УДК 530.3

КВАЗИФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ В ТЕОРИИ НЕСИММЕТРИЧНОЙ УПРУГОСТИ

В.Н.Глыгало
Международный Чернобыльский центр

Робота належить до механіки суцільного середовища і присвячена розширенню класу фундаментальних рішень у теорії несиметричної пружності.

Работа относится к механике сплошной среды и посвящена расширению класса фундаментальных решений в теории несимметричной упругости.

The paper belongs to the mechanics of continua and deals with an extension of the class of fundamental solutions in the theory of non-symmetrical elasticity.

Теория несимметричной упругости (ТНУ) представляет собой естественное обобщение классической теории упругости [1].

В отличие от классического подхода в ТНУ передача нагрузки через малый элемент поверхности dS описывается не только главным вектором сил **P**dS, но также и главным моментом **m**dS (среда Коссера). При этом на элемент объёма dV действуют не только силовые напряжения σ_{ij}, но и моментные напряжения μ_{ij}, образующие в общем случае несимметричные тензоры. Тензоры напряжений удовлетворяют уравнениям равновесия:

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0;$$

$$\mu_{ij,j} + \epsilon_{ijk}\sigma_{jk} + Y_i = 0; \qquad (1)$$

Здесь X_i и Y_i некие силовые факторы.

Фундаментальные решения уравнений равновесия неограниченного упругого пространства для сосредоточенной силы Q_i и сосредоточенного момента L_i известны [1]. Цель настоящей работы – расширить класс фундаментальных решений на основе некоторых естественных предложений о характере распределения силовых факторов X_i и Y_i .

Постановка задачи. Уравнения равновесия сплошной неограниченной упругой среды, записанные в векторах перемещения **u** и вращения $\boldsymbol{\omega}$, имеют вид:

$$\begin{cases} (\mu+\alpha)\nabla^2\mathbf{u} + (\lambda+\mu-\alpha)\,\mathrm{grad\,div}\,\mathbf{u} + \\ +\,2\alpha\,\mathrm{rot}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{X} = 0 \\ (\gamma+\varepsilon)\nabla^2\boldsymbol{\omega} + (\beta+\gamma-\varepsilon)\,\mathrm{grad\,div}\,\boldsymbol{\omega} - 4\alpha\boldsymbol{\omega} + \\ +\,2\alpha\,\mathrm{rot}\mathbf{u} + \mathbf{Y} = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Здесь α, β, γ, λ, μ, ε - упругие постоянные среды.

Как известно [1], в общем случае для силовых факторов X_i и Y_i справедливо следующее представление:

$$X_i = X_i^0 - \eta^0_{ij,j};\; Y_i = Y_i^0 - \xi^0_{ij,j}. \qquad (3)$$

Здесь X_i^0 и Y_i^0 - некие объёмные силы и моменты, соответственно. Логика появления тензоров η^0_{ij} и ξ^0_{ij} будет рассмотрена ниже. Отметим, что в соответствии с поставленной целью все последующие построения относятся только к таким силовым факторам X_i и Y_i , которые обусловлены наличием в пространстве некоего неподвижного точечного источника (сингулярности), расположенного в произвольной точке $\mathbf{r_0}$. Так например, классические фундаментальные решения получены, как уже упоминалось выше, для сосредоточенной силы **Q** и сосредоточенного момента **L**. Объёмные силы X_i^0 и моменты Y_i^0 представлены в этом случае дельта-образными распределениями:

$$X_i^0 = Q_i\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r_0});$$

$$Y_i^0 = L_i\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r_0}).$$

Соответствующие им фундаментальные решения, записанные в инвариантной форме, имеют вид:

ВОПРОСЫ АТОМНОЙ НАУКИ И ТЕХНИКИ. 2001. №4.
Серия: Физика радиационных повреждений и радиационное материаловедение (80), с. 14-18.

$$
\begin{cases}
\mathbf{u}(\mathbf{Q},\mathbf{L}) = \dfrac{\mathbf{Q}}{4\pi\mu}\left(\dfrac{1}{R} - \dfrac{\alpha}{\alpha+\mu}\cdot\dfrac{e^{-\frac{R}{m}}}{R}\right) - \dfrac{\lambda+\mu}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)} \\
\nabla(\mathbf{Q}\cdot\nabla R) - \dfrac{\gamma+\varepsilon}{16\pi\mu^2}\nabla\left[\mathbf{Q}\cdot\nabla\left(\dfrac{1-e^{-\frac{R}{m}}}{R}\right)\right] + \\
+\dfrac{1}{8\pi\mu}\left[\mathbf{L}\times\nabla\left(\dfrac{1-e^{-\frac{R}{m}}}{R}\right)\right]; \\
\boldsymbol{\omega}(\mathbf{Q},\mathbf{L}) = \dfrac{\mathbf{L}}{4\pi(\gamma+\varepsilon)}\cdot\dfrac{e^{-\frac{R}{m}}}{R} - \dfrac{1}{16\pi\alpha} \\
\nabla\left[\mathbf{L}\cdot\nabla\left(\dfrac{1-e^{-\frac{R}{n}}}{R}\right)\right] + \dfrac{\mu+\alpha}{16\pi\alpha\mu}\nabla\left[\mathbf{L}\cdot\nabla\left(\dfrac{1-e^{-\frac{R}{m}}}{R}\right)\right] + \\
+\dfrac{1}{8\pi\mu}\left[\mathbf{Q}\times\nabla\left(\dfrac{1-e^{-\frac{R}{m}}}{R}\right)\right];
\end{cases}
\qquad (4)
$$

Здесь обозначено

$$
m^2 = \frac{(\mu+\alpha)(\gamma+\varepsilon)}{4\alpha\mu}\,;\; n^2 = \frac{\beta+2\gamma}{4\alpha}\,;\; R = \left|\mathbf{r}-\mathbf{r_0}\right|.
$$

Рассмотрим теперь физический смысл тензоров η_{ij}^0 и ξ_{ij}^0. Пусть естественное (начальное) состояние пространства представляет собой трехмерное связное многообразие $\Re_0^3$ с исходной метрикой $\hat{\mathbf{g}}_0$. Допустим возможность возникновения в пространстве $\Re_0^3$ некой топологически устойчивой сингулярности, которая приводит к нарушению глобальной симметрии пространства и изменяет его исходную метрику. В терминах сплошных сред указанная сингулярность проявляет себя как некий деформационный оператор, который адиабатически переводит исходное пространство $\Re_0^3$ из метрики $\hat{\mathbf{g}}_0$ в новое равновесное состояние $\Re^3$ с метрикой $\hat{\mathbf{g}}$. Соответствующий этому событию тензор деформации $\boldsymbol{\varepsilon}$ вводится в теории сплошных сред [2] следующим соотношением $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{g}}_0 - \hat{\mathbf{g}})$.

Полагаем пространство $\Re^3$ во всех его состояниях однородным, изотропным и упругим. Под упругостью понимаем способность пространства возвращаться к исходной метрике $\hat{\mathbf{g}}_0$ по мере удаления сингулярности на бесконечность.

При постановке конкретных задач в механике сплошной среды для получения систем уравнений, позволяющих обратиться к подробному изучению движения данной сплошной среды, требуется всегда вводить дополнительные гипотезы-предложения, фиксирующие частные свойства и физическую природу рассматриваемой модели [3].

Принципиальная особенность развиваемой здесь модели состоит в том, что появление сингулярности сопровождается возникновением в пространстве $\Re^3$ полей трансляционных γ_{ke}^0 и поворотно-изгибных $æ_{ke}^0$ дисторсий. Тогда через η_{ij}^0 и ξ_{ij}^0 обозначены соответственно тензоры силовых и моментных напряжений, формально связанных с дисторсиями γ_{ke}^0 и $æ_{ke}^0$ законом состояния.

Таким образом, тензоры η_{ij}^0 и ξ_{ij}^0 могут быть интерпретированы в рамках сложившейся терминологии как так называемые собственные напряжения, а члены η_{ij}^0 и ξ_{ij}^0 - как эквивалентные силы и моменты соответственно. Не рассматривая конкретный способ организации пространства $\Re^3$ и способ образования в нём точечного источника дисторсий, а также механизм порождения полей собственных силовых η_{ij}^0 и моментных ξ_{ij}^0 напряжений, сосредоточимся далее исключительно на математической стороне проблемы.

Задача заключается в том, чтобы на основе естественных предложений о характере распределения напряжений η_{ij}^0 и ξ_{ij}^0 прийти к определяющим математическим соотношениям для η_{ij}^0 и ξ_{ij}^0, найти явный вид этих тензоров и далее соответствующие им решения уравнений равновесия (2). Назовем искомые решения квазифундаментальными, а точечный источник, возмущающий пространство и порождающий специфические поля напряжений η_{ij}^0 и ξ_{ij}^0 - дисторсором.

ПОСТРОЕНИЕ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ η_{ij}^0 И ξ_{ij}^0

Предположение 1. Дисторсор порождает центрально-симметричное поле т.е.

$$
\eta_{ij}^0(\mathbf{R}) \equiv \eta_{ij}^0(R)\,; \quad \xi_{ij}^0(\mathbf{R}) \equiv \xi_{ij}^0(R)\,;\; R \equiv |\mathbf{R}|\,; \quad (5)
$$

Предположение 2. Тензоры $\eta_{ij}^0(R)$ и $\xi_{ij}^0(R)$ допускают следующее простое представление:

$$
\eta_{ij}^0(R) = Q_{ij}\eta(R)\,; \quad \xi_{ij}^0(R) = L_{ij}\xi(R)\,. \qquad (6)
$$

Здесь $\eta(R)$ и $\xi(R)$ - некие непрерывные функции, которые описывают характер изменения искажений пространства по мере удаления от дисторсора; Q_{ij} и L_{ij} - некие тензоры, характеризующие дисторсор как физический объект и определяющие меру его воздействия на пространство.

Назовём Q_{ij} трансляционной мощностью дисторсора, а L_{ij} - спиновой мощностью.

Предположим далее, без ограничения общности и для упрощения последующих выкладок, что симметричные части тензоров Q_{ij} и L_{ij} изотропны, т.е.

$$Q_{ij} = \frac{1}{3} Sp\hat{Q}\cdot \delta_{ij} + \epsilon_{ijk} q_k ;$$

$$L_{ij} = \frac{1}{3} Sp\hat{L}\cdot \delta_{ij} + \epsilon_{ijk} l_k , \qquad (7)$$

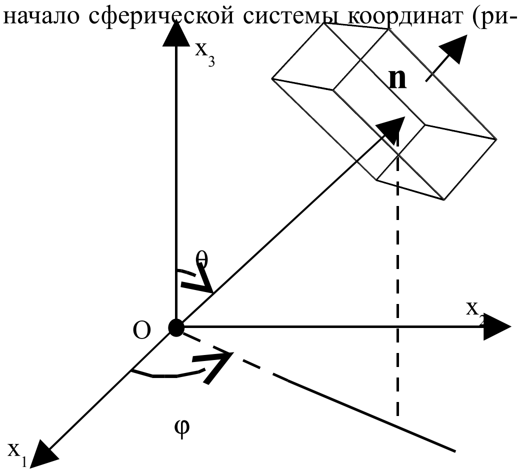
ϵ_{ijk} - кососимметричный тензор Леви-Чивиты;

q_k , l_k - некие сопутствующие векторы

Предположение 3. По мере удаления от дисторсора искажения среды монотонно убывают до нуля на бесконечности, т. е.

$$\eta(R) \to 0; \quad \xi(R) \to 0; \text{ при } R \to \infty .$$

Рассмотрим физически малый элемент объёма среды, выделенный в окрестности произвольной точки **R,** расположенной в тонком сферическом слое, окружающем дисторсор 0. Поместим дисторсор 0 в начало сферической системы координат (рисунок).



Обозначим через **n** единичный вектор нормали к указанному элементу объёма ($\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$).

R

Векторы $\eta^{0}_{ij}\cdot n_i$ и $\xi^{0}_{ij}\cdot n_i$ имеют смысл силы и момента, соответственно действующих на выделенный элемент объёма среды со стороны дисторсора.

Поскольку силы $\eta^{0}_{ij}\cdot n_i = P_i$ и моменты $\xi^{0}_{ij}\cdot n_i = m_i$ порождены по принятому нами ранее условию точечным источником, то справедливы следующие соотношения:

$$\begin{cases} div\mathbf{P} = Sp\hat{Q}\cdot\delta(\mathbf{R}) & (8.1)\\ rot\mathbf{m} = \mathbf{l}\cdot\delta(\mathbf{R}) & (8.2)\end{cases},$$

Следует иметь в виду, что уравнение (8.2) описывает циркуляцию сопутствующего вектора $\mathbf{l} = vec\hat{\mathbf{L}}$ в плоскости, перпендикулярной направлению ***n***. Другими словами, соотношение (8.2) справедливо только для компонент вектора ***l*** нормальных к направлению ***n*** (для которых выполняется условие $\boldsymbol{l}_{\perp}\cdot\mathbf{n} = 0$) и может быть представлено в следующем инвариантном виде:

$$rot(\mathbf{m}\times\mathbf{n}) = \mathbf{l}\cdot\delta(R). \qquad (8.2.1)$$

Вообще говоря, соотношений (8.1) и (8.2.1) достаточно для определения искомых функций $\eta(R)$ и $\xi(R)$. Подставляя выражения (6) и (7) в соотношения (8.1) и (8.2.1), получаем после элементарных преобразований следующие выражения:

$$\eta(R) = \frac{1}{R^2}; \; \xi(R) = \frac{1}{R}. \qquad (9)$$

Замечание. Укажем без дополнительных пояснений, что выполняются также следующие соотношения:

$$div\frac{\mathbf{m}}{R} = Sp\hat{L}\cdot\delta(R); \; rot(\mathbf{P}\times\mathbf{R}) = \mathbf{q}\cdot\delta(R), \qquad (10)$$

которые удовлетворяются при тех же функциях $\eta(R)$ и $\xi(R)$. Таким образом, с учетом (6), (7) и (9) получаем, окончательно:

$$\eta^{0}_{ij} = \frac{Q_{ij}}{R^2}; \; \xi^{0}_{ij} = \frac{L_{ij}}{R}. \qquad (11)$$

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ

Поля смещений **u** и вращений $\boldsymbol{\omega}$ в пространстве вокруг дисторсора найдём из уравнений равновесия:

$$
\begin{cases}
(\mu+\alpha)\nabla^2\mathbf{u}+(\lambda+\mu-\alpha)\,\mathrm{graddiv}\,\mathbf{u}+ \\
+2\alpha\,\mathrm{rot}\boldsymbol{\omega}=div\hat{\eta}^0; \\
(\gamma+\varepsilon)\nabla^2\boldsymbol{\omega}+(\beta+\gamma-\varepsilon)\,\mathrm{graddiv}\,\boldsymbol{\omega}+2\alpha\,\mathrm{rot}\mathbf{u}- \\
-4\alpha\,\boldsymbol{\omega}=div\hat{\xi}^0;
\end{cases} \tag{12}
$$

Решение ищем в виде:

$$
\begin{cases}
\mathbf{u}=grad\varphi+rot\boldsymbol{\psi}; \quad div\boldsymbol{\psi}=0 \\
\boldsymbol{\omega}=grad\Sigma+rot\mathbf{H}; \quad div\mathbf{H}=0
\end{cases} \tag{13}
$$

Представим в аналогичном виде правые части уравнений (12). Получим

$$
\begin{cases}
div\hat{\eta}^0(R)=\rho\,(grad\vartheta+rot\mathbf{z})= \\
=\rho\left(grad\,\dfrac{Sp\,\hat{Q}}{3\rho R^2}+rot\,\dfrac{\mathbf{q}}{\rho R^2}\right); \\
div\hat{\xi}^0(R)=I(grad\sigma+rot\mathbf{k})= \\
=I\left(grad\,\dfrac{Sp\,\hat{L}}{3IR}+rot\,\dfrac{\mathbf{l}}{IR}\right);
\end{cases} \tag{14}
$$

Здесь ρ - плотность среды; I - мера инерции при вращении $Sp\,\hat{Q}$, $Sp\,\hat{L}$, $|\mathbf{q}|$, $|\mathbf{l}|$ - константы; $\mathbf{q}=vec\,\hat{Q}$, $\mathbf{l}=vec\,\hat{L}$.

Подставляя (13) и (14) в (12) и выполняя преобразования, получим следующую систему волновых уравнений:

$$
\begin{cases}
\nabla^2\varphi+\dfrac{1}{c_1^2}\vartheta=0; & (15.1) \\
(\nabla^2-æ^2)\Sigma+\dfrac{1}{c_3^2}\sigma=0; & (15.2) \\
\nabla^2(\nabla^2-a^2)\boldsymbol{\psi}=-\dfrac{1}{c_2^2}(\nabla^2-2p)\mathbf{z}+ & \\
+\dfrac{c}{c_4^2}rot\mathbf{k}; & (15.3) \\
\nabla^2(\nabla^2-a^2)\mathbf{H}=\dfrac{p}{c_2^2}rot\mathbf{z}-\dfrac{1}{c_4^2}\nabla^2\mathbf{k}; & (15.4)
\end{cases}
$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$
a^2=\frac{1}{m^2}=\frac{4\alpha\mu}{(\alpha+\mu)(\gamma+\varepsilon)}; \quad æ^2=\frac{1}{n^2}=\frac{4\alpha}{\beta+2\gamma};
$$

$$
c=\frac{2\alpha}{\alpha+\mu}; \quad p=\frac{2\alpha}{\gamma+\varepsilon}; \quad c_1^2=\frac{\lambda+2\mu}{\rho}; \quad c_2^2=\frac{\alpha+\mu}{\rho};
$$

$$
c_3^2=\frac{\beta+2\gamma}{I}; \qquad c_4^2=\frac{\gamma+\varepsilon}{I};
$$

Решения уравнений $(15.1\div15.4)$, полученные стандартными методами для рассматриваемого центрально-симметричного случая, будут:

$$
\begin{cases}
\varphi(R)=\dfrac{Sp\,\hat{Q}}{3\rho c^2}\cdot\ln R; & (16.1) \\
\Sigma(R)=-\dfrac{Sp\,\hat{L}}{12\alpha}\cdot\dfrac{1-\mathbf{e}^{-æR}}{R}; & (16.2) \\
\boldsymbol{\psi}(R)=\dfrac{\mathbf{q}}{2\rho c_2^2a^2}(\nabla^2-2p)\theta(R)+ & (16.3) \\
+\dfrac{c}{Ic_4^2a^4}[\nabla\times\Gamma(R)\boldsymbol{l}]; & \\
\mathbf{H}(R)=-\dfrac{p}{2\rho c_2^2a^2}[\nabla\times\theta(R)\boldsymbol{l}]- & (16.4) \\
-\dfrac{\boldsymbol{l}}{Ic_4^2a^4}\nabla^2\Gamma(R); &
\end{cases}
$$

Приняты следующие обозначения:

$$
\theta(R)=2\ln R+\frac{1}{aR}\left[e^{-aR}\,\overline{E}i(aR)-e^{aR}Ei(-aR)\right];
$$

$$
\Gamma(R)=\frac{e^{-aR}-1}{R}-\frac{a^2R}{2};
$$

$\overline{E}i(aR)$, $Ei(-aR)$ - интегральные экспоненты:

$$
Ei(-x)=\int_{-\infty}^{-x}\frac{e^t}{t}dt; \quad \overline{E}i(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{e^t}{t}dt;
$$

Перемещения **u** и повороты **ω** находим по формулам (13). Окончательно получаем

ВОПРОСЫ АТОМНОЙ НАУКИ И ТЕХНИКИ. 2001. №4.
Серия: Физика радиационных повреждений и радиационное материаловедение (80), с. 14-18.

$$
\begin{cases}
\mathbf{u} = \dfrac{Sp\,\hat{Q}}{3\rho c_1^2} \cdot \dfrac{\mathbf{R}}{R^2} - \dfrac{1}{2\rho c_2^2 a^2} (\nabla^2 - 2p)\mathbf{q} \times \nabla\theta + \\
+ \dfrac{r}{Ic_4^2 a^4} \left[\nabla (\boldsymbol{l} \cdot \nabla\Gamma) - \boldsymbol{l}\nabla^2\Gamma \right] \; ; \\
\boldsymbol{\omega} = \dfrac{Sp\,\hat{L}}{12\alpha} \left[1 - (1 + æ R) e^{-æ R} \right] \dfrac{\mathbf{R}}{R^3} + \\
+ \dfrac{1}{Ic_4^2 a^4} \nabla^2 (\boldsymbol{l} \times \nabla\Gamma) - \dfrac{p}{2\rho c_2^2 a^2} \left[\nabla (\mathbf{q} \cdot \nabla\theta) - \mathbf{q}\nabla^2\theta \right]
\end{cases}
$$

ВЫВОДЫ

На основе ряда предположений о характере распределения полей собственных напряжений η_{ij}^0 и ξ_{ij}^0, порождаемых специфическим точечным источником – дисторсором – получены точные решения уравнений равновесия неограниченной упругой среды в теории несимметричной упругости.

Показано, что воздействие такого точечного источника на пространство описывается двумя скалярными $Sp\,\hat{Q}$, $Sp\,\hat{L}$ и двумя векторными **q**, *1* характеристиками. Исходя из характера пространственной зависимости **u** и **ω** от расстояния R до источника, полученные решения названы квази -фундаментальными.

С учетом того, что в точке расположения дисторсора могут независимо действовать также сосредоточенная сила **Q** и момент **L,** полный набор независимых характеристик, описывающих дисторсор как физический объект, достигает шести: $Sp\,\hat{Q}$, $Sp\,\hat{L}$, **Q, L, q**, ***l*.** Указанные характеристики названы для определенности фундаментальными зарядами дисторсора.

ЛИТЕРАТУРА

1.В.Новацкий. *Теория упругости.* М.: «Мир», 1975.

2.А.И.Лурье. *Теория упругости.* М.: «Наука», 1970.

3.Л.И.Седов. *Механика сплошной среды.* М.: «Наука», 1973.