2P

УДК 681.3

Н.Б. Репнікова, А.В. Писаренко, К.В. Замуренко, Ф.С. Зімарєв
Національний технічний університет України «КПІ», м. Київ

Алгоритм синтезу модального регулятора багатовимірної системи управління

Запропоновано формалізований алгоритм та формули розрахунку регуляторів, які забезпечують потрібну якість багатовимірних систем з використанням методу модального управління.

Багато сучасних складних систем управління і регулювання є багатовимірними, тобто такими, що мають декілька регульованих величин y_i $(i=\overline{1,n})$. До них відносяться, наприклад, системи управління літальним апаратом, орієнтації і стабілізації космічного апарата, системи стеження різного типу верстатів для обробки деталей, системи управління роботами та ін.

Багатовимірна система передбачає наявність багатовимірного об’єкта регулювання (рис. 1), який характеризується існуванням декількох входів (точок прикладання керувальних і збурювальних дій) і декількох виходів, що визначаються регульованими величинами.

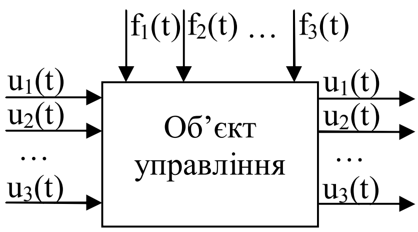

Рисунок 1 – Багатовимірний об’єкт регулювання

Систему управління таким об’єктом можна представити як структурну схему, що показана на рис. 2.

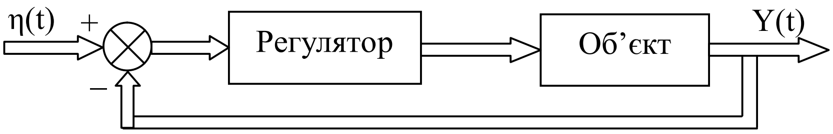

Рисунок 2 – Структурна схема системи управління, де $\eta(t)$ – задавальна дія; $Y(t)$ – вихідний сигнал

У даній статті описується метод побудови регулятора для системи з незалежними каналами, тобто системи, в якій вихід $y_i(t)$ управляється тільки сигналом $\eta_i(t)$ і не залежить від решти вхідних сигналів.

Нехай об’єкт регулювання в загальному випадку описується рівнянням:

$$\begin{aligned}\dot{X}(t) &= AX(t)+BU(t)\\ Y(t) &= CX(t)\end{aligned} \tag{1}$$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ . & . & \ddots & . \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{bmatrix} B=\begin{bmatrix} b_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & b_{22} & ... & 0 \\ . & . & \ddots & . \\ 0 & 0 & ... & b_{nn} \end{bmatrix} C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ . & . & \ddots & . \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix} D=\begin{bmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ . & . & \ddots & . \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix}.$$

Структурна схема моделі, що синтезується, представлена на рис. 3.

Припустимо, що всі змінні стану об'єкта управління підлягають безпосередньому вимірюванню.

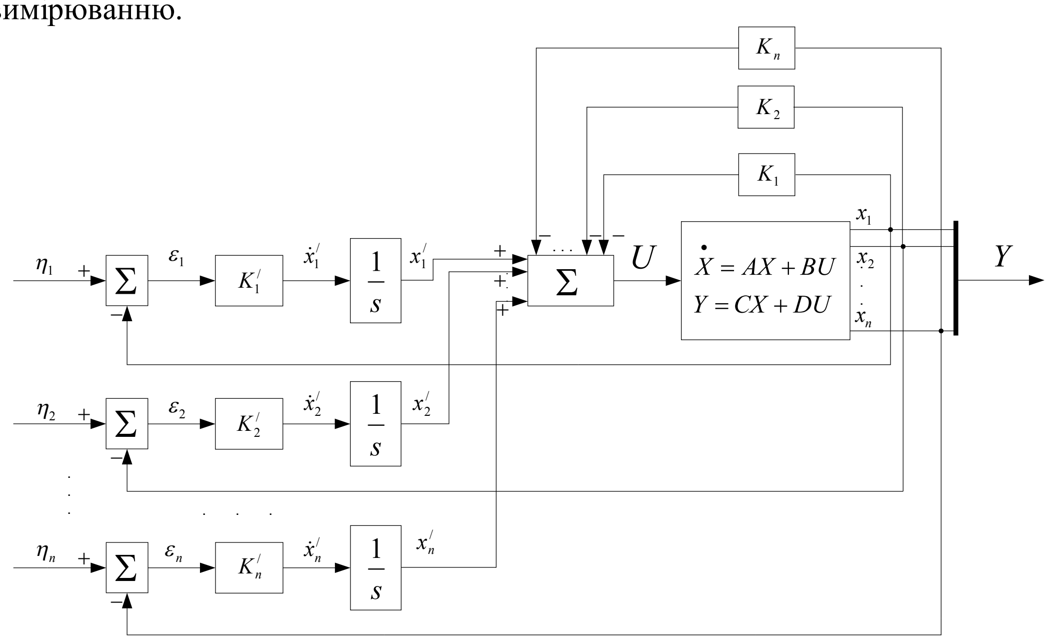

Рисунок 3 – Структурна схема моделі

де $K=\begin{vmatrix} K_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & K_2 & ... & 0 \\ . & . & \ddots & . \\ 0 & 0 & ... & K_n \end{vmatrix}$ – матриця коефіцієнтів зворотнього зв'язку за станом,

а $K^/=\begin{vmatrix} K_1' & 0 & ... & 0 \\ 0 & K_2' & ... & 0 \\ . & . & \ddots & . \\ 0 & 0 & ... & K_n' \end{vmatrix}$ – матриця прямого каналу управління.

Для знаходження матриць K і $K^/$ опишемо роботу замкненої системи за схемою:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + b_{11}u_1 \\ \dot{x}_2 = a_{22}x_2 + b_{22}u_2 \\ ... \\ \dot{x}_n = a_{nn}x_n + b_{nn}u_n \\ y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \\ ... \\ y_n = x_n \end{cases}; \quad (2) \qquad \begin{cases} u_1 = x_1^/ - K_1x_1 \\ u_2 = x_2^/ - K_2x_2 \\ ... \\ u_n = x_n^/ - K_nx_n \end{cases}; \quad (3) \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + b_{11}(x_1^/ - K_1x_1) \\ \dot{x}_2 = a_{22}x_2 + b_{22}(x_2^/ - K_2x_2) \\ ... \\ \dot{x}_n = a_{nn}x_n + b_{nn}(x_n^/ - K_nx_n) \\ \dot{x}_1' = K_1^/(\eta_1 - x_1) \\ \dot{x}_2' = K_2^/(\eta_2 - x_2) \\ ... \\ \dot{x}_n' = K_2^/(\eta_1 - x_n) \end{cases} \quad (4)$$

Вираз (4) запишемо в матричному вигляді:

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \ldots \\ \dot{x}_n \\ \dot{x}_1' \\ \dot{x}_2' \\ \ldots \\ \dot{x}_n' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}-b_{11}K_1 & 0 & \ldots & 0 & b_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22}-b_{22}K_2 & \ldots & 0 & 0 & b_{22} & \ldots & 0 \\ . & . & \ddots & . & . & . & \ddots & . \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn}-b_{nn}K_n & 0 & 0 & \ldots & b_{nn} \\ -K_1^/ & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -K_2^/ & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & \ddots & . & . & . & \ddots & . \\ 0 & 0 & \ldots & -K_n^/ & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \\ x_1^/ \\ x_2^/ \\ \ldots \\ x_n^/ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & \ddots & . \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ K_1^/ & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & K_2^/ & \ldots & 0 \\ . & . & \ddots & . \\ 0 & 0 & \ldots & K_n^/ \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \ldots \\ \eta_n \end{vmatrix}$$

Запишемо характеристичне рівняння замкненої системи:

$$\left(SE - A^*\right) = \begin{vmatrix} s & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & s & \ldots & 0 \\ . & . & \ddots & . \\ 0 & 0 & \ldots & s \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11}-b_{11}K_1 & 0 & \ldots & 0 & b_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22}-b_{22}K_2 & \ldots & 0 & 0 & b_{22} & \ldots & 0 \\ . & . & \ddots & . & . & . & \ddots & . \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn}-b_{nn}K_n & 0 & 0 & \ldots & b_{nn} \\ -K_1^/ & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -K_2^/ & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & \ddots & . & . & . & \ddots & . \\ 0 & 0 & \ldots & -K_n^/ & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} s-a_{11}+b_{11}K_1 & 0 & \ldots & 0 & -b_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & s-a_{22}+b_{22}K_2 & \ldots & 0 & 0 & -b_{22} & \ldots & 0 \\ . & . & \ddots & . & . & . & \ddots & . \\ 0 & 0 & \ldots & s-a_{nn}+b_{nn}K_n & 0 & 0 & \ldots & -b_{nn} \\ K_1^/ & 0 & \ldots & 0 & s & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & K_2^/ & \ldots & 0 & 0 & s & \ldots & 0 \\ . & . & \ddots & . & . & . & \ddots & . \\ 0 & 0 & \ldots & K_n^/ & 0 & 0 & \ldots & s \end{vmatrix}.$$

Використовуючи метод стандартних коефіцієнтів [1] (наприклад, біноміальний), обчислимо детермінант матриці $\left(SE - A^*\right)$ і прирівняємо коефіцієнти при ступенях отриманого полінома до коефіцієнтів при відповідних ступенях бінома Ньютона.

Отримаємо систему рівнянь, розв'язуючи яку знаходимо необхідні матриці K і $K^/$:

$$K_i = \frac{a_{ii} + 2\omega_0}{b_{ii}}; \quad (5) \qquad K_i^/ = \frac{\omega_0^2}{b_{ii}}, \quad (6)$$

де ω_0 – значення кратного кореня стандартного розподілення коренів.

Для того, щоб реалізувати такий регулятор, необхідно зробити декомпозицію загальної моделі на частини (об'єкт регулювання (ОР) і регулятор (Р)). Структурна схема моделі представлена на рис. 4.

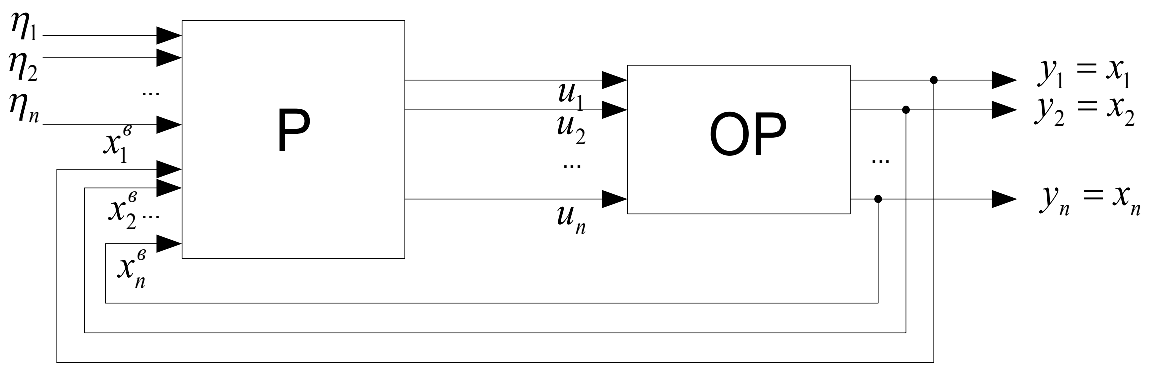

Рисунок 4 – Структурна схема синтезованої системи

Запишемо рівняння стану і виходу для регулятора:

$$\dot{X}_p(t) = A_p \cdot X_p(t) + B_p \cdot U_p(t)$$
$$Y_p(t) = C_p \cdot X_p(t) + D_p \cdot U_p(t).$$

Матриці регулятора у загальному вигляді описуються формулами:

$$A_p = \begin{vmatrix} A & \vdots & B \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{vmatrix}, \; B_p = \begin{vmatrix} 0 & \vdots & -K \cdot B \\ \ldots & \vdots & \ldots \\ K^{/} & \vdots & -K^{/} \end{vmatrix}, \; C_p = \begin{vmatrix} 0 & \vdots & E \end{vmatrix}, \; D_p = \begin{vmatrix} 0 & \vdots & -K \end{vmatrix}. \qquad (7)$$

Розглянемо приклад розробки регулятора для об'єкта 3-го порядку.

Нехай об'єкт регулювання в просторі станів описується наступними матрицями:

$$A = \begin{bmatrix} -2.5 & 0 & 0 \\ 0 & -0.8 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Змоделюємо систему в програмному пакеті MatLab:

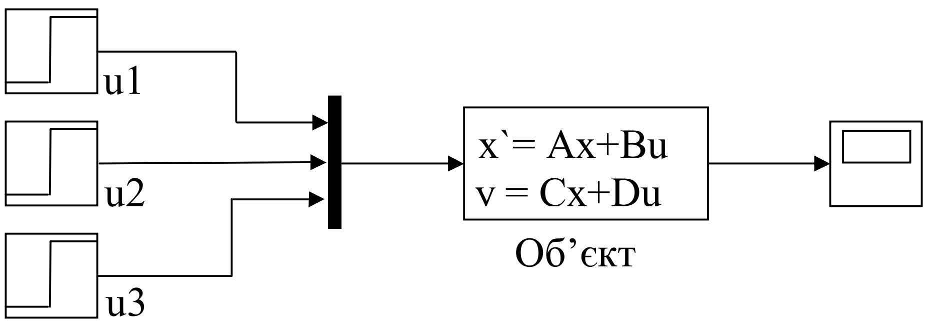

Рисунок 5 – Схема системи в MatLab

Для наочності прикладу вхідні дії u_1, u_2, u_3 розведені у часі і являють собою стрибки в 0-й, 3-й і 5-й моменти часу величиною 10, 20 та 30 відповідно (рис. 6):

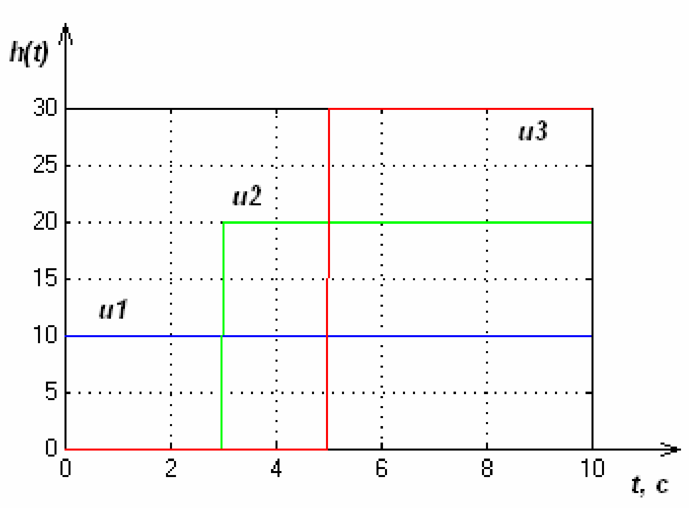

Рисунок 6 – Форма вхідних сигналів системи

Графіки перехідних процесів початкової системи представлені на рис. 7.

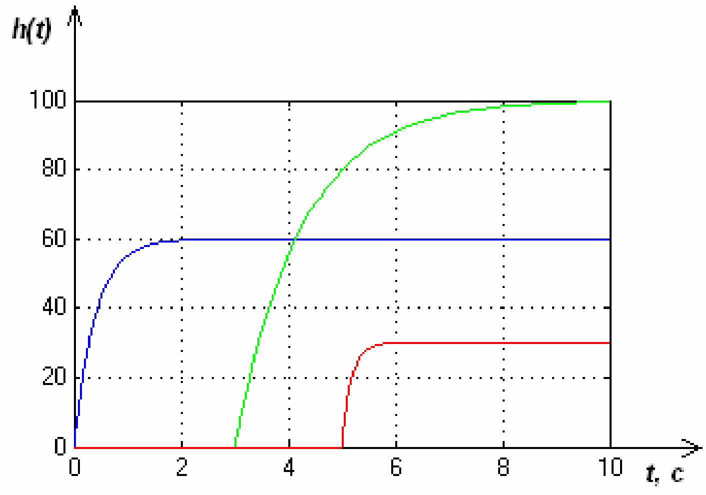

Рисунок 7 – Графіки перехідних процесів початкової системи

Як видно з графіка, процеси в системі керуються з великою сталою помилкою, тому необхідно розробити такий регулятор, щоб показники якості системи були, наприклад, такими: перерегулювання $\delta = 0\%$, час перехідного процесу $t_{n.n} = 0{,}775$ с і нульова помилка.

1. Досліджуємо керованість системи.

\>\> A= [– 2,5 0 0; 0 – 0.8 0; 0 0 – 6]
\>\> B = [15 0 0; 0 4 0; 0 0 6]
\>\> P = ctrb(A,B)

$$P = \begin{vmatrix} 15 & 0 & 0 & -37{,}5 & 0 & 0 & 93{,}75 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & -3.2 & 0 & 0 & 2.56 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & -36 & 0 & 0 & 216 \end{vmatrix}$$

\>\> n = rank(P)

n = 3 – ранг матриці керованості, що дорівнює порядку об’єкта, отже, система повністю керована.

2. Визначення матриць K и $K^{/}$.

Знаючи нормоване значення часу для системи 4-го порядку (яка отримується під час розрахунку регулятора) і заданий час перехідного процесу, знаходимо значення ω_0.

$$\omega_0 t_{n.n} = 7{,}75 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \frac{7{,}75}{t_{n.n}} = \frac{7{,}75}{0{,}775} = 10 .$$

Підставляємо у формули (5) і (6) параметри даної системи і отримуємо:

$$K_1 = \frac{a_{11} + 2\omega_0}{b_{11}} == 1{,}167 ; \qquad K_1^{/} = \frac{\omega_0^2}{b_{11}} == 6{,}667 ;$$

$$K_2 = \frac{a_{22} + 2\omega_0}{b_{22}} == 4{,}8 ; \qquad K_2^{/} = \frac{\omega_0^2}{b_{22}} == 25 ;$$

$$K_3 = \frac{a_{33} + 2\omega_0}{b_{33}} == 2{,}333 ; \qquad K_3^{/} = \frac{\omega_0^2}{b_{33}} == 16{,}667$$

Тоді матриці K и $K^{/}$ мають такі кінцеві значення:

$$K = \begin{vmatrix} 1{,}167 & 0 & 0 \\ 0 & 4{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 2{,}333 \end{vmatrix} ; \quad K^{/} = \begin{vmatrix} 6{,}667 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 16{,}667 \end{vmatrix} .$$

3. Знаходження матриць A_p, B_p, C_p, D_p регулятора.

Для знаходження матриць, що описують роботу регулятора, скористаємося формулами (7):

$$A_p = \begin{vmatrix} -2{,}5 & 0 & 0 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}8 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} ;$$

$$B_p = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -17{,}501 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -19{,}2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -13{,}998 \\ 6{,}667 & 0 & 0 & -6{,}667 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 0 & -2{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 16{,}667 & 0 & 0 & -16{,}667 \end{vmatrix} ;$$

$$C_p = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} ; \; D_p = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1{,}167 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2{,}333 \end{vmatrix} .$$

Таким чином, модель синтезованої системи має вигляд:

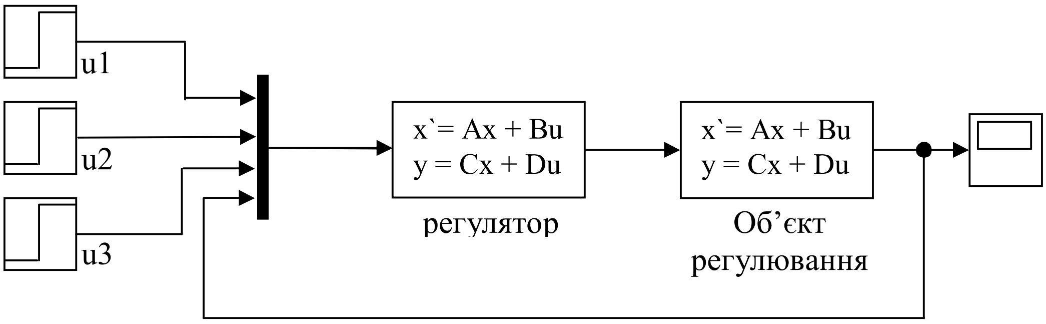

Рисунок 8 – Схема системи управління

На виході системи спостерігаємо необхідні перехідні характеристики, графіки яких представлені на рис. 9.

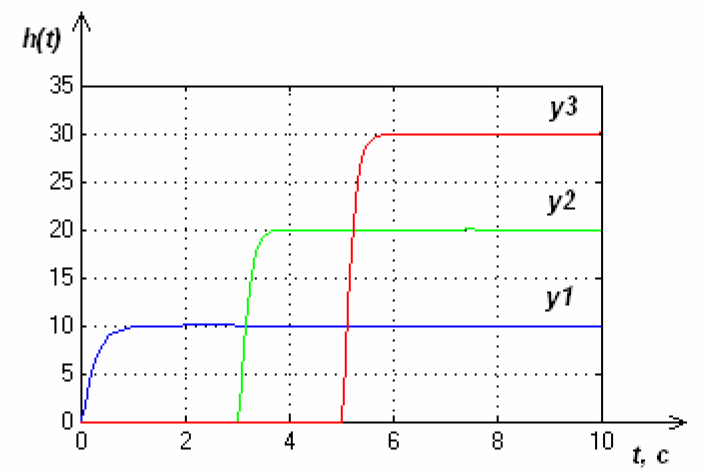

Рисунок 9 – Графіки перехідних процесів синтезованої системи

Таким чином, запропонований алгоритм синтезу регулятора багатовимірної системи управління дозволив поширити застосування методу модального управління та формалізувати алгоритм розрахунків регулятора за наведеними формулами.

Література

1. Кузовков М.Т. Модальное управление и наблюдающие устройства / Кузовков М.Т. – М. : Машиностроение, 1976. – 184 с.

Н.Б. Репникова, А.В. Писаренко, Е.В. Замуренко, Ф.С. Зимарев

Алгоритм синтеза модального регулятора многомерной системы управления
Предложен формализованный алгоритм и формулы расчета регуляторов, которые обеспечивают необходимое качество многомерных систем с использованием метода модального управления.

Стаття надійшла до редакції 03.03.2009.