УДК 535:681.7.014.3

Ю. В. Корниенко

ФИЛЬТРАЦИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ, ПРИНАДЛЕЖАЩИХ КОНЕЧНОМЕРНОМУ ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ ПРОСТРАНСТВУ

Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины
12, ул. Ак. Проскуры, Харьков, 61085, Украина
E-mail: milv@ire.kharkov.ua

С позиций байесовского статистического подхода рассматривается задача оптимальной фильтрации изображений из конечномерного функционального пространства, замытых известным ядром и зарегистрированных в присутствии аддитивного гауссова шума. Общий взгляд на проблему иллюстрируется двумя конкретными практическими задачами: фильтрация изображений системы протяженных источников известной формы и определение координат точечного источника и его интенсивности как функции времени на равномерном фоне неизвестной яркости. Библиогр.: 15 назв.

Ключевые слова: байесовский статистический подход, фильтрация изображений.

Во многих практических задачах часто возникает необходимость обработки изображений дискретных источников в условиях, когда электромагнитные потоки от них перекрываются из-за недостаточного разрешения наблюдательного инструмента и влияния фона. При этом часто из характера решаемой задачи вытекает необходимость определять энергетические потоки с возможно большей точностью (например, при изучении гравитационных миражей [1, 2]). Тогда возникает задача оптимальной обработки полученных изображений.

Задачи такого рода относятся к числу обратных задач физики, в которых достижение результата часто бывает существенно затруднено влиянием шума при получении экспериментальных данных. При недостаточно аккуратной математической формулировке они часто оказываются некорректно поставленными. Поскольку шум имеет случайный характер, такие задачи требуют статистического подхода. Это было осознано еще Лапласом [3], а затем Гауссом [4] и Лежандром [5]. Существенное развитие этот подход получил значительно позже, в середине XX в. [6, 7]. Напоминанием о важности этого подхода в экспериментальной физике служит обзор [8]. Его значению при решении задач обработки изображений посвящена статья [9].

В данной работе с позиций общего подхода, сформулированного в работе [9], рассматриваются две близкие задачи оптимальной фильтрации изображений, принадлежащих конечномерным функциональным пространствам. Первая задача касается разрешения отдельных источников, из которых состоит исследуемый объект, и определения их параметров; вторая посвящена определению положения и интенсивности переменного во времени точечного источника, наблюдаемого на фоне протяженного источника постоянной во времени и пространстве, но заранее не известной яркости.

1. Формулировка общей задачи. Пусть истинное изображение исследуемого объекта описывается яркостью $B(x,\ y,\ P)$, где $x,\ y$ – декартовы координаты на плоскости, касательной к небесной сфере (угловые размеры объекта считаются малыми), B – известная функция, а P – совокупность параметров $p_1,\ p_2,\ ...,\ p_n$, значение которых до наблюдения неизвестно. Функции $B(x,\ y,\ P)$ при всех фиксированных значениях P образуют множество, которому принадлежит истинное изображение объекта. Будем называть его пространством исходных изображений и обозначим через S.

Изображение, зарегистрированное при наблюдении, описывается функцией $b(x,\ y)$, связанной с истинным изображением соотношением

$$b(x,\ y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x-x',\ y-y')\ B(x',\ y',\ P)dx'dy' + \nu(x,\ y), \qquad (1)$$

где $g(x-x',\ y-y')$ – известное ядро, описывающее замытие изображения атмосферой, аппаратурой и, возможно, другими факторами; $\nu(x,\ y)$ – реализация стационарного гауссова шума, сопровождающего регистрацию изображения. Наша физическая задача состоит в том, чтобы исходя из зарегистрированного изображения $b(x,\ y)$ найти, хотя бы приближенно, значение совокупности параметров P, т. е. восстановить истинный вид изображения объекта, по возможности исключив из него искажения, внесенные средой распространения и другими факторами.

При простейшем подходе постановка математической задачи могла бы состоять в том, чтобы рассматривая соотношение (1) как уравнение относительно P, решить его и найти P. Но эта задача с вероятностью 1 не имеет решения из-за влияния шумового слагаемого $\nu(x, y)$. Поэтому требуется более осторожное отношение к выбору математической формулировки этой задачи. Существует много различных подходов к этому вопросу: от чисто эмпирического выбора алгоритма обработки (например, [10]) и разных приемов регуляризации ([11]) до применения теории нечетких множеств [12]. Но наиболее естественным остается байесовский статистический подход [7], на котором и будет основано дальнейшее рассмотрение.

Следуя этому подходу, будем ставить задачу определения наиболее вероятного истинного изображения объекта, т. е. наиболее вероятного значения вектора P при данном виде функции $b(x, y)$.

2. Статистический подход к задаче. Пусть $R_{\text{до}}(P)$ – заданная априорная (до наблюдения) плотность распределения совокупности параметров P. Плотность $R_{\text{по}}(P)$ апостериорного распределения P (после наблюдения) в случае, когда в результате наблюдения получено изображение $b(x, y)$, выражается через нее формулой Байеса [7], которая в логарифмической форме имеет вид

$$\ln R_{\text{по}}(P) = \ln R_{\text{до}}(P) + \ln R(b(x, y)|P) + C. \tag{2}$$

Здесь $R(b(x, y)|P)$ – условная плотность вероятности получить изображение $b(x, y)$, если совокупность параметров равна P; константа C связана с нормировкой вероятности на единицу и не имеет отношения к дальнейшим выкладкам. Чтобы не усложнять дальнейшее рассмотрение, будем считать, что изображение $b(x, y)$ состоит из конечного числа элементов разрешения N и, таким образом, является элементом N-мерного пространства. При этом значения шума $\nu(x, y)$ для разных элементов изображения будем считать независимыми (белый шум). Тогда в силу предположений, сделанных ранее, эти значения являются случайными величинами, распределенными независимо и нормально с нулевым средним и одинаковой дисперсией.

При таких предположениях второе слагаемое в (2) можно записать в виде

$$\ln R(b(x, y)|P) = -\frac{k}{2}\sum_{i=1}^{N}[D(x_i, y_i)]^2, \tag{3}$$

где

$$D(x, y) = b(x, y) - \\ - \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x - x', y - y')B(x', y', P)dx'dy'; \tag{4}$$

i – номер элемента изображения; k – величина, обратная дисперсии шума. Устремляя размер элемента изображения к нулю, в пределе получим

$$\ln R(b(x, y)|P) = -\frac{K}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}[D(x, y)]^2 dxdy, \tag{5}$$

где K – величина, обратная мощности шума в передаваемой полосе частот.

Будем ставить задачу нахождения такого значения P_0 вектора P, при котором логарифм апостериорной плотности вероятности (2) достигает наибольшего значения. Приравнивая нулю градиент правой части (2) в пространстве параметров, получим уравнение для того значения P, при котором (2) достигает максимума

$$-\frac{\partial}{\partial P}R_{\text{до}}(P) + \\ + K\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} D(x, y, P)\frac{\partial}{\partial P}D(x, y, P)dxdy = 0. \tag{6}$$

Это векторное уравнение представляет собой систему n скалярных алгебраических уравнений. Если определитель матрицы вторых производных $R_{\text{по}}(P)$ по P везде отличен от нуля, эта система имеет решение, единственное в некоторой области значений P. Единственность решения во всем пространстве параметров в общем случае гарантировать нельзя. Если апостериорная плотность вероятности имеет несколько максимумов, следует выбрать тот из них, в котором $R_{\text{по}}(P)$ больше.

При не слишком большом числе параметров эту систему можно эффективно решить методом Ньютона [13].

3. Фильтрация изображений объекта, состоящего из отдельных источников. Постановка задачи. Пусть яркость источника описывается гауссовой функцией

$$s(x, y, a, \rho) = a\exp\left[-\left(x^2 + y^2\right)/2\rho^2\right], \tag{7}$$

где a пропорционально интенсивности источника; ρ – его (условный) радиус. Исследуемый объект представляет собой совокупность n таких источников, расположенных в точках $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)$, возможно, с различными значениями a и ρ. Эти источники всегда взаимно перекрываются, так как не имеют резких границ. Яркость объекта как функция координат равна сумме яркостей составляющих его источников:

$$B(x, y, A, R) = \sum_{i=1}^{n} s(x - x_i, y - y_i, a_i, \rho_i), \tag{8}$$

где a_i и ρ_i характеризуют i-й источник;

$$A = \{a_i, i = 1, ..., n\}, \quad \rho = \{\rho_i, i = 1, ..., n\} - \tag{9}$$

векторы, составленные из соответствующих параметров.

Изображение (8) подвергается замытию разностным ядром $g(x - x', y - y')$ и воздействию аддитивного гауссова шума с мощностью $1/K$ и постоянной спектральной плотностью в пределах конечной полосы пространственных частот, за пределами которой она равна нулю. Тогда зарегистрированное изображение равно

$$b(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x - x', y - y') \times$$
$$\times s(x' - x_i, y' - y_i, a_i, \rho_i) dx'dy' + \nu(x, y), \tag{10}$$

где $\nu(x, y)$ – реализация шума.

Известны априорная плотность распределения параметров A и R, замывающее ядро $g(x - x', y - y')$, а также мощность шума $1/K$. Требуется найти яркость объекта $B_0(x, y)$, имеющую наибольшую апостериорную плотность вероятности при данном результате наблюдения $b(x, y)$.

4. Решение задачи в простейшем случае. Ограничимся распространенным случаем, когда ядро замытия можно считать гауссовой функцией

$$g(x, y) = N_g \, \mathrm{e}^{-\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{2r^2}}, \tag{11}$$

где r – радиус замытия; N_g – нормирующий множитель, обеспечивающий равенство интеграла от ядра единице. Предположим также, что значения параметров a_i, ρ_i, x_i, y_i и a_j, ρ_j, x_j, y_j для разных i, j независимы друг от друга и распределены нормально. Из этого следует такое выражение для априорной плотности распределения $R_{\text{до}}(P)$

$$R_{\text{до}}(P) = N_R \, \mathrm{e}^{-\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha a_i^2 + \beta \rho_i^2 + \xi x_i^2 + \eta y_i^2}. \tag{12}$$

Второе слагаемое в (2) в силу сделанных ранее предположений выражается формулой (5). Учитывая, что свертка двух гауссовых функций со значениями радиуса σ, равными σ_1 и σ_2 есть гауссова функция с

$$\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}, \tag{13}$$

интеграл в (4) можно представить в виде суммы гауссовых функций. Поэтому отыскание значения P, наиболее вероятного при данном результате эксперимента $b(x, y)$, сводится к минимизации по P функционала

$$L[b(x, y), P] = \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha a_i^2 + \beta \rho_i^2 + \xi x_i^2 + \eta y_i^2\right) +$$
$$+ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} d^2(x, y, P) dx dy, \tag{14}$$

где

$$d(x, y, P) = b(x, y) -$$
$$- \sum_{i=1}^{n} a_i \exp\left\{-\left[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 / 2\rho_i'^2\right]\right\}^2 - \tag{15}$$

невязка, отличающая гипотетическое изображение при данном P от его фактического вида $b(x, y)$;

$$\rho_i' = \sqrt{\rho_i^2 + r^2}. \tag{16}$$

Если не учитывать априорную информацию об объекте и опустить первое слагаемое в (14) (метод максимального правдоподобия [14]), исходная задача сводится к оптимальной аппроксимации функции $b(x, y)$ суммой n гауссовых функций по критерию минимума среднеквадратичной погрешности. Учет этого слагаемого сдвигает получаемую оценку параметров в сторону лучшего согласия с априорными сведениями об их значении.

Дифференцируя (14) по a_i, ρ_i, x_i, y_i, получим систему уравнений, представляющих в компонентах для данного конкретного случая общее уравнение (6). Она состоит из n однотипных четверок уравнений, отличающихся только значением i и относящихся каждая к своему источнику с номером i, однако не распадается на отдельные четверки из-за вхождения всех компонент P в каждое уравнение через $d(x, y, P)$. Решать эту систему нужно численно. При не слишком большом числе источников (единицы и десятки) весьма эффективным будет метод Ньютона.

5. Случай неизвестного числа источников. На практике число отдельных источников n, составляющих исследуемый объект, может быть заранее неизвестным. Делая относительно n различные предположения, мы будем получать по выше изложенной схеме каждый раз новый результат. Увеличивая предполагаемое число источников, можно аппроксимировать зарегистрированное изображение $b(x, y)$ все с большей точностью. Поэтому такой подход не позволяет обоснованно остановиться на каком-то разумно выбранном значении n без учета дополнительной информации об объекте, что требует уточнения постановки задачи.

Будем считать, что помимо априорных сведений об объекте, перечисленных в разд. 4, для всех натуральных n условием задачи определена априорная вероятность w_n того, что число источников, составляющих объект, равно *n*. Тогда пространство S, введенное в разд. 1, становится суммой пространств $S_1, S_2, ..., S_n, ...,$ причем пространство S_n является $4n$-мерным и точка в нем определяется координатами (a_1, ρ_1, x_1, y_1), (a_2, ρ_2, x_2, y_2), ..., (a_n, ρ_n, x_n, y_n). Априорное распределение для P будем характеризовать последовательностью значений w_n априорной вероятности того, что объект принадлежит к пространству S_n, и последовательностью функций $R_{\text{до}_n}(P_n)$, определяющих априорную плотность вероятности того, что значение вектора параметров P равно P_n, если объект принадлежит пространству S_n. При этом n принимает все целые значения от 1 до ∞. Каждую функцию $R_{\text{до}_n}(P_n)$ будем считать нормированной так, что интеграл от нее по всему пространству S_n равен единице, как и сумма всех w_n должна быть равна единице. Таким образом, априорная вероятность dw того, что P лежит в окрестности с объемом $d\Omega$ точки P_n в пространстве S_n, равна

$$dw = w_n R_{\text{до}_n}(P_n) d\Omega. \tag{17}$$

Согласно формуле Байеса, апостериорная вероятность того, что P принадлежит этой окрестности, равна

$$dW = \frac{w_n R_{\text{до}_n}(P_n) R(b(x,y)|P_n) d\Omega}{\sum_{n=1}^{\infty} w_n \int R_{\text{до}_n}(P_n) R(b(x,y)|P_n) d\Omega}. \tag{18}$$

Поэтому апостериорная плотность вероятности $R_{\text{по}n}(P_n)$ в пространстве S_n как предел отношения dW к $d\Omega$ при $d\Omega \to 0$ (производная Радона-Никодима вероятности W по объему Ω в точке P_n) равна

$$R_{\text{по}n}(P_n) = \frac{w_n R_{\text{до}_n}(P_n) R(b(x,y)|P_n)}{\sum_{n=1}^{\infty} w_n \int R_{\text{до}_n}(P_n) R(b(x,y)|P_n) d\Omega}. \tag{19}$$

Интеграл от этого выражения по всему пространству S_n дает апостериорную вероятность того, что объект состоит из n источников. В логарифмической форме эта формула имеет вид, подобный (2), и отличается от нее наличием дополнительного слагаемого $\ln w_n$, отражающего отсутствие точного априорного знания о числе источников, составляющих наблюдаемый объект.

Ставится задача найти такое n и такое P_n в S_n, для которых апостериорная плотность вероятности при данном результате наблюдения $b(x, y)$ имеет наибольшее значение.

Эта задача решается так же, как и задача с известным числом источников, рассмотренная в разд. 4, однако теперь ее надо решить для каждого вероятного значения n и выбрать то из них, для которого максимальная апостериорная плотность вероятности P_n имеет наибольшее значение. Чтобы это было практически осуществимо, надо, чтобы последовательность w_n достаточно быстро стремилась к нулю, в противном случае искомых наиболее вероятных значений n может просто не существовать, как об этом уже было сказано в начале этого раздела. Таким образом, попытка подойти к этой задаче с позиций метода максимального правдоподобия, т. е. исходя из функции правдоподобия, без учета априорного распределения, может привести к бессмысленной постановке задачи. Это еще один пример такого рода. Другой связан с винеровским фильтром и кратко рассмотрен в работе [15].

6. Определение зависимости от времени интенсивности точечного источника, наблюдаемого на фоне протяженного объекта постоянной яркости. Пусть теперь истинная яркость исследуемого объекта зависит от времени и в *j*-й момент времени имеет вид суммы

$$B_j(x, y) = I_j \delta(x - x_0, y - y_0) + f(x, y, Q), \tag{20}$$

где первое слагаемое – яркость точечного источника (I_j – его неизвестная интенсивность), а второе – неизвестная яркость фона, не зависящая от времени; δ обозначает δ-функцию; x_0, y_0 – координаты точечного источника (не зависящие от времени); Q – совокупность *n* параметров, характеризующих зависимость яркости фона от координат. Наблюдаемая яркость объекта при *j*-м измерении под влиянием атмосферы и несовершенств наблюдательного инструмента оказывается сверткой истинной яркости (20) с известным ядром $g_j(x - x', y - y')$, но, кроме того, она возмущена аддитивным стационарным гауссовым шумом и в результате имеет вид

$$b_j(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g_j(x - x', y - y') B_j(x', y') dx'dy' + \nu_j(x, y). \tag{21}$$

Ядра g_i будем считать нормированными так, что интеграл от каждого ядра равен 1. Измерение яркости объекта выполнено в *m* различных моментов времени, при этом получены изображения $b_1(x, y)$, $b_2(x, y)$, ..., $b_m(x, y)$. В эти моменты интенсивность точечного источника имела (неизвестные нам) значения I_1, I_2, ..., I_m. Требуется найти наиболее вероятные при данном результате наблюдения значения интенсивности источника в моменты получения изображений $b_1, b_2, ..., b_n$.

При такой постановке задачи математический объект, подлежащий статистической оценке (вектор параметров), определяется уже не только совокупностью n параметров P, но и m значениями интенсивности точечного источника $I_1, I_2, ..., I_m$, т. е. всего $m+n$ параметрами. Обозначая эту совокупность параметров через P, мы вернемся к первоначальной постановке задачи с той разницей, что сигналом, подлежащим фильтрации, теперь становится не одиночное изображение, а совокупность m изображений.

Чтобы не усложнять задачу излишней общностью, будем считать, что априорное распределение интенсивности точечного источника одинаково во все моменты наблюдения и независимо от распределения параметров Q. Тогда для логарифма апостериорной плотности вероятности, аналогично (2), получим

$$\begin{aligned}&\ln R_{\text{по}}(P) = m\ln R_I(I) + m\ln R_Q(Q) + \\ &+\ln R(b(x,y)|P,Q) + C_1,\end{aligned} \tag{22}$$

где $R_{\text{по}}(P)$ – апостериорная плотность вероятности параметров P; $R_I(I)$ – априорная плотность вероятности интенсивности I; $R_Q(Q)$ – априорная плотность распределения параметров Q; $R(b(x,y)|P,Q)$ – условная плотность вероятности получить результат наблюдения $b(x,y)$, состоящий из изображений $b_1(x,y)$, $b_2(x,y)$, ..., $b_m(x,y)$, при данных значениях параметров P. При естественном предположении об отсутствии корреляции между шумом на разных изображениях условную плотность вероятности можно представить в виде

$$R(b(x,y)|P,Q) = \prod_{i=1}^{m} R_i(b_i(x,y)|P,Q), \tag{23}$$

где $R_i(b_i(x,y)|P,Q)$ – условная плотность вероятности получить при наблюдении в i-й момент времени изображение $b_i(x,y)$, если совокупность параметров задачи имеет значение P. Если при этом дополнительно предположить, что шум на i-м изображении является аддитивным, стационарным и гауссовым со спектральной плотностью N_i, постоянной в пределах полосы пропускания аппаратуры и равной нулю за ее пределами, условную плотность вероятности R_i можно представить в виде произведения m сомножителей, относящихся каждый к своему изображению. Тогда (22) можно представить в виде

$$\begin{aligned}&-\ln R_{\text{ïî}}(P) = -m\ln R_I(I) - m\ln R_Q(Q) + \\ &+\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{N_i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Big(b_i(x,y) - \\ &-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_i(x-x', y-y')B(x',y',P)dx'dy'\Big)^2 dxdy.\end{aligned} \tag{24}$$

Таким образом, задача нахождения наиболее вероятного значения P при данном $b(x,y)$ сводится к минимизации квадратичного функционала от $b(x,y)$ (24) по параметру P, которая не вызывает существенных трудностей при современном состоянии вычислительной техники.

7. Иллюстрация полученного результата на простейших частных случаях. Рассмотрим ряд простейших частных случаев этой задачи, которые часто встречаются на практике и могут наглядно иллюстрировать смысл полученного результата.

Определение интенсивности изолированного источника. Пусть для начала точечный объект расположен в начале координат, яркость фона равна нулю, а априорная плотность вероятности единственного остающегося параметра $R_{\text{до}}(I)$ имеет достаточно широкий максимум, чтобы ее зависимостью от I в пределах данного рассмотрения можно было пренебречь. Тогда функционал (24) принимает вид

$$\begin{aligned}&-\ln R_{\text{по}}(P) = \\ &=\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{N_i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(b_i(x,y) - I_i g_i(x,y))^2 dxdy.\end{aligned} \tag{25}$$

Чтобы найти его минимум по $I = \{I_1, I_2, ..., I_n\}$, надо приравнять нулю его градиент по I и решить полученную систему уравнений. Эта система распадается на отдельные уравнения, каждое из которых относится к своему моменту времени и имеет вид

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_i(x,y)(b_i(x,y) - I_i g_i(x,y))dxdy = 0. \tag{26}$$

При отсутствии шума регистрации второй сомножитель под интегралом был бы равен нулю и оптимальная оценка I совпала бы с его истинным значением. В реальном случае она отличается от него на случайную величину, дисперсия которой пропорциональна мощности шума.

Обратим внимание на то, что под интегралом присутствует весовой множитель $g_i(x,y)$, который ограничивает область на плоскости, вносящую вклад в этот интеграл. Это исключает влияние на получаемый результат изображения

$b_i(x, y)$ в областях плоскости, удаленных от точечного источника, где значение ядра пренебрежимо мало, как это и следовало бы сделать исходя из интуитивных соображений.

Случай ненулевой яркости фона. Пусть яркость фона B_0 отлична от нуля, постоянна во времени, не зависит от координат и имеет априорную плотность вероятности с широким максимумом, позволяющим считать ее постоянной в пределах данного рассмотрения. Остальные предположения, сделанные ранее, будем считать выполненными. В этом случае функционал, подлежащий минимизации, отличается от (25) слагаемым в скобках, связанным с фоном, и имеет вид

$$-\ln R_{\text{по}}(P) = \\ = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{N_i} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (b_i(x, y) - I_i g_i(x, y) - B_0)^2 \, dxdy. \tag{27}$$

Дифференцируя это выражение по всем I_i и по B_0 и приравнивая производные нулю, получим систему из $m+1$ уравнений, определяющих наиболее вероятные значения I_i и B_0 при данном результате эксперимента $b(x, y)$. Первые m из них подобны (26) и отличаются от них слагаемым B_0:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g_i(x, y)(b_i(x, y) - I_i\, g_i(x, y) - B_0) dxdy = 0, \\ i = 1, 2, ..., m, \tag{28}$$

последнее же имеет вид

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{N_i} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \big(b_i(x, y) - I_i g_i(x, y) - B_0\big) dxdy = 0. \tag{29}$$

Если бы яркость фона B_0 была известна, равенства (28) означали бы, что оптимальная оценка каждого I_i – это та, при которой $I_i g_i(x, y)$ наименее (в смысле среднеквадратичного отклонения) отличается от $b_i(x, y) - B_0$, что вполне естественно. С другой стороны, в случае, когда размеры кадра намного превосходят радиус ядра замытия, интеграл в (29) мало изменится, если из области интегрирования исключить ту подобласть, в которой ядро g_i существенно отлично от нуля. После такой модификации уравнение (29) не будет содержать I_i, и его можно решать отдельно от уравнений (28). Его решением будет средняя яркость фона по всем кадрам за пределами области влияния точечного источника. Таким образом, полученный результат оказывается доступным для практического использования.

Следует отметить, что в этих двух примерах системы уравнений, определяющие искомые значения, получались линейными и никаких трудностей для решения не представляли. Так будет не всегда; более общие задачи могут приводить к более сложным системам уравнений, требующим для решения специальных приемов.

Измерение координат точечного источника. Пусть теперь яркость фона опять равна 0, интенсивность точечного источника I постоянна во времени и заранее известна, а определению подлежат координаты источника x_0 и y_0. Ядра замытия $g_i(x, y)$ известны. Для простоты будем считать их гауссовыми с радиусом r_i. Имеется априорная информация о положении источника: прежние исследования дали для его координат значения X, Y со случайной погрешностью, распределенной нормально и изотропно с дисперсией σ. В результате наблюдений получена серия из m изображений $b_i(x, y)$ с $i = 1 \dots m$. Требуется на основании этого результата дать новую статистическую оценку координат источника.

Поскольку в этом случае яркость объекта выражается δ-функцией, функционал (24) принимает вид

$$-\ln R_{\text{по}}(x_0, y_0) = \frac{1}{2\sigma^2}\Big[(x_0 - X)^2 + (y_0 - Y)^2\Big] + \\ + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{N_i} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (b_i(x, y) - g_i(x - x_0, y - y_0))^2 \, dxdy, \tag{30}$$

где

$$g_i(x - x_0, y - y_0) = A_i \, \mathrm{e}^{\frac{1}{r_i}\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\right]}. \tag{31}$$

Искомой оптимальной оценкой координат x_0, y_0 будут такие их значения, при которых (30) достигает минимума. Дифференцируя (30) по x_0 и по y_0 и приравнивая производные нулю, получим систему уравнений, определяющую искомые значения

$$\frac{1}{\sigma^2}(x_0 - X)^2 + \\ + 2\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{N_i} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x - x_0) g_i(x - x_0, y - y_0) \times \\ \times (b_i(x, y) - g_i(x - x_0, y - y_0)) dxdy = 0; \tag{32}$$

$$\frac{1}{\sigma^2}(y_0 - Y)^2 + \\ + 2\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{N_i} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (y - y_0) g_i(x - x_0, y - y_0) \times \\ \times (b_i(x, y) - g_i(x - x_0, y - y_0)) dxdy = 0. \tag{33}$$

В отсутствие первого слагаемого координаты x_0, y_0 определяются этой системой как такие, которые обеспечивают наименьшее квадратичное отклонение ожидаемых изображений от фактически полученных. При этом интегралы от квадрата разности по каждому изображению входят с соответствующими весовыми множителями $\frac{1}{N_i}$, придающими при суммировании в (30) больший вес тем слагаемым, которым соответствуют изображения, полученные с меньшей мощностью шума. Учет первого слагаемого смещает оценку x_0, y_0 в сторону полученных ранее значений *X*, *Y*, что и является учетом априорной информации о значениях x_0, y_0.

Выводы. Корректная обработка экспериментальных данных, позволяющая в максимальной степени извлечь информацию об исследуемом объекте из результатов эксперимента или наблюдения, наилучшим образом объединить результаты многих экспериментов, проведенных в разных условиях, и объективно оценить степень достоверности полученных результатов и основанных на них выводов, давно являлась актуальной, учитывая сложность проводимых экспериментов. Однако ее внедрение долгое время сдерживалось скромными возможностями вычислительной техники и плохой обеспеченностью экспериментаторов ее средствами. В настоящее время эти препятствия постепенно теряют свою актуальность и не являются оправданием недостаточно внимательного отношения к строгому статистическому анализу экспериментальных или наблюдательных данных. Особенно это относится к тем случаям, когда экспериментальная информация обходится очень дорого, в частности к астрономическим наблюдениям на больших телескопах и космическим экспериментам. Наиболее эффективное извлечение ее из получаемых данных – это наиболее экономное использование огромных средств, которые вкладываются в современные наземные телескопы и космические аппараты.

1. *Блиох П. В.* Гравитационные линзы / П. В. Блиох, А. А. Минаков. – К.: Наук. думка, 1989. – 239 с.
2. *Observational* determination of the time delays in gravitational lens system Q2237+0305 / V. Vakulik, R. Schild, V. Dudinov et al. // Astronomy and Astrophysics. – 2006. – 447, N 3. – P. 905–913.
3. *Laplace P. S.* Oeuvres completes. Vols. 1–14. V. 8. / P. S. Laplace. – P., 1891. – P. 27–65.
4. *Гаусс К. Ф.* Теория движения небесных тел, вращающихся вокруг Солнца по коническим сечениям / К. Ф. Гаусс // Избранные геодезич. соч. – 1809. – 1. – 104 с.
5. *Legendre A. M.* Nouvelles methodes pour la determination des orbites des cometes. Second supplement / A. M. Legendre. – Paris, 1820. – P. 79–80.
6. *Вальд А.* Статистические решающие функции // Позиционные игры / А. Вальд. – М.: Наука, 1967. – С. 300–522.
7. *Де Гроот М.* Оптимальные статистические решения / М. де Грот; пер. с англ. под ред. Ю. В. Линника и А. М. Кагана. – М.: Мир, 1974. – 491 с.
8. *Турчин В. Ф.* Использование методов математической статистики для решения некорректных задач / В. Ф. Турчин, В. П. Козлов, М. С. Малкевич // Успехи физ. наук. – 1970. – 102, вып. 3. – С. 345–386.
9. *Корниенко Ю. В.* Статистический подход к фильтрации и информативность изображения / Ю. В. Корниенко // Радиофизика и электрон.: сб. науч. тр. / Ин-т радиофизики и электрон. НАН Украины. – Х., 2005. – 10, спецвыпуск. – С. 652–676.
10. *Ming Jiang.* Convergence Studies on Iterative Algorithms for Image Reconstruction / Ming Jiang, Ge Wang // IEEE Transactions on Medical Imaging. – 2003. – 22, N 5. – P. 569–579.
11. Математическая энциклопедия: в 5 т. Т. 4. Регуляризация / В. Я. Арсенин, А. Н. Тихонов; под ред. И. М. Виноградова. – М.: Сов. энцикл., 1984. – 933 с.
12. *Кофман А.* Введение в теорию нечетких множеств / А. Кофман. – М.: Радио и связь, 1982. – 432 с.
13. *Бахвалов Н. С.* Численные методы / Н. С. Бахвалов. – М.: Наука, 1973. – 632 с.
14. *Липцер Р. Ш.* Статистика случайных процессов. Нелинейная фильтрация и смежные вопросы / Р. Ш. Липцер, А. И. Ширяев. – М.: Наука, 1974. – 696 с.
15. *Wiener Norbert.* Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series / Norbert Wiener. – New York: Wiley & Sons, 1950. – 163 p.

Yu. V. Kornienko

FILTERING OF IMAGES FROM FINITE-DIMENSIONAL FUNCTIONAL SPACE

The problem on the optimal filtering of images from the finite-dimensional functional space which are blurred by a known kernel and recorded in the presence of additive Gaussian noise, is considered from the standpoint of the Bayes statistical approach. A general view on the problem is illustrated by two specific practical problems: filtering of images of an extended source system of known shape, and determination of coordinates of a point source and its intensity as a time-varying function against the uniform background of unknown brightness.

Key words: Bayes statistical approach, image filtering.

Ю. В. Корнієнко

ФІЛЬТРАЦІЯ ЗОБРАЖЕНЬ, ЯКІ НАЛЕЖАТЬ ДО СКІНЧЕННОВИМІРНОГО ФУНКЦІОНАЛЬНОГО ПРОСТОРУ

З позиції байєсівського статистичного підходу розглянуто задачу оптимальної фільтрації зображень із скінченновимірного функціонального простору, які замиті відомим ядром та зареєстровані в присутності адитивного гауссова шуму. Загальний погляд на проблему ілюструється двома конкретними практичними задачами: фільтрація зображень системи протяжних джерел відомої форми і визначення координат точкового джерела та його інтенсивності як функції часу на рівномірному фоні невідомої яскравості.

Ключові слова: байєсівський статистичний підхід, фільтрація зображень.

Рукопись поступила 03.02.11 г.