УДК 538.945

ЗАВИСИМОСТЬ ПЛОТНОСТИ КРИТИЧЕСКОГО ТОКА ОТ МАГНИТНОГО ПОЛЯ И СОДЕРЖАНИЯ ВЫДЕЛИВШЕЙСЯ ФАЗЫ В Nb-Ti-СВЕРХПРОВОДНИКЕ

В.В.Слезов, О.В. Черный

Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»

Проведено обчислення середньої об'ємної сили пінінгу, яка створена хаотично розподіленими центрами пінінгу стрічкового типу. Сила взаємодії між вихором і центрами пінінгу розглядається з урахуванням градієнту магнітної індукції поблизу краю пластин. Визначена залежність густини критичного струму від магнітного поля і змісту не надпровідної фази.

Проведено вычисление средней объемной силы пиннинга, созданной хаотично распределенными центрами пиннинга ленточного типа. Сила взаимодействия между вихрем и центрами пиннинга рассматривается с учетом градиента магнитной индукции вблизи края пластинок. Определена зависимость плотности критического тока от магнитного поля и содержания несверхпроводящей фазы.

The paper presents the calculation of the mean pinning volume force created by randomly distributed centers of tape–type pinning. The force of vortex-pinning center interaction is considered with taking into account the magnetic induction gradient near the plate edges. The critical current density is determined as a function of the magnetic field and non superconducting phase content.

В настоящее время на ниобий-титановых сверхпроводниках получены очень высокие значения плотности критического тока J_c. Так, для многоволоконного сверхпроводника на основе сплава НТ-50 (с примерно равным весовым содержанием компонент) было достигнуто значение $J_c=4{,}0\times10^5$ А/см^2 в магнитном поле 5 Тл при температуре 4.2 K [1]. Известно, что величина J_c зависит от микроструктурных параметров сплава - объемного содержания, количественной плотности, формы и размеров частиц, выделившихся в процессе диффузионного распада пересыщенного твердого раствора [2]. Субструктура в Nb-Ti–сверхпроводниках представляет собой набор тонких лент из несверхпроводящей α -Ti–фазы, разделенных сверхпроводящими ниобий титановыми прослойками. Анализ микроструктуры в оптимизированных по J_c образцах показал, что толщина ленточных выделений, вытянутых вдоль оси провода, равна 1…4 нм, расстояние между выделениями лежит в интервале 2…10 нм, а их длина составляет 1000…2000 нм [3]. В поперечном сечении сверхпроводника эти ленточные выделения расположены хаотично. Экспериментально найдено, что значение J_c в Nb-Ti–сверхпроводниках при относительно невысоких количествах выделившейся фазы φ линейно растет с увеличением содержания титановых частиц (J_c~φ) [4,5]. Согласно теоретической оценке, проведенной для слоистой модели, сила пиннинга магнитного потока, а значит и J_c, достигают максимума при φ ~40 об.% Ti [6]. Для обычных ниобий-титановых сверхпроводников типа НТ-50 практическая реализация таких высоких значений φ является довольно сложной задачей. Тем не менее при длительных термообработках удается выделить из сплава достаточное количество несверхпроводящей титановой фазы вплоть до 30…35 об.% [1]. Здесь необходимо отметить, что в сверхпроводниках другого типа с искусственными центрами пиннинга относительно просто решаются проблемы, связанные с получением композитов требуемого состава и геометрии. В настоящее время достигнуты успехи в получении таких сверхпроводников с высокими значениями J_c не только в области низких 1…2 Тл, но и в области средних 4…5 Тл магнитных полей [7]. В работе [7] также приведена эмпирическая формула, хорошо описывающая характер изменения J_c от микроструктуры сверхпроводников такого типа. В настоящей работе для системы Nb-Ti нами дано теоретическое обоснование зависимости J_c от магнитного поля и объемной доли ленточных частиц несверхпроводящей титановой фазы.

Как показывает эксперимент, выделения α -Ti-фазы близки по форме к параллелепипеду *a*, *b*, *l*, где *a* — толщина, *b* — ширина и *l* — длина вдоль оси провода *c*. Выделения хаотично расположены в

Считаем, что форма всех выделений примерно одинаковая и их количество на единицу объема равно n, относительная объемная доля для частиц на единицу объема $\varphi = n \cdot v$, где объем частицы $v = a \cdot b \cdot l$.

Площадь продольного сечения частиц вдоль оси провода $S_{\parallel} = b \cdot l$, а площадь поперечного сечения $S_{\perp} = a \cdot b$. Относительная доля плоскостей $S_{\perp}$ на единицу площади есть

$$S_{\perp} = n \cdot l \cdot ab = nv = \varphi \ . \tag{1}$$

Здесь мы учли, что число пересечений оси c в интервале dh (dh — отрезок на оси c) в единице объема есть $n \cdot dh$, а число пересечений в любой точке оси c с частицей в единице объема есть nl, каждое пересечение дает площадь ab.

Силой пиннинга считаем в основном силы взаимодействия (“прилипания”) вихрей с пластинками α -Ti, краевые эффекты не учитываем.

Все силы, действующие на вихри в образце, вычисляем на единицу объема. Критическим состоянием при протекании критического тока на единицу объема j_c, как известно, считается состояние, когда вихри неподвижны вплоть до протекания максимального тока. Это означает, что все силы, действующие на вихри в единице объема, уравновешены при этом критическом токе. Таким образом, сила взаимодействия вихрей с транспортным критическим током в единице объема равная, как известно, силе Лоренца в единице объема $\mathbf{F}_L$, уравновешивается силами пиннинга в единице объема $\mathbf{F}_p$ [8]

$$\mathbf{F}_L = \frac{1}{c}[\mathbf{j}_c \mathbf{H}] = \mathbf{F}_p \ . \tag{2}$$

При этом нужно учесть, что ток течет только в сверхпроводящей области, относительная величина которой есть $1 - \varphi$. Кроме того, в этой сверхпроводящей области ток течет только между вихрями. Это означает, что сверхпроводящую часть единицы объема нужно умножить на относительную величину её объема без ядер вихрей $(1 - n_L \cdot S) = \left(1 - \frac{H}{H_{c2}}\right)$, где n_L — плотность вихрей; S — площадь ядра вихря; H_{c2} — верхнее критическое поле; H — приложенное магнитное поле ($H \approx B$ — магнитной индукции). Таким образом, в формулу входит ток, который в единице объема течет только по части объема. Он связан со средним током J_c в единице объема соотношением

$$j_c = J_c \cdot \left(1 - \frac{H}{H_{c2}}\right)^{-1} (1 - \varphi)^{-1} . \tag{3}$$

Для средней плотности тока в единице объема J_c получим:

$$J_c = \frac{c}{H} F_p \cdot \left(1 - \frac{H}{H_{c2}}\right)(1 - \varphi) . \tag{4}$$

Вычислим теперь элементарную силу пиннинга, определяемую “прилипанием” вихрей к выделениям α -Ti. Для этого у края вытянутой титановой пластинки вычислим возвращающую силу, которая появляется при смещении вихря у её поверхности в направлении, перпендикулярном протеканию транспортного тока. В равновесном состоянии в образце в магнитном поле, в котором течет транспортный ток меньший критического, все силы на вихри уравновешены.

У края пластинок имеется градиент магнитной индукции $\mathbf{B}$ и, следовательно, в сверхпроводящей области у края течет ток $\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi}\mathrm{rot}\mathbf{B}$, $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M}$.

Для тока, текущего у поверхности пластинок, магнитный момент $\mathbf{M}$ имеет вид для $\kappa >> 1$ с точностью до членов порядка $\ln \kappa^2 / \kappa^2$ по сравнению с единицей $\left(\kappa = \frac{\lambda}{\xi}\right)$:

$$\mathbf{M} = - \frac{\mathbf{\Phi}}{32\pi^2 \lambda^2} \cdot \ln \frac{H}{H_{c2}} . \tag{5}$$

Здесь H_{c2} — верхнее критическое поле; λ — глубина проникновения магнитного поля в сверхпроводнике; $\mathbf{H}$ — внешнее магнитное поле; ξ — длина когерентности; $\mathbf{\Phi}$ — магнитный поток одного вихря у поверхности пластинки.

В приложении, следуя [8], показано, что $\mathbf{\Phi}$ имеет вид:

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}_0 [1 - h(\mathbf{r_0})] , \tag{6}$$

где $\mathbf{\Phi}_0$ — квант магнитного потока; $\mathbf{h}$ — магнитное поле, определяемое уравнением:

$$\mathbf{h} + \lambda^2 \mathrm{rot\ rot}\,\mathbf{h} = 0 , \mathbf{h}|_S = \mathbf{e} ,$$

где S — произвольная достаточно гладкая поверхность; $\mathbf{h}|_S$ — поле на поверхности; $\mathbf{e}$ — единичный вектор вдоль магнитного поля.

Для плоской поверхности

$$h(x) = e^{-x/\lambda} . \tag{7}$$

Для плотности тока по величине получим, учитывая, что $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M}(x)$:

$$j_M = \frac{c}{4\pi}|\mathrm{rot}\mathbf{B}| \cong c \cdot \left|\frac{d\mathbf{M}}{dx}\right| = \frac{c}{\lambda}|\mathbf{M}_0| e^{-x/\lambda} , \tag{8}$$

где $|\mathbf{M}_0| = \frac{\Phi_0}{32\pi^2\lambda^2} \cdot \ln \frac{H}{H_{c2}}$; x — расстояние от края пластинки.

Для тонкой пластинки $a < \xi$ приближенно эффект близости можно учесть множителем $a/(a + \xi)$, так как при такой толщине в пластинке параметр порядка не равен нулю.

Для силы f_M на единицу длины, с которой на вихрь действует ток намагничивания j_M, получим:

$$f_M = \frac{1}{c} j_M \Phi_0 = \frac{|\mathbf{M}_0|}{\lambda} \Phi_0 \frac{a}{\xi} e^{-x/\lambda}. \qquad (9)$$

Сила «прилипания» уравновешена в состоянии равновесия взаимодействием с окружающими вихрями. Отклонение от равновесия в результате взаимодействия с транспортным током приводит к появлению возвращающей силы.

Максимальная возвращающая сила возникнет при отклонении на величину периода вихревой решетки $\frac{1}{d} = \left(\frac{B}{\Phi_0}\right)^{1/2} \cong \left(\frac{H}{\Phi_0}\right)^{1/2}$ при заданной индукции **B** и достигает величины:

$$f_B = \frac{\delta f_M}{\delta x} d = \frac{|\mathbf{M}_0|}{\lambda} \Phi_0 \frac{a}{\xi} e^{-x/\lambda} \cdot \frac{d}{\lambda}. \qquad (10)$$

Вычислим теперь возвращающую силу от всех пластинок в единице объема n:

$$F = 2\frac{|\mathbf{M}_0|}{\lambda} \Phi_0 \frac{a}{\xi} \frac{d}{\lambda} b \frac{l}{d} \frac{\lambda}{d} n = 2\frac{|\mathbf{M}_0|}{\lambda} \Phi_0 \frac{a}{\xi} b \frac{l}{d} n. \qquad (11)$$

Для этого нужно силу от одного вихря на единицу длины умножить на ширину пластинки b и на число вихрей, которые «прилипают» к пластинке $(l \cdot \lambda) d^{-2}$, где l — длина пластинки, а λ — расстояние взаимодействия вихрей, которые отстоят от края пластинки на расстояние $x \le \lambda$. По этой причине мы опустили множитель $e^{-x/\lambda}$ $x \le \lambda$, умножили на число пластинок в единице объема и на 2 для учета двух поверхностей пластинок.

Подставляя в (11) все величины и вводя $\varphi = a \cdot b \cdot l \cdot n$ — объемную долю выпавшей фазы, получим:

$$F = 2\frac{\Phi_0^2}{32\pi^2\lambda^2} \cdot \ln\frac{H_{c2}}{H} \cdot \frac{\varphi}{\lambda\xi} \left(\frac{H}{\Phi_0}\right)^{1/2}. \qquad (12)$$

Здесь учли, что $B \approx H$.

Подставляя значение Φ_0 через $H_{c2} = \frac{\Phi_0}{2\pi\xi^2}$, упростим формулу:

$$F = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{(H_{c2})^{3/2}}{\kappa^2\lambda} \cdot \ln\frac{H_{c2}}{H} \cdot \sqrt{H} \cdot \varphi. \qquad (13)$$

Подставляя (13) в (4), получим J_c:

$$J_c = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{c}{4\pi} \cdot \frac{(H_{c2})^{3/2}}{\kappa^2\lambda} \frac{1}{\sqrt{H}} \cdot \ln\frac{H_{c2}}{H} \cdot \left(1 - \frac{H}{H_{c2}}\right) \cdot \varphi(1-\varphi) \qquad (14)$$

Это выражение приведено в системе единиц CGSE, для перевода в практическую систему и соответственно получения тока в амперах его нужно разделить на $3 \cdot 10^9$. Окончательный результат после введения $h = \frac{H}{H_{c2}}$:

$$J_c = \frac{10}{4\pi} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{H_{c2}}{\kappa^2\lambda} \frac{1}{\sqrt{h}} \cdot (1-h) \cdot \varphi(1-\varphi) \cdot \ln\frac{1}{h}. \qquad (15)$$

В заключение отметим, что по порядку величины формула (15) практически совпадает с эмпирической формулой для плотности критического тока, приведенной в работе [7], где $H_{cB}=H_{c2}/k$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Используя хорошо известное уравнение $\int_V \mathrm{rot}\,\mathbf{a}\, dV = \int_S [d\mathbf{S}, \mathbf{a}]$ (или в двухмерном случае $\int_S \mathrm{rot}\,\mathbf{a}\, dS = \int_L [d\mathbf{l}, \mathbf{a}]$), где $\mathbf{a}$ является произвольным вектором, поток Φ_V на один вихрь вблизи поверхности полупространства запишем в виде:

$$\Phi_V = \int_S \mathbf{H} d\mathbf{S} = \Phi_0 \mathbf{e} \int_S \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) d\mathbf{S} - \lambda^2 \int_S \mathrm{rot\ rot}\ \mathbf{H} d\mathbf{S} =$$

$$\Phi_0 - \lambda^2 \int_S \mathrm{rot\ rot}\ \mathbf{H} d\mathbf{S} == \Phi_0 - \lambda^2 \int_L [d\mathbf{l}, \mathbf{a}]\, \mathbf{e} = \qquad (A1)$$

$$\Phi_0 - \lambda^2 \int_L \mathbf{h}[d\mathbf{l} \times \mathrm{rot}\ \mathbf{H}],$$

где $d\mathbf{S} = \mathbf{e} dS$. Удобно также ввести поле **h**, заданное в плоскости *S*, $\mathbf{h} = \mathbf{e}$ на контуре *L* и удовлетворяющее уравнению внутри области контура:

$$\mathbf{h} + \lambda^2 \mathrm{rot\ rot}\ \mathbf{h} = 0,\ \mathbf{h}|_L = \mathbf{e}. \qquad (A2)$$

Преобразуем интеграл по контуру, переходя опять к интегрированию в плоскости,

$$\int_L \mathbf{h}[d\mathbf{l} \times \mathrm{rot}\ \mathbf{H}] = \int_L [\mathrm{rot}\ \mathbf{H} \times \mathbf{h}]\, d\mathbf{l} = \int_S \mathrm{div}[\mathrm{rot}\ \mathbf{H} \times \mathbf{h}] d\mathbf{S}.$$

Используя известное соотношение $\mathrm{div}[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = (\mathbf{B} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{A}) - (\mathbf{A} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{B})$, получим:

$$\int_S \mathrm{div}[\mathrm{rot}\ \mathbf{H} \times \mathbf{h}] d\mathbf{S} = \int_S (\mathbf{h} \cdot \mathrm{rotrot}\ \mathbf{H}) d\mathbf{S} - \int_S (\mathrm{rot}\ \mathbf{h} \cdot \mathrm{rot}\ \mathbf{H}) d\mathbf{S}$$

Используя уравнение для **H** и то, что вектор **H** направлен по оси вихря и на поверхности образца поле $\mathbf{H} = 0$, получим для первого интеграла

$$\frac{1}{\lambda^2} \int_S h(\Phi_0(\delta(r - r_0) - H)) dS = \frac{\Phi_0 h(r_0)}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} \int_S (hH) dS.$$

Второй интеграл возьмем по частям и учтем граничное условие для магнитного поля на границе сверхпроводника $\mathbf{H}_S = 0$, которое дает

$$\int_S \left(\mathrm{rot}\,\mathbf{h}\cdot \mathrm{rot}\,\mathbf{H}\right)dS = \int_S \left(\mathrm{rotrot}\,\mathbf{h}\cdot \mathbf{H}\right)dS +$$

$$\int_L \left(\mathbf{H}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{h}\right)dS = -\frac{1}{\lambda^2}\int_S \left(hH\right)dS.$$

В итоге

$$\Phi_V = \int_S \mathbf{H}d\mathbf{S} = \Phi_0\left(1 - h(\mathbf{r}_0)\right). \qquad \text{(A3)}$$

Для плоской поверхности $h(x_0) = e^{-x_0/\lambda}$, где $\mathbf{r}_0$ — центр вихря у поверхности, h определяется уравнением (A2). Эти результаты справедливы с большой точностью и для пластины λ с толщиной $d >> \lambda$. Для тонких пластин с толщиной порядка или меньше длины когерентности ξ следует учитывать эффект близости.

Работа выполнена в рамках программы STCU (проект #931).

ЛИТЕРАТУРА

1. O.V. Chernyi, N.F. Andrievskaya, V.O. Ilicheva, G.E. Storozhilov, P.J. Lee, A.A. Squitieri. The Microstructure and Critical Current Density of Nb-48 wt.%Ti Superconductor With Very High Alpha-Ti Precipitate Volume and Very High Critical Current // *Advances in Cryogenic Engineering*. 2002, v. 48.
2. D.C. Larbalestier. *Superconductor Materials Science. Metallurgy, Fabrication and Application*. Edited by S. Foner and B. Schwartz, Plenum Press, New.York, 1981, p.109-164.
3. P.J Lee. *Abridged Metallurgy of Ductile Alloy Superconductors* // Wiley Encyclopedia of Electrical and Electronics Engineering, 1999, v.21, p.75-87.
4. P.J Lee, P.J McKinnell and D.C.Larbalestier. "Microstructure Control in High Ti NbTi Alloy // *IEEE Trans. on Magnetics.* 1989, MAG-25, p. 1918-1924.
5. O.V. Chernyi, G.F. Tikhinskij, G.E. Storozhilov, M.B. Lazareva, L.A. Kornienko, N.F. Andrievskaya, V.V. Slezov, V.V. Sagalovich, Ya.D. Starodubov and S.I Savchenko. Nb-Ti Superconductors of a High Current -Carrying Capacity // *Supercond. Sci. Technol.* 1991, 4, p.318-323.
6. G.Stejic, L.D.Cooley, R.Joynt, D.C.Larbalestier, S. T.Takacs. Numerical Calculation of Flux Pinning by α–Ti Precipitates in Nb-Ti // *Supercond. Sci. Technol.*, 1992, v.5, p. 176-179.
7. L.D. Cooley, P.J. Lee, D. C. Larbalestier. Flux-pinning mechanism of proximity-coupled planar defects in conventional superconductors: Evidence that magnetic pinning is the dominant pinning mechanism in niobium-titanium alloy // *Phys. Rev.B.* 1996, v.57, N 10 p.663.
8. В.В. Шмидт, Г.С. Мкртчян. Вихри в сверхпроводниках второго рода // *УФН.* 1974, т.112, вып.3, с.459-489.