

РОЗСІЮВАННЯ H -ПОЛЯРИЗОВАНОЇ ХВИЛІ ДОФРАКТАЛЬНИМИ ДИФРАКЦІЙНИМИ ГРАТКАМИ

Національний аерокосмічний університет ім. М. С. Жуковського «ХАІ»
17, вул. Чкалова, Харків, 61070, Україна
E-mail: gikosh@gmail.com

Продовження розробки основ електромагнітної теорії дофрактальних дифракційних ґраток (ДФДГ). ДФДГ складається зі стрічок, що розташовані у площині відповідно до сегментів, які утворюють певну стадію побудови самоподібного фракталу зі змінною розмірністю Хаусдорфа. Постановка задачі розсіювання плоскої H -поляризованої електромагнітної хвилі ДФДГ є класично строгою. За методом інтегральних рівнянь двовимірна зовнішня задача Неймана для рівняння Гельмгольца переводиться до одновимірної задачі розв'язання системи інтегрально-диференціальних рівнянь, а потім до системи інтегральних рівнянь. Пропонується метод розв'язання задачі для асимптотичної моделі слабконаповнених ДФДГ. Щоб показати ефективність цієї моделі, детально досліджується випадок дифракційної ґратки з двох стрічок. Проводиться числовий розрахунок характеристик спрямованості та їх порівняння з відомими результатами. Рис. 4. Бібліогр.: 11 назв.

Ключові слова: самоподібні фрактали, дифракційні ґратки, чисельно-аналітичні методи, моделювання.

Стрічкові дифракційні ґратки (СДГ) займають особливе місце у теорії дифракції завдяки своїй простоті, а також можливості відображати загальні риси дифракційних явищ [1–4]. Скінченими СДГ свого часу активно займалися декілька колективів дослідників. Зокрема, був розроблений метод, що дозволяє систему парних інтегральних рівнянь (ІР) звести до одного ІР Фредгольма другого роду [5]. При цьому використовується розв'язок задачі Рімана-Гільберта для обмеженої кількості відрізків дійсної осі. Зазначений метод застосовувався до обох поляризацій збуджуючої плоскої електромагнітної хвилі [5, 6]. Але, як зазначено у монографії [2], інтегральний оператор рівняння виявляється тим складнішим, чим більше стрічок має ґратка, і малу норму він має, коли розмір ґратки є малим у порівнянні з довжиною хвилі. Коли ж цей розмір є близьким чи значно перевищує довжину хвилі, виникають суттєві труднощі в отриманні розв'язку ІР. Тому у роботах [2, 7] пропонується наближення задачі розсіювання обмеженою СДГ, що використовує алгоритм задачі розсіювання хвильового пучка періодичною СДГ. У загальному випадку ґратка з обмеженої кількості стрічок залежить від значної кількості параметрів, бо є невпорядкованою. Тому при проведенні конкретних числових розрахунків обмежувались «випадком рівноперіодичних ґраток з шириною стрічок, яка дорівнює половині періоду» [5, 7]. У той час зазначені методи були значним вкладом у теорію дифракції на стрічкових ґратках.

Дослідження СДГ, що мають вигляд систем циліндричних стрічок, напрямні яких утворюють n -ну стадію побудови самоподібних фракталів (СПФ) зі змінною розмірністю Хаусдорфа (РХ), проведено у статті [8]. Основою дослідження був системний аналіз процесу побудови двох класів СПФ, який дає чітку математичну

впорядкованість і певні переваги над періодичною ґраткою. Наведено кілька математичних моделей процесу взаємодії плоскої E -поляризованої електромагнітної хвилі з дофрактальною системою циліндричних стрічок, що утворюють СДГ. Детально аналізується асимптотична модель слабконаповнених СДГ, що є ефективною при дослідженні фрактальних властивостей.

При дослідженні періодичних СДГ зазвичай відокремлюють 3 частотних діапазони – довгохвильовий, резонансний та короткохвильовий [1, 2]. У випадку «фрактальної» ґратки виникають унікальні можливості поєднання цих діапазонів, коли зі збільшенням номера стадії побудови СПФ з'являється все більше частин ґратки (підґраток), що можуть дорівнювати довжині хвилі. Цей ефект уже давно навчилися використовувати при розробці «фрактальних» антен, які застосовуються, зокрема, у мобільних телефонах та інших засобах бездротового зв'язку.

У даній статті пропонується детально зупинитись на випадку H -поляризації, який є більш складним і вимагає суттєвої зміни схеми дослідження у порівнянні з випадком E -поляризації. Зокрема, буде потрібно забезпечити коректний перехід від системи інтегрально-диференціальних рівнянь (ІДР) до системи ІР першого роду та розробити нову схему її розв'язку.

1. Постановка задачі. На систему з N абсолютно тонких та ідеально провідних циліндричних стрічок (рис. 1) з паралельними краями набігає плоскополяризована електромагнітна хвиля. Поперечний перетин системи являє собою відповідну кількість сегментів, що утворюють певну стадію творення СПФ зі змінною РХ, тому цю систему циліндричних стрічок доречно назвати дофрактальною. Оскільки твірні стрічок є паралельними, то візьмемо їх паралельними осі аплікат прямокутної системи координат, тоді рів-

няння Максвелла розподіляються на дві незалежні системи рівнянь [9], розв'язання яких приводить до двовимірного рівняння Гельмгольца

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 \right) v(x, y) = 0. \quad (1)$$

Тут шуканою функцією є $v(x, y)$, що визначає поле навколо стрічок.

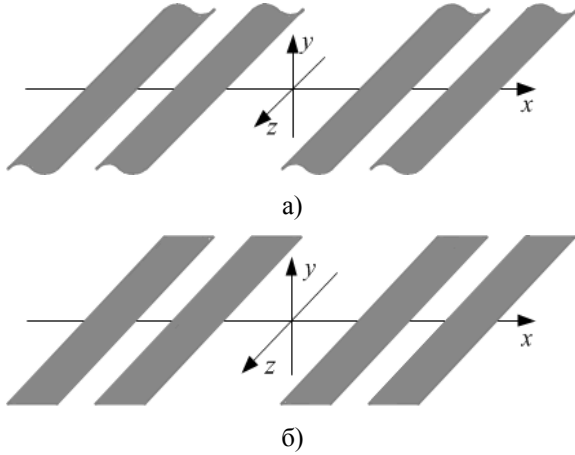


Рис. 1. Системи циліндричних стрічок, що відповідають 2 стадії творення СПФ: а) – криволінійні; б) – площинні

При цьому в одній системі рівнянь граничні умови $v(x, y) = 0$ на елементах напрямних розсіювача, у той час як у другій системі рівнянь граничні умови $\frac{\partial v}{\partial \vec{n}} = 0$, де \vec{n} – нормаль до напрямних дуг. З математичної точки зору маємо зовнішню задачу Діріхле (*E*-поляризація) та задачу Неймана (*H*-поляризація) для вказаного рівняння; вони мають єдиний розв'язок при виконанні умови випромінювання на нескінченності (за Зоммерфельдом)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial v}{\partial r} - i v \right) = 0$$

та умов у граничних точках дуг за формою Мейкенера (в обмеженій області навколо ребра стрічки має бути обмеженою енергія) [9]. Зовнішня задача Діріхле, що відповідає розсіюванню *E*-поляризованої хвилі, є більш простою та може бути цікавішою з точки зору практичних застосувань при розробці дофрактальних антен. Вона була досліджена раніше у статті [8], і тому тут основна увага приділяється зовнішній задачі Неймана, що відповідає розсіюванню *H*-поляризованої хвилі.

2. Метод інтегральних рівнянь. Подібно до випадку *E*-поляризованої хвилі [8] розшукувану функцію запишемо у наступному вигляді:

$$v(\vec{r}) = v_0(\vec{r}) + \frac{i}{4} \sum_{m=1}^N \int_{\gamma_m} I(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial \vec{n}'} H_0^{(1)}(k|\vec{r} - \vec{r}'|) dl'. \quad (2)$$

Тут $I(\vec{r}')$ – деяка комплекснозначна функція, визначена на елементах напрямних розсіювача γ_m , яку потрібно знайти. Під знаком інтеграла маємо похідну функції Ханкеля за напрямком нормалі до напрямних розсіювача γ_m , яку потрібно буде далі коректно перетворювати. Оскільки зовнішні змінні пов'язані з радіусом-вектором без штриха, а похідна за напрямком нормалі береться по внутрішнім (штрихованим) змінним, то інтеграл під знаком суми задовольняє як рівняння Гельмгольца, так і умови випромінювання на нескінченності.

Далі скористаємося граничними умовами $\frac{\partial v}{\partial \vec{n}} = 0$ на контурах γ_m , у які підставимо вираз (2), і в результаті виникає наступна система ІДР:

$$\frac{\partial}{\partial \vec{n}} \sum_{m=1}^N \int_{\gamma_m} I(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial \vec{n}'} H_0^{(1)}(k|\vec{r} - \vec{r}'|) dl' = 4i \frac{\partial}{\partial \vec{n}} v_0(\vec{r}), \quad (3)$$

$\vec{r} \in \gamma_\ell, \ell = 1, \dots, N.$

Коли дуги задані параметрично, то похідна за напрямком $\frac{\partial v}{\partial \vec{n}} = (\vec{\nabla} v \times \vec{n})$, де $\vec{\nabla} v = \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right)$,

$\vec{n} = \frac{(-\dot{y}, \dot{x})}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$. У випадку плоских ДФДГ, коли напрямними є сегменти, що розташовані на прямій $y = 0$, отримаємо $\frac{\partial v}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial v}{\partial y}$. Звідси, внаслідок рівностей

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \vec{n}'} H_0^{(1)}(k|\vec{r} - \vec{r}'|) &= -\frac{\partial}{\partial \vec{n}} H_0^{(1)}(k|\vec{r} - \vec{r}'|) = \\ &= -\frac{\partial}{\partial y} H_0^{(1)}(k|\vec{r} - \vec{r}'|) \end{aligned}$$

винесемо частинну похідну, яка вже не залежить від змінної інтегрування, за знак інтеграла і скористаємось тим, що функція Ханкеля $H_0^{(1)}(k|\vec{r} - \vec{r}'|)$ задовольняє рівнянню (1). У результаті таких перетворень система (3) для плоских ДФДГ стане такою:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2 \right) \sum_{m=1}^N \int_{\gamma_m} I(x') H_0^{(1)}(k|x - x'|) dx' = \\ = -4kq_2 \exp(ikq_1 x), \quad x \in \gamma_\ell, \ell = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (4)$$

Оскільки в цих рівняннях операції диференціювання та інтегрування в певній мірі відокремлені, а сума інтегралів у лівій частині (4) є функцією змінної x , то спочатку знайдемо загальний розв'язок звичайного неоднорідного диференційного рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Тоді прийдемо до такої системи сингулярних ІР (СІР) першого роду:

$$\sum_{m=1}^N \int_{\gamma_m} I(x') H_0^{(1)}(k|x-x'|) dx' =$$

$$= A_\ell e^{ikx} + B_\ell e^{-ikx} - \frac{4}{k} \frac{q_2 e^{ikq_1 x}}{1-q_1^2}, \quad x \in \gamma_\ell. \quad (5)$$

Невідомі сталі A_ℓ, B_ℓ можуть бути визначені з умов на кінцях сегментів чи, точніше, ребрах стрічок. Відомо кілька способів їх визначення, та про них будемо казати тоді, коли досліджуватимемо конкретні ДФДГ за відповідними методами розв'язання СРП даного типу.

3. Дофракціальна модель та її спрощення.

Отриману систему ІР першого роду (5) можна вважати загальною електродинамічною моделлю взаємодії H -поляризованої електромагнітної хвилі з системою циліндричних стрічок. Далі маємо перетворювати її та наповнювати реальним змістом впорядкованості за математичним законом побудови СПФ зі змінною РХ. Для цього скористаємося структурною схемою побудови СПФ, яку наведено у статті [8], де міститься, зокрема, необхідна інформація про вихідні змінні моделі процесу творення. Отже, для довільного натурального числа n , яке визначає стадію побудови СПФ, маємо впорядковану послідовність лінійних функцій $x_m^n(t)$, де $m = 1, \dots, 2^n (3^n)$, що за властивістю самоподібності закріплюють на числовій осі сегменти даної стадії. Ці сегменти є напрямними системи стрічок, тому систему ІР (5) можна записати більш конкретно за допомогою звичайних визначених інтегралів по сегменту $[-1,1]$, і вона прийме вигляд

$$\sum_{m=1}^{2^n (3^n)} \int_{-1}^1 j_m(t) H_0^{(1)}(|x_\ell^n(\tau) - x_m^n(t)|) dt =$$

$$= A_\ell \exp[ix_\ell^n(\tau)] + B_\ell \exp[-ix_\ell^n(\tau)] -$$

$$- \frac{4q_2 \exp(iq_1 x_\ell^n(\tau))}{k(1-q_1^2)}. \quad (6)$$

Вхідними змінними тут є параметри: n – номер стадії побудови СПФ; q_1, q_2 – компоненти напрямного вектора плоскої хвилі та вихідні змінні $x_m^n(t)$ геометричної моделі побудови СПФ зі змінною РХ. Вихідними змінними цієї моделі є функції $j_m(t)$, що визначають щільність поверхневих струмів на стрічках. На відміну від E -поляризованої електромагнітної хвилі, тут маємо поперечні струми і значно складнішу праву частину, де є невідомі сталі A_ℓ, B_ℓ , які визначаються з умов на кінцях сегментів. Для поперечних поверхневих струмів умови у граничних точках сегментів суттєво відрізняються від таких умов для подовжніх компонент поверхневих струмів. Тобто потрібно суттєво змінювати схему

розв'язку отриманої системи ІР першого роду порівняно до відповідної системи, що моделює розсіювання E -поляризованої електромагнітної хвилі. Тому спочатку максимально спростимо модель без утрати сутності задачі, щоб розібратися в деталях. Почнемо з припущення перпендикулярності набігання хвилі на найпростішу з ґраток, що складається з двох стрічок. Таким чином, маємо $q_1 = 0, q_2 = 1$ і попередня система СРП стане такою:

$$\sum_{m=1}^2 \int_{-1}^1 j_m(t) H_0^{(1)}(|x_\ell(\tau) - x_m(t)|) dt =$$

$$= A_\ell \exp[ix_\ell(\tau)] + B_\ell \exp[-ix_\ell(\tau)] - \frac{4}{k}. \quad (7)$$

Тут вхідними змінними будуть лінійні функції $x_m(t) = (-1)^m \beta + \alpha t$, а індекс $m = 1, 2$. Безрозмірні параметри $\alpha = ka = 2\pi/\lambda$, $\beta = 2\pi b/\lambda$ визначають співвідношення основних геометричних розмірів ґратки (величина $2b$ є відстанню між центрами сегментів, поперечний розмір кожного з яких дорівнює $2a$) з довжиною електромагнітної хвилі λ .

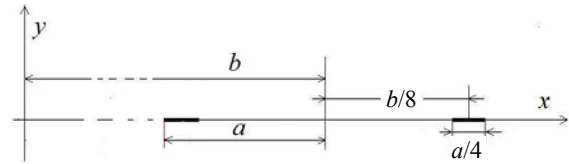


Рис. 2. Поперечний перетин половини ДФДГ

На рис. 2 два крайніх справа сегменти відповідають другій стадії побудови СПФ з РХ $\ln 2/\ln 8 = 1/3$. Вони є напрямними правої половини відповідної ДФДГ.

Очевидно, що система (7) повністю містить основні властивості системи (6), і тому не суттєво, скільки маємо стрічок, відтак і сталих у правій частині. Головне, щоб їх було не менше двох, бо випадок однієї стрічки [9] виключає взагалі наявність невідомих сталих у правій частині.

Наступне припущення, що приводить до асимптотичної моделі, яка дозволяє отримати розв'язання системи ІР у явному, чи, користуючись іншою термінологією, у замкненому вигляді, полягає в малості поперечного розміру стрічки. Точніше, вважаємо, що один з частотних параметрів $\alpha = o(1)$, у той час як інший – $\beta = O(1)$. Тут відбувається поєднання двох діапазонів: довгохвильового для поперечного розміру окремої стрічки та резонансного відносно поперечного розміру всієї ґратки.

4. Модель ґратки з вузькими стрічками. Цю модель ще можна назвати слабонаповненою, бо стрічки ґратки є вузькими й відстань між

ними досить велика. Важливо, що довжина хвилі має бути великою в порівнянні з шириною стрічки, але може дорівнювати чи бути дещо меншою за поперечний розмір ґратки. Досягається це завдяки тому, що фрактальна розмірність, що визначається за формулою $PX = \ln 2 / \ln \kappa$, де $\kappa = 1 + b/a > 2$, береться невеликою. Безперечно, для випадку найпростішої з ґраток – двострічкової, це ще не дає можливості повною мірою оцінити «фрактальність» ґратки, але зі збільшенням номера стадії побудови СПФ з'являється все більше розмірів елементів ґратки, що можуть бути близькими до довжини хвилі. Так, на рис. 2 два сегменти за розмірами мають бути значно меншими за довжину хвилі, а от їх найвіддаленіші точки вже можуть мати резонансний розмір, наприклад, дорівнювати довжині хвилі ($2a = \lambda$). Це можна досягти, якщо взяти $\kappa = 32$, а не 8, тоді $\alpha = 2\pi a / \lambda = \pi$, відповідно, $\beta = 31\alpha$, а відносний розмір сегмента буде $\pi / 32 < 0,1$.

Оскільки тут основну увагу приділено узагальненню асимптотичного підходу, чи точніше, розробці нової схеми розв'язку систем IP першого роду (6), (7), то повернемося до спрощеної системи (7). При застосуванні методу Релея (малого частотного параметру), як і у випадку однієї стрічки [9], для діагональних ядер $H_0^{(1)}(\alpha|\tau - t)$ використовуємо ряд

$$\frac{\pi}{2i} H_0^{(1)}(\alpha|u) = \ln \frac{\gamma\alpha|u|}{2i} + \sum_{m=1}^{+\infty} \left[\frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{\alpha|u|}{2} \right)^{2m} \left(\ln \frac{\gamma\alpha|u|}{2i} - \sum_{p=1}^m \frac{1}{p} \right) \right].$$

Тут $\ln \gamma = 0,5772\dots$ – стала Ейлера. Ядра, що не знаходяться на діагоналі $H_0^{(1)}(|x_\ell(\tau) - x_m(t)|)$ ($m \neq \ell$), є регулярними внаслідок того, що

$$|x_1(\tau) - x_2(t)| = 2\beta - \alpha(\tau - t), \\ |x_2(\tau) - x_1(t)| = 2\beta + \alpha(\tau - t).$$

Тому для них використовуємо ряд Маклорена в околі точки 2β , тобто

$$H_0^{(1)}(2\beta \pm \alpha|u|) = \\ = H_0^{(1)}(2\beta) + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{d^m}{dz^m} [H_0^{(1)}(z)]_{z=2\beta} \frac{(\pm\alpha|u|)^m}{m!}.$$

Відповідно, невідомі величини подаємо як ряди за степенями малого параметра α .

$$j_m(t) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} j_{\kappa m}(t) \alpha^\kappa, \quad A_m(B_m) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} A_{\kappa m}(B_{\kappa m}) \alpha^\kappa.$$

Для перших двох наближень ($\kappa = 0, 1$) маємо надзвичайно просту систему СІР першого роду

$$\frac{2i}{\pi} \int_{-1}^1 j_{\kappa m}(t) \ln|\tau - t| dt + \sum_{n=1}^2 j_{\kappa n} R_{nm} = h_{\kappa m}(\tau), \quad m = 1, 2. \quad (8)$$

Тут у правій частині для головного наближення маємо сталу величину

$$h_{0m}(\tau) = A_{0m} \exp(i(-1)^m \beta) + B_{0m} \exp(-i(-1)^m \beta) - \frac{4}{k};$$

а для першого наближення – лінійну функцію

$$h_{1m}(\tau) = i\tau [A_{0m} \exp(i(-1)^m \beta) - B_{0m} \exp(-i(-1)^m \beta)] + A_{1m} \exp(i(-1)^m \beta) + B_{1m} \exp(-i(-1)^m \beta) + C(j_{01}, j_{02}),$$

з $C(0,0) = 0$. Окрім того, введені позначення

$$j_{\kappa n} = \int_{-1}^1 j_{\kappa n}(t) dt. \quad \text{Коли застосуємо формулу обер-$$

нення Карлемана, то виникає суперечність з умовою Мейкснера, яку можна усунути, наклавши наступні вимоги на невідомі сталі:

$$A_{0m} = \frac{2}{k} \exp(-i(-1)^m \beta), \quad B_{0m} = \frac{2}{k} \exp(i(-1)^m \beta), \\ A_{1m} \exp(i(-1)^m \beta) + B_{1m} \exp(-i(-1)^m \beta) = 0.$$

При цьому отримуємо тільки тривіальні розв'язки для перших двох наближень $j_{\kappa m}(t) \equiv 0$ ($\kappa = 0, 1$). Нетривіальним буде друге наближення, але тут уже обмежитись тільки формулою обернення Карлемана недостатньо, бо вона може допомогти тільки отримати невідомі сталі A_{1m}, B_{1m} . Тут основними будуть СІР, які виникають з системи (8) при $\kappa = 2$ диференціюванням

$$\frac{2i}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{j_{2m}(t)}{\tau - t} dt = h'_{2m}(\tau), \quad m = 1, 2.$$

У правій частині цього рівняння знаходиться лінійна функція

$$h'_{2m}(\tau) = A_{1m} \exp(i(-1)^m \beta) - B_{1m} \exp(-i(-1)^m \beta) - \tau \frac{4}{k}.$$

Відомо, що характеристичні рівняння мають три типи розв'язків у залежності від їх індексів [10]. Той тип розв'язків що задовольняє умові Мейкснера, має наступний вигляд:

$$j_{2m}(t) = \frac{i}{2\pi} \sqrt{1-t^2} \int_{-1}^1 \frac{h'_{2m}(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-t)}$$

за умови $\int_{-1}^1 \frac{h'_{2m}(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = 0$, яка виконується, коли

$$A_{1m} \exp(i(-1)^m \beta) = B_{1m} \exp(-i(-1)^m \beta).$$

Таким чином, для другого наближення отримаємо вирази

$$j_{2m}(t) = -\frac{2i}{k} \sqrt{1-t^2}, \quad m=1,2.$$

Для вихідних змінних асимптотичної моделі взаємодії *H*-поляризованої електромагнітної хвилі з системою двох стрічок остаточно маємо

$$j_m(t) = -2ia\alpha\sqrt{1-t^2} + O(\alpha^3).$$

Цей вираз з точністю до сталої співпадає з відповідним виразом для окремої стрічки [9]. Він був очікуваним, бо розглядалася модель найпростішої ґратки з вузькими стрічками, які досить віддалені одна від одної.

При переході до складніших ґраток з вузькими стрічками, але принципово ДФДГ, запропонована тут схема визначення вихідних змінних моделі залишається в силі. Далі важливо отримати інтегральні характеристики найпростішої ґратки, провести числові розрахунки й порівняти їх з відомими результатами. Окрім того, як раз інтегральні характеристики відображають суттєвіше взаємодію між стрічками та виявляють фрактальні властивості ДФДГ.

5. Діаграма спрямованості ДФДГ. Після математичного розв'язання зовнішньої задачі Неймана розсіяне електромагнітне поле навколо розсіювача можна подати за допомогою функції, що визначається сумою інтегральних перетворень розв'язку $j_\ell(t)$:

$$\nu(x, y) = \frac{ik}{4} \sum_{\ell=1}^{2^n(3^n)} \int_{-1}^1 j_\ell(t) H_1^{(1)}(k\sqrt{(x-x_\ell(t))^2 + y^2}) \times \frac{y dt}{\sqrt{(x-x_\ell(t))^2 + y^2}}.$$

Далі зручно для координат точки спостереження взяти полярну систему, тобто $x = r \cos \varphi$,

$y = r \sin \varphi$. Тоді на достатній віддалі від ґратки розсіяне електромагнітне поле визначається асимптотичним виразом

$$\nu(r, \varphi) \approx \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}} A(\varphi),$$

де $A(\varphi) = \frac{k}{2i} e^{i\frac{\pi}{4}} \sin \varphi \sum_{\ell=1}^{2^n(3^n)} \hat{j}_\ell(\cos \varphi)$. Капелюшок

над літерою позначає інтегральне перетворення, тобто

$$\hat{j}_\ell(\cos \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 j_\ell(t) \exp[-ix_\ell(t) \cos \varphi] dt.$$

У випадку слабонаповненої моделі двострічкової ґратки, що відповідає утворювачу СПФ, сума інтегральних перетворень має наступний асимптотичний вираз:

$$\sum_{l=1}^2 \hat{j}_l(\cos \varphi) \approx -\sqrt{\frac{\pi}{2}} ia\alpha (\exp[i\beta \cos \varphi] + \exp[-i\beta \cos \varphi]).$$

Таким чином, для характеристики спрямованості отримаємо остаточно інтегральний вираз

$$A(\varphi) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \alpha^2 e^{i\frac{\pi}{4}} \sin \varphi \cos(\beta \cos \varphi).$$

На рис. 3 наведено графіки залежності $10|A(\varphi)|$ від полярного кута для різних значень параметра β та одному значенні РХ (суцільна лінія). Тут маємо коефіцієнт подібності $\kappa = 1 + \beta/\alpha = 32$, тому напрямні ДФДГ відповідають першій стадії побудови СПФ з РХ $d_\chi = 0,2$. Крпками показано характеристику спрямованості для однієї стрічки відносної півширини $\alpha = \beta/31$, форма якої не змінюється, але дещо збільшується зі збільшенням розміру стрічки.

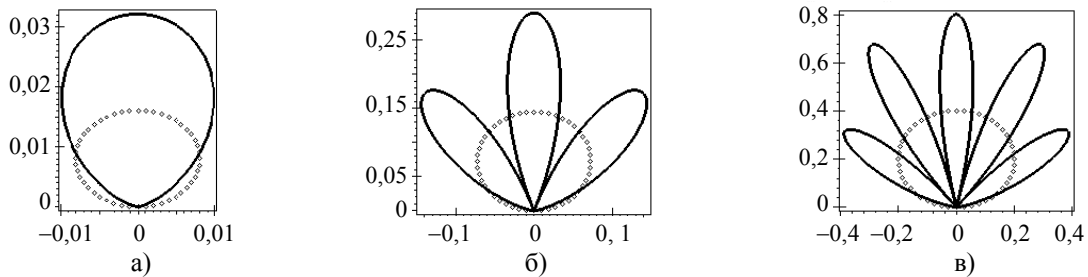


Рис. 3. Діаграми спрямованості для різних значень параметра β : а) $\beta = \pi/2$; б) $\beta = 3\pi/2$; в) $\beta = 5\pi/2$

Нагадаємо що $\beta = 2\pi b/\lambda$, тому на рис. 2, а стрічки рознесені на половину довжини хвилі, на рис. 2, б відстань між центрами вузьких стрічок складає півтори довжини хвилі, на рис. 2, в – дві з половиною. Маємо відповідну

класичній структурі діаграми спрямованості. У всіх трьох випадках використано довгохвильове наближення по відношенню до поперечного розміру окремої стрічки. Відносна похибка наближень має порядок $O(\alpha^4)$.

Проведемо тепер порівняння діаграм спрямованості для різних поляризацій збуджуючої хвилі для тих же значень параметрів.

Як видно з рис. 4, порівняння буде не на користь H -поляризації, хоча її характеристику спрямованості $|A(\varphi)|$ збільшено у десять разів (наведено суцільною лінією). Кількість пелюст-

ків у діаграмах спрямованості для різних поляризацій співпадає, хоча їх форма дещо відрізняється. З кількісного співвідношення діаграм спрямованості для різних поляризацій випливає, що для довільно поляризованої падаючої хвилі розсіяне поле буде поляризоване майже паралельно стрічкам.

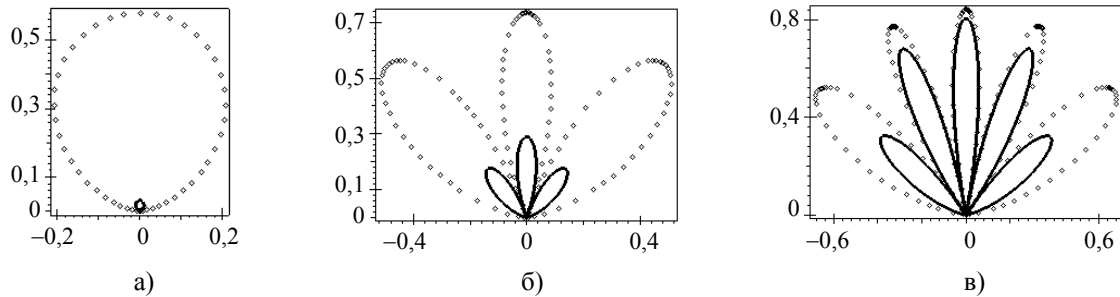


Рис. 4. Діаграми спрямованості для різних поляризацій та значень параметра β : а) – $\beta = \pi/2$; б) – $\beta = 3\pi/2$; в) – $\beta = 5\pi/2$

З огляду на узгодження діаграм спрямованості для різних поляризацій можна зробити висновок: виявлені фрактальні властивості ДФДГ для випадку E -поляризації є справедливими для довільно поляризованої падаючої хвилі.

Висновки. На основі строгої електромагнітної теорії проведено дослідження задачі розсіювання плоскої H -поляризованої електромагнітної хвилі дифракційною ґраткою, що має вигляд системи циліндричних стрічок, напрямні яких утворюють n -ну стадію побудови СПФ зі змінною PX . За класичним методом ІР, використавши фундаментальний розв'язок рівняння Гельмгольца для вільного простору, двовимірна зовнішня задача Неймана для рівняння Гельмгольца переводиться до одновимірної задачі розв'язання систем ІДР. Наведено узагальнення класичної схеми перетворення системи ІДР до системи СІР з невизначеними коефіцієнтами у правій частині.

За методом Релея розроблена асимптотична модель розсіювання плоскої H -поляризованої електромагнітної хвилі, слабконаповненою дофрактальною стрічковою ґраткою. Пропонується нова схема розв'язання системи ІР з невизначеними коефіцієнтами у правій частині, що базується на явних розв'язках характеристичних СІР. Щоб показати ефективність асимптотичної моделі, детально досліджено випадок дифракційної ґратки з двох стрічок. Зокрема, розроблені алгоритми розрахунку характеристик спрямованості, проводиться числовий експеримент та порівняння з відповідними характеристиками для однієї стрічки і випадком E -поляризації. З результатів порівняння двох поляризацій у випадку вузькострічкової ДФДГ випливає, що для довільно поляризованої падаючої хвилі розсіяне поле буде майже E -поляризоване. Цей факт з огляду на теорему Ба-

біне [8] може бути перенесений на задачі розсіювання екраном з дофрактальною системою щілин, рівновеликою з ДФДГ, і використовуватись для фільтрації.

Оскільки відомі вихідні змінні геометричної моделі побудови СПФ зі змінною PX , то запропонована асимптотична модель розсіювання плоскої H -поляризованої електромагнітної хвилі без особливих змін може використовуватись для ґратки, що відповідає довільній стадії побудови СПФ. З огляду на узгодження діаграм спрямованості для різних поляризацій, можна зробити висновок про можливість виявлення фрактальних властивостей ДФДГ.

1. Дифракція волн на решетках / В. П. Шестопапов, Л. Н. Литвиненко, С. А. Масалов, В. Г. Сологуб. – Х.: Изд-во Харьков. гос. ун-та, 1973. – 287 с.
2. Спектральне оператори рассеяния в задачах дифракции волн на плоских экранах / Л. Н. Литвиненко, С. Л. Просвирнин. – К.: Наук. думка, 1984. – 240 с.
3. Резонансное рассеяние волн: в 2 т. Т. 1. Дифракционные решетки / В. П. Шестопапов, А. А. Кириленко, С. А. Масалов, Ю. К. Сиренко. – К.: Наук. думка, 1986. – 232 с.
4. Новые методы решения прямых и обратных задач теории дифракции / В. П. Шестопапов, Ю. А. Тучкин, А. Е. Поединчук, Ю. К. Сиренко. – Х.: Основа, 1997. – 283 с.
5. Сологуб В. Г. Про один метод дослідження задачі дифракції на обмеженій кількості стрічок, які розміщені в одній площині / В. Г. Сологуб // Доп. АН УРСР. Серія А. – 1975. – № 6. – С. 549–552.
6. Квач Н. В. О рассеянии E -поляризованной плоской волны конечным числом лент, расположенных в одной плоскости / Н. В. Квач, В. Г. Сологуб // Радиотехника и электрон. – 1982. – 27, № 10. – С. 2031–2034.
7. Литвиненко Л. Н. Приближенное решение задачи дифракции на ограниченной ленточной решетке / Л. Н. Литвиненко, С. Л. Просвирнин, И. И. Резник // Изв. вузов. Радиофизика. – 1980. – 23, № 6. – С. 744–748.
8. Кошовий Г. І. Системний підхід до дослідження дофрактальних дифракційних ґраток // Радиофизика и электрон. – 2011. – 2(16), № 1. – С. 141–147.

9. Хенл Х. Теория дифракции / Х. Хенл, А. Мауэ, К. Вестпфаль; пер. с нем. под ред. Г. Д. Малюжинца. – М.: Мир, 1964. – 428 с.
10. Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент / И. К. Лифанов. – М.: ТОО «Янус», 1995. – 520 с.
11. Кошовий Г. І. Розсіювання електромагнітних хвиль системами стрічок зі змінною фрактальною розмірністю / Г. І. Кошовий // Радиофизика и электрон.: Ин-т радиофизики и электрон. НАН Украины. – Х., 2007. – 12, № 3. – С. 451–455.

G. I. Koshovy

SCATTERING OF *H*-POLARIZED WAVE BY PREFRACTAL DIFFRACTION GRATINGS

The article continues developing the bases of electromagnetic theory of prefractal diffraction gratings (PFDG). PFDG consists of strips, which are situated in a plane according to segments, which are epy same stage of self similar fractal with variable Hausdorf dimension. Statement of scattering problem for the *H*-polarized electromagnetic wave by PFDG is classically strict. By the integral equation technique, two dimensional external Neumann problem for Helmholtz equation transforms to one-dimensional problem of solution of integral-differential equations' system and then to integral equations' system. Method of the problem's solution for asymptotical model of weekly filled PFDG is introduced. To show this model effectivity the case of two strips' diffraction grating is examined in details. Numerical calculation of directional characteristics and their comparison with known results presented.

Key words: self similar fractals, diffraction gratings, numeric analytical methods, modeling.

Г. И. Кошевой

РАССЕИВАНИЕ *H*-ПОЛЯРИЗОВАННОЙ ВОЛНЫ ДОФРАКТАЛЬНЫМИ ДИФРАКЦИОННЫМИ РЕШЕТКАМИ

Продолжение разработки основ электромагнитной теории дофрактальных дифракционных решеток (ДФДР). ДФДР состоит из лент, расположенных в плоскости соответственно сегментам, которые образуют некоторую стадию построения самоподобного фрактала с переменной размерностью Хаусдорфа. Постановка задачи рассеивания плоской *H*-поляризованной электромагнитной волны ДФДГ есть классически строгой. Используя метод интегральных уравнений, двухмерная внешняя задача Неймана для уравнения Гельмгольца переводится к одномерной задаче решения системы интегрально-дифференциальных уравнений, а потом к системе интегральных уравнений. Предлагается метод решения задачи для асимптотической модели слабонаполненных ДФДР. Чтобы показать эффективность этой модели, детально исследуется случай дифракционной решетки из двух лент. Проводится численный расчет характеристик направленности и их сравнение с известными результатами.

Ключевые слова: самоподобные фракталы, дифракционные решетки, численно-аналитические методы, моделирование.

Рукопис надійшов 12.04.11 р.