$$p_k = V_k C / 2l,$$

или плотность распределения заряда пучка

$$p(t) = VC / 2l.$$

На практике при измерениях на кольцевых ускорителях чаще оперируют понятием тока пучка вместо плотности распределения заряда пучка. Связь между этими величинами следующая:

$$p(t) = i(t)/c, p_k = i_k/c = (I_k/c) \cos(k\omega t), \quad (21)$$

$$\text{где } i(t) = \frac{I_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} I_k \cos k\omega t;$$

I_k - амплитуды гармоник тока пучка;

$I_0/2$ - постоянная составляющая тока.

Подставив (21) в (19), (20), получим

$$V_k = i_k (2l/cC) = i_k Z, V \approx i(f) (2l/cC) \approx i(f) Z, \quad (22)$$

где $Z = 2l/cC$ - импеданс связи датчика с пучком.

Импеданс связи характеризует чувствительность ДТП, которую можно измерять в Ом или В/мА, или В/электрон. Зная величину импеданса связи ДТП, можно измерить ток пучка ускорителя $i_k = V_k/Z$ или $i(t) = V/Z$.

Данная методика имеет определенное ограничение по точности измерения, связанное с конечным значением полосы пропускания ДПП и с зависимостью амплитуд гармоник тока от формы и длительности сгустков пучка. Несмотря на это, ДПП может найти применение, например, для измерения времени жизни пучка при быстро протекающих процессах или при измерении положения пучка, о чем будет сказано ниже.

4. ИЗМЕРЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ПУЧКА

Из выражений (8,9,13,18) видно, что напряженность электрического поля на поверхности пучкопровода является функцией положения пучка. Этот факт используется для измерения координат пучка. Рассмотрим в качестве датчика положения пучка (ДПП) систему из нескольких электродов, размещенных в одном поперечном сечении и являющихся элементами стенки пучкопровода. Обычно ограничиваются четырьмя электродами, расположенными симметрично относительно осей декартовых координат. Электроды не размещаются по горизонтальной оси, чтобы избежать попадания на них синхротронного излучения.

Различные комбинации из сигналов электродов ДПП позволяют образовать датчик смещения пучка по оси X (ДППХ) и датчик смещения пучка по оси Y (ДППY).

Установим взаимосвязь сигналов на электродах ДПП с положением пучка для рассматриваемых сечений пучкопровода.

4.1 Сигналы ДПП прямоугольного сечения

На рис.4 схематически изображен ДПП в декартовой системе координат.



Рис. 4

Для упрощения интегрирования будем рассматривать электроды датчика в виде прямоугольников. Обозначим сигналы, наводимые пучком на электродах, V_{Arec} , V_{Brec} , V_{Crec} , V_{Drec} . Электроды расположены в плоскостях широких горизонтальных стенок пучкопровода, их размеры: $2u$ - по оси X, $2l$ - по оси Z. Координаты центров симметрии электродов

$$\begin{aligned} x_A = x_C, x_B = x_D = -x_A, y_A = y_B = d, \\ y_C = y_D = -d, x_A = x_B = x_C = x_D = 0. \end{aligned}$$

Электрические емкости всех электродов одинаковы и равны C .

Определим сигнал, наводимый k -й гармоникой пучка, на электродах A и C , используя выражения (4),(5),(8)

$$\begin{aligned} V_{A,Crec} &= \frac{\varepsilon_0}{C} \int_s E_n|_{y=\pm d} ds = \frac{\varepsilon_0}{C} \int_{-l}^l dz \int_{x_A-u}^{x_A+u} E_n dx \\ &= P_k \frac{2lg_k}{C} g_{A,Crec}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\text{где } g_k = \frac{\sin(2lk\pi/\lambda)}{2lk\pi/\lambda},$$

$$g_{A,Crec} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\text{sh}[a_n(d+my_b)]}{n\pi \text{sh}\left(\frac{n\pi d}{a}\right)} \sin[a_n(x_b+a)] \sin[a_n(x_A+a)] \sin[a_n u],$$

$$m=1 (V_A), m=-1 (V_C).$$

Обычно измерения ведутся на первой гармонике, для которой реализуется соотношение $2lk \ll \lambda$ даже на частотах 500 - 700 МГц. Тогда $g_k=1$ и в дальнейшем мы не будем принимать его во внимание.

По аналогии с ДПП будем рассматривать сигналы ДПП, выраженные через импедансы связи и ток пучка. Выполнив замену (21) в (23), можно записать

$$V_{A,Crec} = i_k Z_{A,Crec}, \quad (24)$$

где $Z_{A,Crec} = (2l/cC) g_{Arec}$ - импеданс связи электрода A или C с пучком.

Чтобы вычислить сигналы V_{Brec} , V_{Drec} , необходимо в (24) заменить x_A на $x_B = -x_A$:

$$V_{Brec} = V_{Arec}(-x_A, m=1), V_{Drec} = V_{Arec}(-x_A, m=-1).$$

Смещение пучка по координатам X и Y можно регистрировать с помощью следующих комбинаций сигналов ДПП:

$$V_{Xrec} = (V_A + V_C) - (V_B + V_D) - \text{сигнал ДППХ}, \quad (25)$$

$$V_{Yrec} = (V_A + V_B) - (V_C + V_D) - \text{сигнал ДППY}. \quad (26)$$

Для правильного измерения положения пучка необходимо исключить зависимость от тока пучка сигналов V_{Xrec} , V_{Yrec} . Это можно сделать, разделив выражения (25), (26) на сигнал датчика тока (22) или на сумму сигналов со всех электродов ДПП, которая незначительно зависит от положения пучка в апертуре датчика. Рассмотрим второй случай. Суммарный сигнал ДПП равен:

$$V_{\Sigma rec} = (VA+VB) + (VC+VD) = ikZ_{\Sigma rec}, \quad (27)$$

где $Z_{\Sigma rec}$ - импеданс связи ДПП.

После деления на $V_{\Sigma rec}$ сигналы смещения пучка будут описываться выражениями:

$$V_{OXrec} = \frac{V_{Xrec}}{V_{\Sigma rec}} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} Hch(n\pi y_b/a) \sin(n\pi x_b/a)}{\sum_{n=1}^{\infty} Nch[(2n-1)\pi y_b/2a] \cos[(2n-1)\pi x_b/2a]}, \quad (28)$$

$$V_{OYrec} = \frac{V_{Yrec}}{V_{\Sigma rec}} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} Ssh[(2n-1)\pi y_b/2a] \cos[(2n-1)\pi x_b/2a]}{\sum_{n=1}^{\infty} Nch[(2n-1)\pi y_b/2a] \cos[(2n-1)\pi x_b/2a]}, \quad (29)$$

где
$$H = \frac{\text{sh}(n\pi d/a)}{2n\text{sh}(2n\pi d/a)} \sin\left(\frac{n\pi x_A}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi u}{a}\right),$$

$$S = \frac{\text{ch}[(2n-1)\pi d/2a]}{(2n-1)\text{sh}[(2n-1)\pi d/2a]} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x_A}{2a}\right) \sin\left(\frac{(2n-1)\pi u}{2a}\right),$$

$$N = \frac{\text{sh}[(2n-1)\pi d/2a]}{(2n-1)\text{sh}[(2n-1)\pi d/2a]} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x_A}{2a}\right) \sin\left(\frac{(2n-1)\pi u}{2a}\right).$$

4.2 Сигналы ДПП круглого сечения

ДПП в камере круглого сечения изображен на рис. 5. Координаты центров электродов: $\varphi_A, \varphi_B = 180^\circ - \varphi_A$, $\varphi_C = -\varphi_A$, $\varphi_D = \varphi_A - 180^\circ$, $r_{A,B,C,D} = R$, $z_{A,B,C,D} = 0$.

Все электроды имеют одинаковые размеры 2ψ по координате φ , $2l$ по координате Z , равные емкости C и представляют собой элементы поверхности пучкопровода, вырезанные из цилиндра $r=R$ плоскостями $\varphi_1 = \varphi_A - \psi$, $\varphi_2 = \varphi_A + \psi$, $\varphi_3 = \varphi_B + \psi$, $\varphi_4 = \varphi_B - \psi$, $z_1 = -l$, $z_2 = l$ и т.д.

Сигнал, наводимый пучком на электроде А, найдем, используя (4),(5),(13):

$$V_{A\text{rin}} = \frac{\varepsilon_0}{C} \iint_S E_r R d\varphi dz = \frac{\varepsilon_0}{C} \int_{-l}^{+l} dz \int_{\varphi_A-\psi}^{\varphi_A+\psi} E_r R d\varphi = p_k \frac{2l}{C} g_{A\text{rin}}, \quad (30)$$

$$g_{A\text{rin}} = \frac{1}{\pi} \left[\psi + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_b}{R} \right)^n \frac{\sin(n\psi)}{n} \cos[n(\varphi_A - \varphi_b)] \right].$$

Выполнив замену (21) в (30), получим:

$$V_{A\text{rin}} = i_k Z_{A\text{rin}}, \quad (31)$$

где $Z_{A\text{rin}} = (2l/cC) g_{A\text{rin}}$ – импеданс связи электрода А с пучком.

Сигналы на остальных электродах определяются путем замены φ_A соответствующей координатой.

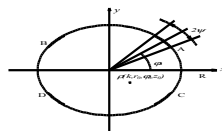


Рис. 5

Рассмотрим случай одинаковой чувствительности ДППХ и ДППУ, для которого оптимальным расположением электродов будет $\varphi_A = 45^\circ$. Тогда сигналы датчиков смещения будут равны:

$$V_{X\text{rin}} = (V_{A\text{rin}} + V_{C\text{rin}}) - (V_{B\text{rin}} + V_{D\text{rin}}), \quad (32)$$

$$V_{Y\text{rin}} = (V_{A\text{rin}} + V_{B\text{rin}}) - (V_{C\text{rin}} + V_{D\text{rin}}), \quad (33)$$

$$V_{\Sigma\text{rin}} = V_{A\text{rin}} + V_{B\text{rin}} + V_{C\text{rin}} + V_{D\text{rin}} = i_k Z_{\Sigma\text{rin}}. \quad (34)$$

Независимые от тока сигналы смещения пучка равны:

$$V_{OX\text{rin}} = \frac{V_{X\text{rin}}}{V_{\Sigma\text{rin}}} = \frac{2 \sum_{n=1}^{\infty} K r_b^{(2n-1)} \cos[\varphi_b(2n-1)]}{\psi + 2 \sum_{n=1}^{\infty} Q r_b^{2n} \cos(\varphi_b 2n)}, \quad (35)$$

$$V_{OY\text{rin}} = \frac{V_{Y\text{rin}}}{V_{\Sigma\text{rin}}} = \frac{2 \sum_{n=1}^{\infty} T r_b^{(2n-1)} \sin[\varphi_b(2n-1)]}{\psi + 2 \sum_{n=1}^{\infty} Q r_b^{2n} \cos(\varphi_b 2n)}, \quad (36)$$

где
$$K = \frac{\cos[\varphi_A(2n-1)] \sin[\psi(2n-1)]}{(2n-1)R^{(2n-1)}},$$

$$T = \frac{\sin[\varphi_A(2n-1)] \sin[\psi(2n-1)]}{(2n-1)R^{(2n-1)}},$$

$$Q = \frac{\cos(\varphi_A 2n) \sin(\psi 2n)}{2n R^{2n}}.$$

Представлять результаты расчетов удобнее в декартовой системе координат, для чего круговые координаты пересчитываются в декартовы согласно (10), а размеры электродов по координате

$$\varphi : l_\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} h_\varphi d\varphi = 2R\psi.$$

4.3 Сигналы ДПП эллиптического сечения

ДПП располагается в эллиптической камере с параметрами, изображенными на рис. 6.

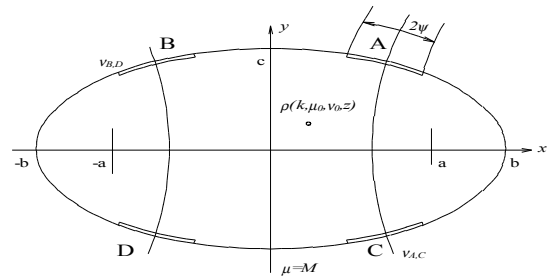


Рис. 6

Предполагается, что все электроды имеют одинаковые емкости C , размеры 2ψ по координате v и $2l$ по координате z . Электроды представляют собой элементы поверхности, вырезанные из эллиптического цилиндра $\mu=M$ плоскостями $v_1 = v_A - \psi$, $v_2 = v_A + \psi$, $z_1 = l$, $z_2 = -l$ и т.д. для каждого электрода. Координаты центров электродов равны $v_A, v_B = 180^\circ - v_A$, $v_C = -v_A$, $v_D = v_A - 180^\circ$, $\mu_{A,B,C,D} = M$, $z_{A,B,C,D} = 0$.

Сигнал, наводимый пучком на электроде А, найдем, используя (4), (5), (18):

$$V_{Aell} = \frac{\varepsilon_0}{C} \int_{-l}^{+l} dz \int_{v_{A-\psi}}^{v_{A+\psi}} E_{\mu} a \sqrt{\text{ch}^2(\mu) - \cos^2(\nu)} d\nu = p_k \frac{2l}{C} g_{ell}, \quad (37)$$

$$g_{ell} = \frac{1}{\pi} \left\{ \psi + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\psi)}{n} \left[\frac{\text{ch}(n\mu_b) \cos(n\nu_b)}{\text{ch}(nM)} \cos(n\nu_A) + \frac{\text{sh}(n\mu_b) \sin(n\nu_b)}{\text{sh}(nM)} \sin(n\nu_A) \right] \right\}$$

Выполнив замену (21) в (37), получим

$$V_{Aell} = i_k Z_{Aell}, \quad (38)$$

где $Z_{Aell} = (2l/cC)g_{Aell}$ - импеданс связи электрода А с пучком.

Сигналы на остальных электродах вычисляются путем замены v_A на координаты соответствующих электродов.

Сигналы датчиков смещения и суммарный сигнал ДПП равны:

$$V_{xell} = (V_A + V_C) - (V_B + V_D), \quad (39)$$

$$V_{yell} = (V_A + V_B) - (V_C + V_D), \quad (40)$$

$$V_{\Sigma ell} = V_A + V_B + V_C + V_D = i_k Z_{\Sigma ell}. \quad (41)$$

Сигналы смещения пучка в эллиптическом датчике равны:

$$V_{OXell} = \frac{V_{Xell}}{V_{\Sigma ell}} = \frac{2 \sum_{n=1}^{\infty} U \text{ch}[(2n-1)\mu_b] \cos[(2n-1)\nu_b]}{\psi + 2 \sum_{n=1}^{\infty} L \text{ch}(2n\mu_b) \cos(2n\nu_b)}, \quad (42)$$

$$V_{OYell} = \frac{V_{Yell}}{V_{\Sigma ell}} = \frac{2 \sum_{n=1}^{\infty} W \text{sh}[(2n-1)\mu_b] \sin[(2n-1)\nu_b]}{\psi + 2 \sum_{n=1}^{\infty} L \text{ch}(2n\mu_b) \cos(2n\nu_b)}, \quad (43)$$

$$\text{где } U = \frac{\sin[(2n-1)\psi] \cos[(2n-1)\nu_A]}{(2n-1) \text{ch}[(2n-1)M]},$$

$$W = \frac{\sin[(2n-1)\psi] \sin[(2n-1)\nu_A]}{(2n-1) \text{sh}[(2n-1)M]},$$

$$L = \frac{\sin(2n\psi) \cos(2n\nu_A)}{2n \text{ch}(2nM)}.$$

Заменяв эллиптические координаты на декартовы, согласно переходам (14), можно вычислить V_{OXell}, V_{OYell} в удобном линейном метрическом представлении. Линейные размеры электродов по координате

$$v : \Delta v = \int_{v_1}^{v_2} h_v dv.$$

4.4 Характеристики ДПП

Основными характеристиками ДПП являются импедансы связи Z_A, Z_{Σ} , чувствительность к смещению по X и по Y в центре датчика

$$K_X = \frac{\partial V_{OX}}{\partial x_b}, K_Y = \frac{\partial V_{OY}}{\partial y_b} (x_b = y_b = 0), \text{ или} \quad (44)$$

$$S_X = K_X Z_{\Sigma}, S_Y = K_Y Z_{\Sigma}$$

а также нелинейность сигналов ДППХ и ДППУ, которую можно определить следующими выражениями:

$$\Delta V_{OX} = \frac{V_{OX} - V_{LX}}{V_{OX}}, \Delta V_{OY} = \frac{V_{OY} - V_{LY}}{V_{OY}}, \quad (45)$$

где $V_{LX} = K_{Xxb}, V_{LY} = K_{Yyb}$ - линейное приближение сигналов V_{OX}, V_{OY} .

Импедансы связи позволяют определить абсолютные значения всех сигналов ДПП, диапазон и характер их изменения, а также выполнить математическое моделирование датчика. Знание чувствительности дает возможность проводить индикационные измерения положения пучка, а графики нелинейности сигналов смещения - оценить погрешность такого измерения.

Для примера приведем результаты расчетов некоторых характеристик и параметров ДПП, имеющего эллиптическое поперечное сечение с размерами: большая ось $2d = 60$ мм, малая ось $2c = 36$ мм, размеры электродов $2\psi = 0,08$ рад (4,57 мм), $2l = 4,57$ мм. Измеряемая гармоника тока 700 МГц,

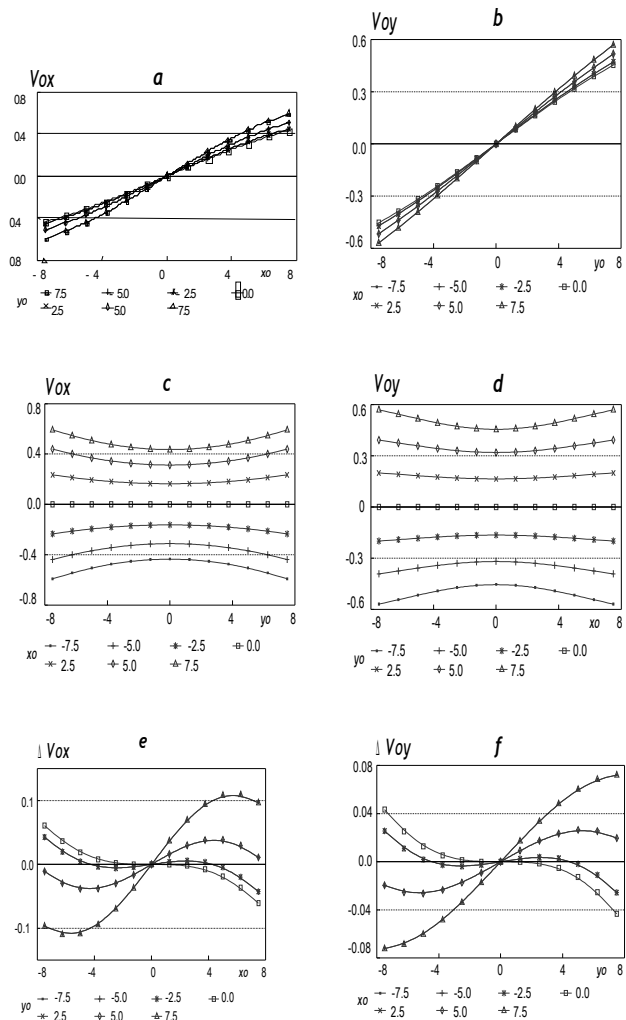


Рис. 7

электрическая емкость каждого электрода 2 пФ.

Оптимизация датчика проводилась по условию: вблизи центра K_X должна быть равна K_Y . На рис. 7,

а, б показаны зависимости импедансов связи Z_A, Z_Σ от положения пучка. Видно, что Z_A имеет большую нелинейность; Z_Σ изменяется в апертуре датчика незначительно, тогда как Z_A изменяется в несколько раз. Соответственно в таком же динамическом диапазоне будут меняться измеряемые сигналы.

На рис. 7, с, d приведены графики $V_{OX}=f(x_b, y_b)$, $V_{OY}=f(x_b, y_b)$ на рис 7, е, f - графики $\Delta V_{OX}=f(x_b, y_b)$, $\Delta V_{OY}=f(x_b, y_b)$ Они наглядно демонстрируют зависимость измеряемых сигналов от положения пучка и возможную величину погрешности при индикационном измерении.

Импеданс связи $Z_\Sigma=3,92$ Ом ($x_b=y_b=0$).

Координаты центра электрода А: $x_A=11,428$ мм, $y_A=16,434$ мм.

Чувствительность $K_X = K_Y = 6,6$ %/мм.

Чувствительность $S_X = S_Y=0,259$ Ом/мм.

4.5. Рабочие характеристики ДПП

Для практического измерения координат пучка необходимо иметь характеристики ДПП в виде

$$x_b = F_X(V_{OX}, V_{OY}), y_b = F_Y(V_{OX}, V_{OY}). \quad (46)$$

Так как найденные выше выражения для V_{OX}, V_{OY} относительно x_b, y_b не решаются, то необходимые характеристики можно получить, например, путем аппроксимации в виде ряда Тейлора. Для функции двух переменных разложение в ряд Тейлора будет иметь вид:

$$x_b = \sum_{m,n} a_{m,n} V_{OX}^m V_{OY}^n, y_b = \sum_{m,n} b_{m,n} V_{OX}^m V_{OY}^n, \quad (47)$$

где m, n - целые положительные числа;
 $0 \leq m, n \leq k; 0 \leq m + n \leq k;$

k - порядок ряда Тейлора ;

$$a_{m,n} = \frac{1}{m!n!} \frac{\partial^{m+n} F_X}{\partial V_{OX}^m \partial V_{OY}^n}, b_{m,n} = \frac{1}{m!n!} \frac{\partial^{m+n} F_Y}{\partial V_{OX}^m \partial V_{OY}^n}.$$

Точность разложения (а значит - измерения) будет зависеть от порядка k и определяться путем последовательного приближения. Так как F_X, F_Y неизвестны, то для определения коэффициентов ряда Тейлора $a_{m,n}, b_{m,n}$ необходимо вычислить V_{OX}, V_{OY} для соответствующего множества точек x_b, y_b , составить и решить две системы линейных алгебраических уравнений (47) с L неизвестными $a_{m,n}, b_{m,n}$. Количество неизвестных связано с точностью измерения, то-есть с порядком ряда k : $L = (k+2)(k+1)/2$.

В результате решения будут найдены значения $a_{m,n}, b_{m,n}$ разложений (47), которые являются коэффициентами рабочих измерительных характеристик конкретных ДППХ и ДППУ.

Для индикационных измерений координат пучка пользуются линейным приближением разложения в ряд Тейлора, для которого $k=1$. Тогда

$$\begin{aligned} x_b &= a_{0,0} + a_{1,0} V_{OX} + a_{0,1} V_{OY}, \\ y_b &= b_{0,0} + b_{1,0} V_{OX} + b_{0,1} V_{OY}. \end{aligned} \quad (48)$$

Если геометрический и электрический центры ДПП совпадают, то

$$a_{0,0} = b_{0,0} = 0, a_{1,0} = 1/K_X, b_{1,0} = 1/K_Y. \quad (49)$$

Можно применить и более простые выражения

$$x_b = V_{OX}/K_X, y_b = V_{OY}/K_Y. \quad (50)$$

Подобная методика измерения положения пучка применяется на современных ускорителях и обеспечивает довольно высокую точность. Например, в работе [4] получена абсолютная точность измерения лучше, чем ± 50 мкм в камере прямоугольного сечения 60 мм \times 30 мм, при порядке разложения $k=7$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные выражения позволяют рассчитать электростатические датчики тока и положения пучка прямоугольного, круглого и эллиптического поперечного сечения, используя относительно простой математический аппарат; с их помощью можно получить рабочие характеристики ДПП, исследовать погрешности измерения положения пучка, например, при наличии конструктивной асимметрии электродов, при введении в датчик дополнительных электродов и т.п.

Описанная методика расчета ДПП с эллиптическим сечением использовалась при разработке накопителя НР-2000 и источника синхротронного излучения ИСИ-800 [11].

Авторы благодарны Буляку Е.В. за интерес к работе и полезные критические замечания.

Литература

1. Proceedings of the 1995 Particle Accelerator Conferenc, V.1-5, May 1-5 1995, Dallas, Texas, IEEE, 1996.
2. В.А.Москалев, Г.И.Сергеев, В.Г.Шестаков, Москва, Атомиздат, 1980.
3. J.H.Cuperus, NIM 145 (1977) 219-231.
4. Eva S. Bozoki, NIM A307 (1991) 195-206.
5. Klaus Halbach, NIM A260 (1987) 14-32.
6. J.Borer and C.Bovet, LEP Note 461, 28.7.83.
7. В.Н.Лященко, В.И.Пичиц, препринт ХФТИ АН УССР, 1989, 9 с.
8. Ф.М.Морс, Г.Фешбах, Москва, Иностранная литература, Т.1, 1958; Т.2, 1960.
9. T.Ring and R.J.Smith, preprint Daresbury Laboratory DL\SCIP747A, April, 1991.
10. J.Borer and R.Jung, CERN/LEP-BI/84-14, Geneva, October, 1984.
11. V.Androsov, V.Bar'yakhtar, E.Bulyak et al., Journal of Electron Spectroscopy and Related Phenomena, 68 (1994), p. 747-755.

Статья поступила: в редакцию 25 мая 1998 г.,
в издательство 1 июня 1998 г.