УДК 517.928, 519.713

А.С. БЫЧКОВ

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НУЛЕВОГО СТАЦИОНАРНОГО СОСТОЯНИЯ ГИБРИДНОГО АВТОМАТА

Abstract: *In the article as summarizing formalism of the continuously-discrete systems a hybrid automata is examined. The important task of research of hybrid automata is stability of a zero steady state. The known conditions do not allow to check up structurally the stability of solutions. The new approach, based on specialy built sequence of values of Lyapunov functions. The conditions have structural character and are calculated easily.*
Key words: *exponential stability, hybrid automata, Lyapunov functions.*

Анотація: *У статті як узагальнювальний формалізм неперервно-дискретних систем розглядається гібридний автомат. Важливим завданням дослідження гібридних автоматів є стійкість нульового стаціонарного стану. Відомі умови не дозволяють конструктивно перевіряти стійкість розв'язків. У статті пропонуються новий підхід, що заснований на спеціальним чином побудованої послідовності значень функцій Ляпунова. Умови носять конструктивний характер і легко обчислюються.*
Ключові слова: *експоненціальна стійкість, гібридний автомат, функції Ляпунова.*

Аннотация: *В статье в качестве обобщающего формализма непрерывно-дискретных систем рассматривается гибридный автомат. Важной задачей исследования гибридных автоматов является устойчивость нулевого стационарного состояния. Известные условия не позволяют конструктивно проверять устойчивость решений. В статье предлагаются новый подход основанный на специальным образом построенной последовательности значений функций Ляпунова. Условия носят конструктивный характер и легко вычисляются.*
Ключевые слова: *экспоненциальная устойчивость, гибридный автомат, функция Ляпунова.*

1. Введение

В настоящее время большой интерес вызывают работы, связанные с исследованием поведения решений систем с переключениями. Первыми подобные вопросы рассматривали Глушков В.М. [1], Ємельянов С.В. [2], Бусленко Н.П. [3]. К системам с переключениями иногда относят дифференциальные уравнения с разрывной правой частью, дифференциальные уравнения с импульсным воздействием, системы переменной структуры, логико-динамические системы.

Наиболее важным направлением исследования является устойчивость нулевого решения таких систем. Следует особо отметить вклад, который внесен Самойленко А.М. и Перестюком Н.А. в развитие этого вопроса [4]. Можно считать, что предложенные ими условия заложили фундамент дальнейших исследований непрерывно-дискретных систем. Среди основных работ, посвященных устойчивости гибридных автоматов, выделяются работы Де Карло А. [5], Браницкого М. [6], Петерссона С. [7], Либерзона Д. [8] и др. [8–11]. В них предлагается использовать второй метод Ляпунова в двух модификациях. В первой строится одна общая функция Ляпунова для всех локальных состояний гибридного автомата, во второй – для каждого локального состояния строится своя функция. Причем локальные функции Ляпунова должны обладать свойством убывания своих значений на траекториях системы в точках переключений, т.е.

$$V_i(x(t_{i,k})) \le V_i(x(t_{i,k-1})),$$

где $t_{i,k}$ означает k-й момент времени перехода в i-е новое состояние.

Тем самым для проверки условий устойчивости уже не достаточно, как было в классической теореме Ляпунова, проверить отрицательную определенность производной в силу системы.

Целью данной статьи является получение конструктивных достаточных условий асимптотической устойчивости нулевого решения гибридного автомата и вычисление коэффициентов его экспоненциального затухания.

Формализмом, обобщающим известные виды непрерывно-дискретных систем, является гибридный автомат.

Определение 1. [8] Гибридным автоматом с фазовым переключением, или просто гибридным автоматом (ГА) называется совокупность $HA = (Q, X, F, Init, Inv, Jump)$, где:

1. $Q = (1, 2, ..., N)$ – множество дискретных состояний автомата.

2. $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – совокупность непрерывных переменных.

3. $F : Q \times R^n \to R^n$ – непрерывное поведение автомата. Обозначим $f_k(x) = F(k, x)$.

4. $Inv \subseteq Q \times R^n$ – множество, на котором ГА не изменяет дискретное состояние. Обозначим $Inv_k = \Pr_{q=k} Inv$.

5. $Init \subseteq Inv$ – множество начальных значений ГА. Обозначим $Init_k = \Pr_{q=k} Init$.

6. $Jump : Q \times R^n \to \beta(Q \times R^n)$ – условие изменения дискретного состояния (переключение).

Будем считать, что в каждом локальном состоянии поведение объекта описывается системой дифференциальных уравнений общего вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = f_i(x(t), t), i \in Q.$$

Определение 2. Локальным решением гибридного автомата назовем решение дифференциального уравнения заданного на локальном состоянии.

Мы будем рассматривать гибридный автомат, у которого смена локальных состояний происходит при достижении локальным решением некоторой поверхности переключения. Хотя следует отметить, что предложенным формализмом можно описать и системы с переключениями в заданные моменты времени. Решением гибридного автомата являются склеенные в точках переключений решения дифференциальных уравнений, описывающих локальное состояние. Поэтому решение гибридного автомата будем называть фазовой орбитой.

Определение 3. Фазовой орбитой гибридного автомата $x(t)$ для любого $t_0 \in R$, $t \ge t_0$ и любой пары $(q_0, x_0) \in Init$ назовем последовательность $(\tau_i, q_i, x_i(t), \tau'_i)_{i=1}^{M}$ с такими свойствами:

1. M – натуральное число или бесконечность; при конечном M возможно $\tau'_M = \infty$.

2. $\tau_1 = t_0$, $x_1(t_0) = x_0$, $q_1 = q_0$.

3. На отрезке (τ_i, τ'_i) поведение автомата описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(q_i, x(t)) = f_i(x(t), t),\ (q_i, x_i(t)) \in Inv \text{ и } Jump(q_i, x_i(t)) = \varnothing.$$

4. В точках τ'_i выполняется $\tau_{i+1} = \tau'_i$ и $(q_{i+1}, x_{i+1}(\tau_{i+1})) \in Jump(q_i, x_i(\tau'_i))$.

5. Если M конечное, эту последовательность нельзя продолжить, не нарушив предыдущие правила.

Отметим, что если множество $Jump(q_i, x_i(\tau_i'))$ содержит больше одной точки, переключение происходит недетерминированным образом в одну из этих точек. В данной работе будем полагать, что гибридный автомат детерминированный.

Фазовые орбиты делятся на три класса:

1. $M < \infty$, $\tau_M' < \infty$ и $\|x_M(\tau_M')\| < \infty$. В таком случае орбита носит название тупиковой. Для всех гибридных автоматов, которые мы будем рассматривать в дальнейшем, будем считать, что они тупиков не имеют.

2. $M = \infty$, $\lim\limits_{i\to\infty} \tau_i' = \infty$ или $M < \infty$, $\tau_M' = \infty$. Это обычная орбита. К этому же классу можно отнести случай выхода орбиты в бесконечность за конечное время: $M < \infty$, $\tau_M' < \infty$, $\lim\limits_{t\to\tau_M'} |x_M(t)| = \infty$.

3. $M = \infty$, $\lim\limits_{i\to\infty} \tau_i' = t^* < \infty$, т.е. за конечный отрезок времени происходит бесконечное количество переключений. В таком случае орбита носит название зеноновской. Гибридный автомат не может смоделировать поведение системы после момента времени t^*.

Время τ_M' (для орбиты с конечным количеством переключений) или $(\lim\limits_{i\to\infty} \tau_i') - t_0$ (для орбиты с бесконечным количеством переключений) будем называть временами жизни орбиты.

Определение 4. Непрерывное состояние $x = 0$ назовем нулевым стационарным состоянием гибридного автомата, если существует непустое множество $\overline{Q} \subset Q$ такое, что для всех $i \in \overline{Q}$ выполняется

1. Из того, что $(i', z') \in Jump(i, 0)$ следует, что $z' = 0$ и $i' \in \overline{Q}$.

2. $f(i, 0) = 0$ для всех $i \in Q$.

Определение 5. Стационарное состояние гибридного автомата $x = 0$ назовем устойчивым по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$ и выполнены условия $|x_0| < \delta$, $x_0 \in Init$ в течение всего времени жизни орбиты, которая начинается в точке x_0, $|x(t)| < \varepsilon$, $t \geq t_0$.

Определение 6. Стационарное состояние гибридного автомата $x = 0$ назовем асимптотически устойчивым по Ляпунову, если оно устойчиво и $\lim\limits_{t\to\infty} |x(t)| = 0$.

Через $|\cdot|$ обозначена евклидова норма. Обозначим также через Ω_i i-ое локальное состояние.

Определение 7. Назовём $V(i, x) = \{V^i(x)\}$ $i \in Q$ гибридной функцией Ляпунова, где $V^i(x)$ – функция Ляпунова для i-го локального состояния.

Будем использовать гибридную функцию для исследования устойчивости стационарного состояния гибридной системы.

Определение 8. Производной гибридной функцией $V(i,x)$ в силу гибридного автомата назовём выражение

$$\dot{V}(i,x)=\left\{\frac{dV^i(x)}{dx}\,f_i(x(t)),\ i\in Q\right\}.$$

Введем также такие обозначения: $B_r=\{x\in R^n\ :\ |x|\le r\}$, $S_r=\{x\in R^n\ :\ |x|=r\}$.

Предположим, что орбита гибридной системы начинается из первого состояния. Запись $x|_{i\to i+1}$ означает, что непрерывная гибридная система в точке x переходит из локального состояния i в состояние $i+1$.

2. Обобщение метода функций Ляпунова

Пусть существуют функции Ляпунова, заданные на Ω_i. Чтобы получить конструктивные условия устойчивости, построим последовательность точек пересечения линии уровня i-й функции Ляпунова и соответствующей поверхности переключения для $i=\overline{0,\ N}$. Выберем произвольное $C>0$. Далее воспользуемся следующим алгоритмом:

$$c^0\in(0,C),\quad c^1=\max_{\substack{x^1|_{1\to 2}\\ V^1(x^1)=c_0}} V^2(x^1),\quad c^2=\max_{\substack{x^2|_{2\to 3}\\ V^2(x^2)=c_1}} V^3(x^2),\ldots,\ c^N=\max_{\substack{x^N|_{N\to 1}\\ V^N(x^N)=c_{N-1}}} V^1(x^N). \qquad (1)$$

В [12, 13] доказаны теоремы об асимптотической устойчивости нулевого стационарного состояния для гибридных автоматов разных классов. Приведем одну из них.

Теорема 1. Пусть гибридный автомат имеет нулевое стационарное состояние, и для него $|Q|<\infty$ $i=\overline{1,N-1}$, $Jump(N,x)=(1,x)$. Также пусть задана окрестность начала координат $D\subset X$. Если для гибридного автомата существует положительно определённая гибридная функция Ляпунова $V(i,\ x):\ Q\times D\to R$ такая, что $\dfrac{dV^i(x)}{dx}f_i(x(t))<0$ для всех $x\in D\cap\Omega_i$, $i=\overline{1,\ N}$ и выполняется условие $|c^N|<|c^0|$, то $x=0$ – устойчивое нулевое стационарное состояние гибридного автомата.

Заметим, что принципиальное значение при проверке условий теоремы имеет выполнение неравенства $c^N<c^0$ и тот факт, что производная функции Ляпунова $V^i(x)$ в силу системы дифференциальных уравнений вычисляется только на множестве Ω_i. Это отличает предлагаемый подход от применения метода функций Ляпунова, предложенных в [5–11]. В данной теореме приводятся условия, которые не зависят от решений систем дифференциальных уравнений.

Введем следующие определения.

Определение 9. Нулевое стационарное состояние локально экспоненциально устойчиво, если для i-го локального состояния существуют положительные константы a_i и γ_i такие, что выполняется неравенство

$$|x(t)| < a_i |x(s_i)| e^{-\gamma_i(t-s_i)},\ t \in [s_{i-1}, s_i], s_{i-1} = \tau_i, s_i = \tau_i^{'},$$

где s_{i-1} – время перехода в i-е локальное состояние, s_i – время выхода из него.

Определение 10. Нулевое стационарное состояние гибридного автомата экспоненциально устойчиво, если для $t \geq t_0$ существуют положительные константы a и γ такие, что выполняется неравенство

$$|x(t)| < a|x(t_0)| e^{-\gamma(t-t_o)}.$$

Докажем теорему, обеспечивающую экспоненциальное затухание решений.

Теорема 2. Пусть для гибридного автомата выполняется условие теоремы про асимптотическую устойчивость и дополнительно выполняются такие условия:

1. $\forall x \in Inv_i \quad \alpha_i |x| \leq V_i(x) \leq \beta_i(x)$.

2. $\forall x \in Inv_i \quad \dot{V}|_{f_i}\ (x) \leq \gamma_i |x|$.

Тогда нулевое стационарное состояние гибридного автомата локально экспоненциально устойчиво и для него справедлива оценка

$$|x(t)| \leq \frac{\beta_i}{\alpha_i} |x(s_i)| \cdot \exp\left\{-\frac{\gamma_i}{\beta_i}(t-s_i)\right\}.$$

Доказательство. Из условий теоремы следует асимптотическая устойчивость. Покажем, что имеет место локальное экспоненциальное затухание решений. Без ограничения общности можно считать, что $x(t)$ находится в первом локальном состоянии. Обозначим через s_1 время перехода в состояние 2. Тогда для первого локального состояния будем иметь $t \in [t_0, s_1]$. Из условий $V_1(x) \leq \beta_1 |x|$ и $\dot{V}_1(x) \leq \gamma_1 |x|$ вытекает, что

$$\dot{V}_1(x(t)) \leq -\gamma_1 |x(t)| \leq -\frac{\gamma_1}{\beta_1} V_1(x(t)).$$

Дальше, воспользовавшись леммой Гронуолла-Беллмана, получаем, что

$$V_1(x(t)) \leq V_1(x(t_0)) \cdot \exp\left\{-\frac{\gamma_1}{\beta_1}(t-t_0)\right\}.$$

Используя тот факт, что $\alpha_1 |x| \leq V_1(x) \leq \beta_1 |x|$, имеем

$$|x(t)| \leq \frac{1}{\alpha_1} V_1(x(t)) \leq \frac{1}{\alpha_1} V_1(x(t_0)) \cdot \exp\left\{-\frac{\gamma_1}{\beta_1}(t-t_0)\right\} \leq \frac{\beta_1}{\alpha_1} |x(t_0)| \cdot \exp\left\{-\frac{\gamma_1}{\beta_1}(t-t_0)\right\}.$$

Аналогично можно показать, что для каждого i-го локального состояния $i = 1, ..., N$, выполняется

$$V_1(x(t)) \le V_1(x(s_{i-1})) \cdot \exp\left\{-\frac{\gamma_i}{\beta_i}(t - s_{i-1})\right\},\ t \in [s_{i-1},\ s_i],$$

и соответственно, что

$$|x(t)| \le \frac{\beta_i}{\alpha_i} |x(s_{i-1})| \cdot \exp\left\{-\frac{\gamma_i}{\beta_i}(t - s_{i-1})\right\},\ t \in [s_{i-1},\ s_i].$$

Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть выполняются условия теоремы 2 и последовательность c^i, $i = 1,...,N$ невозрастающая. Тогда нулевое стационарное состояние гибридного автомата экспоненциально устойчиво, и справедлива оценка

$$|x(t)| \le \alpha \cdot |x(t_0)| \cdot e^{-\gamma(t-t_0)},\ t \ge t_0, \tag{2}$$

где

$$\alpha = \max_{i \in Q} \frac{\beta_1}{\alpha_i},\ \gamma = \min_{i \in Q} \frac{\gamma_i}{\beta_i}. \tag{3}$$

Доказательство. Из условия теоремы следует локальная экспоненциальная устойчивость. Покажем выполнение неравенства (2) для любого $t \ge t_0$.

Пусть начальное значение фазовой орбиты принадлежит первому локальному состоянию и пусть гибридный автомат из состояния 1 переключается в состояние 2. Тогда имеем

$$V_2(x(t)) \le V_2(x(s_1)) \cdot \exp\left\{-\frac{\gamma_2}{\beta_2}(t - s_1)\right\} \le V_1(x(s_1)) \cdot \exp\left\{-\frac{\gamma_2}{\beta_2}(t - s_1)\right\} \le$$

$$\le V_1(x(t_0)) \cdot \exp\left\{-\frac{\gamma_1}{\beta_1}(s_1 - t_0)\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{\gamma_2}{\beta_2}(t - s_1)\right\} \le V_1(x(t_0)) \cdot \exp\{-\gamma(t - t_0)\}.$$

Воспользовавшись условием $\alpha_2 |x| \le V_2(x)$, получаем, что

$$|x(t)| \le \frac{1}{\alpha_2} V_1(x(t_0)) \cdot \exp\{-\gamma(t - t_0)\}.$$

И окончательно имеем

$$|x(t)| \le \frac{V_1(x(t_0))}{\alpha_2} \exp\{-\gamma(t - t_0)\} \le \frac{\beta_1}{\alpha_2} |x(t_0)| \cdot \exp\{-\gamma(t - t_0)\}.$$

Приведя аналогичные соображения для любой пары локальных состояний Ω_i, Ω_{i+1}, получаем, что

$$V_i(x(t)) \le V_{i-1}(x(s_{i-1})) \cdot \exp\left\{-\frac{\gamma_i}{\beta_i}(t - s_{i-1})\right\}.$$

Тогда

$$V_i(x(t)) \le V_1(x(t_0)) \cdot \exp\{-\gamma(t - t_0)\}.$$

Следовательно, для решения гибридного автомата с учетом обозначений (3) получаем оценку

$$|x(t)| \le \frac{\beta_1}{\alpha_i}|x(t_0)| \cdot \exp\{-\gamma(t-t_0)\} \le \alpha|x(t_0)| \cdot \exp\{-\gamma(t-t_0)\}.$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Предлагаемые условия асимптотической и экспоненциальной устойчивости позволяют не проверять условия достижимости локальным решением поверхности переключения в другое локальное состояние, т.к. если поверхность переключения не достигается локальным решением, то при доказательстве устойчивости действует классическая теорема Ляпунова [14].

Замечание 2. Следует отметить тот факт, что для асимптотической устойчивости достаточно выполнения условий:

1. $\frac{dV^i(x)}{dx} f_i(x(t)) < 0$ для всех $x \in D \cap \Omega_i$, $i = \overline{1, N}$.

2. $|c^N| \le |c^0|$

или

1. $\frac{dV^i(x)}{dx} f_i(x(t)) \le 0$ для всех $x \in D \cap \Omega_i$, $i = \overline{1, N}$.

2. $|c^N| < |c^0|$.

Приведенные условия позволят более гибко проверять асимптотическую устойчивость гибридного автомата.

3. Выводы

В статье в качестве обобщающего формализма для описания непрерывно-дискретных процессов предлагается использовать гибридные автоматы. Для исследования устойчивости нулевого стационарного состояния предлагается использовать метод функций Ляпунова. Для его применения необходимо построить последовательность значений функций Ляпунова в некоторых точках поверхности переключений. Эта последовательность не зависит от решений систем дифференциальных уравнений. В статье получены достаточные условия локальной экспоненциальной устойчивости и экспоненциальной устойчивости в целом нулевого стационарного состояния гибридного автомата. Условия носят конструктивный характер и легко численно проверяются.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Глушков В.М. Программные средства моделирования непрерывно-дискретных систем / В.М. Глушков, В.В. Гусев, Т.П. Марьянович и др. – Киев: Наукова думка, 1970. – 152 с.
2. Теория систем с переменной структурой / Под ред. С.В. Емельянова. – М.: Наука, 1972. – 399 с.
3. Бусленко Н.П. Моделирование сложных систем. – М.: Наука, 1978. – 399 с.
4. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища школа, 1987. – 288 с.
5. Peleties P., DeCarlo R. Asymptotic stability of m-switched systems using Lyapunov-like functions // Proc. American Control Conf. – Boston, 1991. – June. – P. 1679–1684.
6. Branicky M. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems // IEEE Trans.

Automatic Control. – 1998. – Vol. 43, N 4. – P. 475–482.
7. Pettersson S., Lennartson B. Stability and robustness for hybrid systems // Proc. Of the 35th IEEE Conference on Decision and Control. – Kobe, Japan, 1996. – P. 1202–1207.
8. Liberzon D., Morse A.S. Basic problems in stability and design of switched systems // IEEE Control Systems Magazine. – 1999. – Vol. 19, N 5. – P. 59–70.
9. Kesten Y., Pnueli A. Timed and Hybrid statecharts and their textual representation // Lec. Notes in Comp. Sci. – Springer-Verlag, 1992. – P. 591–620.
10. Ye H. Stability theory for hybrid dynamical systems / H. Ye, A.N. Michel, L. Hou // Proc. 34th IEEE Conf. Decision and Control. – New Orleans, LA, 1995. – Dec. – P. 2679–2684.
11. Ye H. Stability Theory for Hybrid Dynamical Systems / H. Ye, A.N. Michel, L. Hou // IEEE Trans. Automatic Control. – 1998. – Vol. 43, N 4. – P. 461–474.
12. Бичков О.С., Меркур'єв М.Г. Дослідження стійкості імпульсних гібридних автоматів // Математичні машини і системи. – 2007. – № 1. – С. 27–33.
13. Бычков А.С., Меркурьев М.Г. Устойчивость непрерывных гибридных систем // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – № 2. – С.123–128.
14. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. – М., Л.: Гос. изд-во технико-теоретической л-ры, 1950. – 471 с.

Стаття надійшла до редакції 08.10.2007