

УДК 523.68, 521.31

П. Н. Козак

Астрономическая обсерватория Национального университета имени Тараса Шевченко,
04053, Киев-53, ул. Обсерваторная 3

Векторный метод определения параметров траектории и элементов гелиоцентрической орбиты метеора для телевизионных наблюдений

Приводится векторный метод определения параметров траектории метеороида в атмосфере Земли и элементов его гелиоцентрической орбиты. В качестве основной используется геоцентрическая прямоугольная система координат, что позволяет избежать некоторых неточностей и более просто произвести все вычисления. Метод предназначен в основном для применения к результатам телевизионных наблюдений метеоров с учетом возможностей современной цифровой обработки и алгоритмических языков, хотя может быть использован и для других методов наблюдений. Учитываются такие особенности цифровой обработки телевизионных наблюдений слабых метеоров как их короткая угловая длина, малое количество точек с координатами головы метеора и известными моментами времени, определяемые кадровой разверткой телевизионной трубки, что усложняет вычисление скорости, и одновременно — большое общее количество измеренных точек вдоль следа метеора, что упрощает более точное вычисление радианта.

ВЕКТОРНИЙ МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ТРАЄКТОРІЇ І ЕЛЕМЕНТІВ ГЕЛІОЦЕНТРИЧНОЇ ОРБИТИ МЕТЕОРА ДЛЯ ТЕЛЕВІЗІЙНИХ СПОСТЕРЕЖЕНЬ, Козак П. М. — Приводиться векторний метод визначення параметрів траєкторії метеороїда в атмосфері Землі і елементів його геліоцентричної орбіти. За основну систему відліку використано геоцентричну прямокутну систему координат, що дозволяє уникнути деяких неточностей і простіше провести усі обчислення. Метод призначено в основному для застосування до результатів телевізійних спостережень метеорів з урахуванням можливостей сучасної цифрової обробки та алгоритмічних мов, хоча він може бути застосований і для інших методів спостережень. Враховуються такі особливості цифрової обробки телевізійних спостережень слабких метеорів, як їхня коротка кутова довжина, мала кількість точок з координатами голови метеора і відомими моментами часу, які визначаються кадровою розгорткою телевізійної трубки, що ускладнює обчислення швидкості, та одночасно — велика загальна кількість виміряних точок вздовж сліду метеора, що спрощує точніше обчислення радіанта.

A VECTOR METHOD FOR THE DETERMINATION OF TRAJECTORY PARAMETERS AND HELIOCENTRIC ORBIT ELEMENTS OF A METEOR IN TV OBSERVATIONS, by Kozak P. M. — A vector method for the determination of trajectory parameters of a meteor in the Earth's atmosphere and its heliocentric orbit elements is developed. The geocentric rectangular coordinate system is used as the main one, which allows us to avoid some inaccuracies and carry out all the calculations easier. The method is largely targeted for the application to the results of TV observations of meteors with taking into account possibilities of the modern digital processing and algorithm languages, but it can be used for other observational methods as well. The method enables one to take into account such features of the digital processing of TV observations of faint meteors as their short angular length, few amount of points with coordinates of a meteor head and known time moments determined by TV tube frame rate, which complicates the velocity calculation, and, at the same time, the great overall number of measured points along a meteor trail, which simplifies more accurate radiant calculations.

ВВЕДЕНИЕ

В эпоху фотографических наблюдений метеоров было разработано достаточно много методов определения параметров траектории метеороида в атмосфере и элементов его гелиоцентрической орбиты. Практически все они основывались на результатах базисных наблюдений, обеспечивающих возможность получения наиболее полной информации о метеоре, и использовали ряд общих формул. Например, для определения дальности до метеора использовалась формула триангуляционного треугольника. Для определения скорости использовались отсчеты времени, соответствующие разрывам в следе изображения метеора на фотографии, получаемые вследствие применения обтюраторов.

Отличия методов состояли в основном в применении различных математических аппаратов. Некоторые из них [3, 9, 15] для определения больших кругов метеорных следов из двух пунктов и координат радианта использовали довольно громоздкие формулы сферической астрономии. В других работах [6, 12, 17] частично применялись элементы векторного анализа. В некоторых случаях применялись уравнения прямых и плоскостей, используемых в аналитической геометрии, или комбинирование их с векторными компонентами [19]. Вторым различием методов являлось применение различных топоцентрических систем координат (СК) — горизонтальных и экваториальных. Из-за этого некоторые из параметров определялись неточно и требовали коррекции, например координаты радиантов метеоров за зенитное притяжение [1], получаемые приближенно из формулы Скиапарелли [6]. Практически во всех методах на том или ином этапе используются вспомогательные разложения параметров в ряды, что неоправданно усложняет выкладки. Часто работы по методам вычисления элементов гелиоцентрической орбиты метеороида по полученным параметрам траектории публиковались отдельно от последних [5, 17].

При современной цифровой обработке результатов базисных телевизионных наблюдений [10] измеряются величины, несколько отличающиеся от фотографических. Для определения радианта метеора можно использовать максимально возможное количество точек вдоль метеорного следа, определяемое возможностями оцифровывающего устройства (150—300 точек). Для вычисления скорости используются измерения координат головы метеора в ряде последовательных телевизионных кадров с промежутками времени между ними, соответствующими частоте кадровой развертки телевизионной

системы (в среднем 5—8 точек).

Здесь предлагается метод, полностью использующий возможности телевизионных систем и включающий вычисление как всех параметров траектории метеора в атмосфере Земли, так и элементов его гелиоцентрической орбиты. Метод базируется исключительно на применении аппарата векторного анализа на всех этапах вычислений. Еще одной отличительной чертой данного метода является использование прямоугольной геоцентрической СК в качестве основной, что дает возможность провести более строгие и упрощенные вычисления.

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ И СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

В качестве исходных данных будем рассматривать геодезические долготы $\lambda_{gd,A}$, $\lambda_{gd,B}$, широты $\varphi_{gd,A}$, $\varphi_{gd,B}$ и высоты над уровнем моря h_A , h_B пунктов наблюдения A и B ; дату и всемирное время UT в момент пролета метеора; полученные после цифровой астрометрической обработки [10] телевизионных изображений метеоров, зарегистрированных из двух пунктов, последовательности экваториальных координат на дату наблюдения всех N точек вдоль следа метеора и M точек с фиксированным положением метеороида и соответствующим им относительным моментам времени: α_{Ai} , δ_{Ai} , $i = 1, \dots, N_A$, α_{Ak} , δ_{Ak} , t_{Ak} , $k = 1, \dots, M_A$ для пункта A и α_{Bj} , δ_{Bj} , $j = 1, \dots, N_B$, α_{Bl} , δ_{Bl} , t_{Bl} , $l = 1, \dots, M_B$ для пункта B , а также их дисперсии. Как правило, $M_A \ll N_A$ и $M_B \ll N_B$.

При обработке будем пользоваться географической геоцентрической прямоугольной (ось Z направлена в полюс мира, ось X проходит через гринвичский меридиан, ось Y — для дополнения право-ориентированной тройки векторов) и соответствующей сферической (λ, φ) СК и их топоцентрическими аналогами, размещенными в пунктах наблюдения A и B .

В прямоугольной СК, кроме полных векторов \mathbf{R} с длиной R и координатами X , Y , Z ($R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$), будем пользоваться единичными векторами r и их направляющими косинусами x , y , z : $x = X/R$, $y = Y/R$, $z = Z/R$, $\mathbf{R} = Rr$ и

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 1. \quad (1)$$

Связь между направляющими косинусами в прямоугольной СК и сферическими координатами определяется классическими формулами

$$\begin{aligned} x_i &= \cos\varphi_i \cos\lambda_i, \\ y_i &= \cos\varphi_i \sin\lambda_i, \\ z_i &= \sin\varphi_i \end{aligned} \quad (2)$$

для прямого перехода и

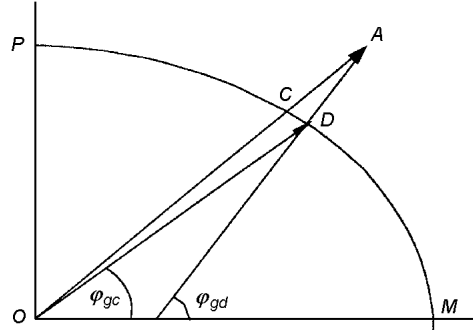
$$\begin{aligned} \varphi_i &= \arcsin z_i, \\ \lambda_i &= \arctg(y_i/x_i) + c, \end{aligned} \quad (3)$$

где $c = 0$, если $x_i > 0$, и $c = \pi$, если $x_i < 0$ (подразумевая, что функция арктангенса возвращает аргумент в диапазоне от $-\pi/2$ до $+\pi/2$) — для обратного.

Перед началом вычислений геодезические координаты пунктов наблюдений переведем в географическую геоцентрическую прямоугольную СК. Для этого воспользуемся рис. 1.

Искомый геоцентрический вектор \mathbf{R}_{OA} точки пункта наблюдения A найдем как сумму векторов $\mathbf{R}_{OA} = \mathbf{R}_{OD} + \mathbf{R}_{DA}$. Направляющие косинусы

Рис. 1. Схема вычисления геоцентрического вектора \mathbf{R}_{OA} наблюдательного пункта A : OP — направление на полюс, OM — плоскость экватора, PDM — меридиан пункта наблюдения, DA — высота пункта наблюдения над уровнем моря.



вектора \mathbf{R}_{DA} в географической геоцентрической прямоугольной СК легко находятся через $\lambda_{gd,A}$, $\varphi_{gd,A}$ согласно (2), а длина равняется высоте над уровнем моря $h_A = DA$. Для того чтобы вычислить компоненты вектора \mathbf{R}_{OD} , сначала перейдем при помощи классических формул [7] от угловых геодезических координат точки D к ее геоцентрическим координатам, воспользовавшись при этом элементами земного сфероида МГСС, Канберра, 1979 г. [2] (большая полуось $a_{\oplus} = 6378.137$ км, эксцентриситет $e_{\oplus} = 0.08181919$): $\lambda_{gc,D} = \lambda_{gd,D}$, $\text{tg}\varphi_{gc,D} = (1 - e_{\oplus}^2)\text{tg}\varphi_{gd,D}$, подразумевая, что геодезические координаты точек A и D равны, и откуда согласно (2) найдем направляющие косинусы OD , а длину затем найдем из выражения [2]:

$$R_{OD} = \frac{a_{\oplus}\sqrt{1 - e_{\oplus}^2}}{\sqrt{1 - e_{\oplus}^2\cos^2\varphi_{gc,D}}}. \quad (4)$$

Сложив оба вектора, найдем, таким образом, компоненты вектора \mathbf{R}_{OA} . Аналогично находится вектор \mathbf{R}_{OB} для пункта B .

Далее переведем экваториальные угловые координаты точек на метеоре в соответствующие географические топоцентрические. Очевидно, что географическая и экваториальная системы координат, размещенные в одной точке, отличаются друг от друга лишь поворотом вокруг оси Z на угол, который является не чем иным, как звездным гринвичским временем S_G , выраженным в угловой мере. Поэтому для перехода из экваториальной прямоугольной в географическую прямоугольную СК и наоборот можно воспользоваться матрицами поворота вокруг оси Z : $\mathbf{r}_{gAi} = \mathbf{M}_{eg}\mathbf{r}_{eAi}$ (из экваториальной в геоцентрическую) и $\mathbf{r}_{eAi} = \mathbf{M}_{ge}\mathbf{r}_{gAi}$ (из геоцентрической в экваториальную), где

$$\mathbf{M}_{eg} = \begin{bmatrix} \cos S_G & \sin S_G & 0 \\ -\sin S_G & \cos S_G & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$\mathbf{M}_{ge} = \begin{bmatrix} \cos S_G & -\sin S_G & 0 \\ \sin S_G & \cos S_G & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Приведенными матрицами поворота мы воспользуемся позже, при переводе геоцентрической скорости из географической в экваториальную СК. На данном этапе удобнее воспользоваться более простыми формулами перевода угловых величин:

$$\begin{aligned}\varphi_i &= \delta_i, \\ \lambda_i &= \alpha_i - S_G.\end{aligned}\tag{6}$$

Выполним данные преобразования для обоих пунктов. Следует отметить, что выбранная СК и преобразования согласно (6) были использованы еще в работе [6]. Гринвичское звездное время S_G в момент пролета метеора выразим через УТ [13]:

$$S_G = S_{G0} + (1 + \mu) UT,$$

где S_{G0} — гринвичское звездное время в полночь, значение которого на дату можно получить путем разложения в ряд по времени [18], либо как и $\mu = 0.0027379093$, взять из [2]. При помощи формул (6) и (2) получим направляющие косинусы точек на метеоре в географической топоцентрической прямоугольной СК пунктов A и B : r_{Ai0} , $i = 1, \dots, N_A$, r_{Ak0} , t_{Ak} , $k = 1, \dots, M_A$, r_{Bj0} , $j = 1, \dots, N_B$, r_{Bl0} , t_{Bl} , $l = 1, \dots, M_B$.

ВЫЧИСЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ТРАЕКТОРИИ МЕТЕОРОИДА

Вычисление радианта. Вычисления начнем с определения направляющих косинусов векторов нормалей к плоскостям, проходящих через траекторию метеора и пункты наблюдений — r_{AP} и r_{BP} . Для этого воспользуемся двумя системами уравнений, которые можно решить методом наименьших квадратов:

$$\begin{aligned}r_{AP}r_{Ai0} &= 0, \\ r_{BP}r_{Bj0} &= 0.\end{aligned}$$

Рассмотрим более детально решение системы уравнений для пункта A (для пункта B — аналогично). Запишем систему в координатной форме:

$$x_{AP}x_{Ai0} + y_{AP}y_{Ai0} + z_{AP}z_{Ai0} = 0.$$

С учетом (1) очевидно, что из искомых направляющих косинусов вектора полюса только два являются независимыми. Поэтому перепишем систему в виде отношения двух направляющих косинусов к третьему. Для этого разделим каждое уравнение на максимальную по модулю составляющую r_{AP} . Найти, которая из них является наибольшей, можно вычислив направляющие косинусы вектора полюса приближенно, через векторное произведение единичных векторов крайних точек на метеоре:

$$r_{AP0} = \frac{r_{A1} \times r_{AN_A}}{|r_{A1} \times r_{AN_A}|}.$$

Для определенности будем полагать, что это z_{AP} . Решая систему $\xi_{AP}x_{Ai0} + \eta_{AP}y_{Ai0} = -z_{Ai0}$ методом наименьших квадратов, найдем величины $\xi_{AP} = x_{AP}/z_{AP}$, $\eta_{AP} = y_{AP}/z_{AP}$. Привлекая уравнение (1), вычислим направляющие косинусы вектора полюса из пункта A :

$$\begin{aligned}z_{AP} &= \pm \frac{1}{\sqrt{\xi_{AP}^2 + \eta_{AP}^2 + 1}}, \\ x_{AP} &= \xi_{AP}z_{AP}, \\ y_{AP} &= \eta_{AP}z_{AP},\end{aligned}\tag{7}$$

и аналогично для пункта B . Векторное произведение единичных векторов полюсов

$$\mathbf{r}_R = \frac{\mathbf{r}_{AP} \times \mathbf{r}_{BP}}{|\mathbf{r}_{AP} \times \mathbf{r}_{BP}|} \quad (8)$$

определяет, в зависимости от выбранных в первом уравнении (7) знаков для обоих пунктов, либо единичный вектор видимого радианта метеора \mathbf{r}_R , либо вектора скорости метеороида \mathbf{v} ($\mathbf{v} = -\mathbf{r}_R$). Для корректного выбора направлений \mathbf{r}_R и \mathbf{v} можно сопоставить компоненты полученного из (8) единичного вектора с компонентами единичного вектора $(\mathbf{R}_{AN_A} - \mathbf{R}_{A1}) / |\mathbf{R}_{AN_A} - \mathbf{R}_{A1}|$ для любого из пунктов (в данном случае A), указывающего приблизительное направление скорости метеороида. Осуществить данную операцию станет возможным позднее, после вычисления расстояний до точек на метеоре и соответственно определения полных векторов \mathbf{R}_{A1} . Определенный единичный вектор скорости метеороида \mathbf{v} будем использовать в дальнейшем, а из единичного вектора радианта \mathbf{r}_R в географической СК, перейдя через (5) в экваториальную СК, при помощи (3) можно получить экваториальные координаты видимого радианта метеора на дату наблюдения α_R, δ_R .

Далее вычисления будем проводить по одному из пунктов (A). Вычисления по другому из пунктов проводятся аналогично. После того как определены плоскости метеорной траектории, вместо исходных векторов точек $\mathbf{r}_{A10}, \mathbf{r}_{Ak0}, \mathbf{r}_{Bj0}, \mathbf{r}_{B10}$ будем пользоваться соответствующими векторами, лежащими в плоскости траектории метеора и пункта наблюдения, найденными путем проекции исходных векторов на плоскость по кратчайшему пути: $\mathbf{R}'_{A1} = \mathbf{r}_{AP} \times \mathbf{r}_{A10} \times \mathbf{r}_{AP}$, или окончательно $\mathbf{R}'_{A1} = \mathbf{r}_{A10} - \mathbf{r}_{AP}(\mathbf{r}_{AP} \mathbf{r}_{A10})$. Затем можно перейти к единичным векторам $\mathbf{r}_{A1} = \mathbf{R}'_{A1} / |\mathbf{R}'_{A1}|$.

Вычисление дальности от пункта наблюдения и пути, проходящего метеором. Для нахождения дальности R_{A1} до точек на метеоре из пункта A воспользуемся классическим подходом, изложенным в [12]. Проведем в эту же точку i траектории метеора неизвестный вектор \mathbf{R}_{Bi} из пункта B . Для него будет справедливым соотношение $\mathbf{R}_{Bi} \mathbf{r}_{BP} = 0$. Неизвестный вектор \mathbf{R}_{Bi} найдем из уравнения $\mathbf{R}_{A1} = \mathbf{R}_{AB} + \mathbf{R}_{Bi}$, где \mathbf{R}_{AB} — вектор пункта B в системе координат пункта A : $\mathbf{R}_{AB} = \mathbf{R}_{OB} - \mathbf{R}_{OA}$. Комбинируя оба уравнения получим $\mathbf{r}_{BP} \mathbf{R}_{A1} = \mathbf{r}_{BP} \mathbf{R}_{AB}$. Расписывая векторы через их длину и единичные векторы, окончательно найдем

$$R_{A1} = R_{AB} \frac{\mathbf{r}_{BP} \mathbf{r}_{AB}}{\mathbf{r}_{BP} \mathbf{r}_{A1}}, \quad (9)$$

где $R_{AB} = \sqrt{X_{AB}^2 + Y_{AB}^2 + Z_{AB}^2}$. Формула (9) является общей для всех базисных методов.

Расстояния, получаемые при помощи (9), отягощены большими случайными погрешностями. Для их уточнения целесообразно сначала найти R_{\perp} — усредненное кратчайшее расстояние от пункта наблюдения до прямой траектории метеора:

$$R_{\perp} = \frac{1}{N_A} \sum_{i=1}^{N_A} R_{A1} \sin \beta_{A1}.$$

Затем расстояния можно пересчитать по формуле

$$R_{A1} = \frac{R_{\perp}}{\sin \beta_{A1}},$$

где β_{A1} — угол между вектором скорости метеороида и направлением на пункт наблюдения из i -й точки метеора (см. рис. 2), однозначно определяемый из формулы $\beta_{A1} = \arccos(-\mathbf{r}_{A1} \mathbf{v})$.

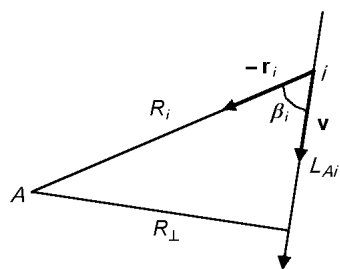


Рис. 2. К определению расстояний до метеора от пункта наблюдения и пути, проходимого метеороидом

Расстояния, проходимые метеором вдоль траектории относительно точки, соответствующей R_{\perp} , определяются из выражения

$$L_{Ai} = -R_{\perp} \operatorname{ctg} \beta_{Ai}.$$

Длина видимого следа метеора равна $L_{AN_A} - L_{A1}$.

Вычисление высот. Для определения высот точек метеора над уровнем моря вычислим векторы $\mathbf{R}_{O_i} = \mathbf{R}_{O_A} + \mathbf{R}_{A_i}$. Далее перейдем к единичным векторам \mathbf{g}_{O_i} и их абсолютным величинам R_{O_i} . Через формулы (3) найдем сферические координаты φ_{O_i} , λ_{O_i} , а затем пользуясь формулой (4) найдем ρ_{O_i} — расстояние от центра Земли до поверхности геоида в точке геоцентрической проекции i -й точки на метеоре. Высоты над уровнем моря

$$H_{A_i} = R_{O_i} - \rho_{O_i}. \quad (10)$$

Вычисление скорости. Для определения скорости метеороида при обработке фотографических наблюдений обычно пользуются следующей зависимостью пройденного метеорным телом пути от времени [8, 19]:

$$L_{A_k} = a_v + b_v t_{A_k} + c_v \exp(k_v t_{A_k}), \quad (11)$$

где a_v , b_v , c_v , k_v — постоянные, $k = 1, \dots, M_A$. Определяя коэффициенты данной системы уравнений методом наименьших квадратов, после однократного и двукратного дифференцирования по времени, можно получить модуль видимой скорости метеороида и торможение. Но для реализации возможности корректного применения такой аппроксимации длина метеора и количество точек на метеоре с известными моментами времени должно быть значительным — согласно [11] более 50. Телевизионные системы ориентированы на наблюдение предельно слабых метеоров. Среднее количество точек с известными моментами времени составляет 5—8 (минимум 2 точки, максимум — 20—25). Кроме того, угловое расстояние, проходимое телевизионным метеором, слишком мало для того, чтобы обнаружить изменение скорости метеороида и редко превышает 15—20°. В этом случае для предварительного выбора аппроксимации целесообразно рассмотреть график грубо определенной скорости метеороида вдоль траектории:

$$V_{A_{k,k+1}} = \frac{R_{A,k+1} - R_{A_k}}{t_{A_{k+1}} - t_{A_k}}.$$

Если из графического представления очевидно, что торможение метеороида обнаружить невозможно из-за большой дисперсии, либо исходное количество точек небольшое, целесообразно найти среднюю скорость метеороида на всем участке видимого пути. Для этого представим зависимость пройденного метеороидом пути от времени через модель линейной регрессии на ортогональном базисе [4]:

$$L_{A_k}(t) = L_{A,t=\bar{t}} + V_A(t_{A_k} - \bar{t}), \quad (12)$$

где $L_{t=\bar{t}}$ и искомая средняя скорость V_A являются постоянным коэффициентом регрессии, а $\bar{t} = \frac{1}{M_A} \sum_{k=1}^{M_A} t_{Ak}$. Решая данную систему методом наименьших квадратов, найдем значение и оценку дисперсии скорости V_A .

Вычисление угловой скорости и зенитных расстояний. Когда из (12) найдена средняя скорость, то значения угловой скорости ω_{Ai} в каждой i -й точке, необходимые для задач фотометрии, можно найти из следующей формулы, легко выводимой из рис. 2:

$$V_A = \frac{R_{Ai}}{\sin\beta_{Ai}} \omega_{Ai} = \frac{R_{\perp}}{\sin^2\beta_{Ai}} \omega_{Ai} = \frac{R_{Ai}^2}{R_{\perp}} \omega_{Ai}.$$

Также необходимые для задач фотометрии зенитные расстояния γ_{ZAi} в i -й точке найдем из выражения

$$\gamma_{ZAi} = \arccos(\mathbf{r}_{OAr_{Ai}}). \quad (13)$$

Легко находится также необходимое для решения физических задач зенитное расстояние радианта метеора, характеризующее наклон его траектории. В общем случае с учетом сферичности Земли оно будет изменяться вдоль траектории метеора. Его можно ввести как угол γ_{ZRi} между единичными векторами \mathbf{r}_{Oi} (получаемого из ранее определенного геоцентрического вектора i -й точки на метеоре R_{Oi}) и направления на радиант $\mathbf{r}_R = -\mathbf{v}$:

$$\gamma_{ZRi} = \arccos(\mathbf{r}_R \mathbf{r}_{Oi}).$$

Аналогично по формулам (9)—(13) найдем дальности до всех точек на метеоре R_{Bj} , высоты над уровнем моря H_{Bj} , скорость V_B , угловые скорости ω_{Bj} и зенитные расстояния γ_{ZBj} , γ_{ZRBj} для пункта B .

Для дальнейших расчетов скорость метеороида выбирается по пункту, где ее значения из тех или иных соображений считается более точным, либо усредняется по обоим пунктам: $V_{AB} = (g_A V_A + g_B V_B) \mathbf{v}$, где g_A и g_B — весовые коэффициенты, характеризующие точность вычислений скорости по пунктах A и B . В качестве весовых коэффициентов можно использовать $\sin\beta_{Ai}$, $\sin\beta_{Bi}$; количество точек вдоль следа метеора с известными моментами времени M_A и M_B ; угловые размеры пикселя (или фокусные расстояния), если используются различные объективы, либо комбинации всех этих факторов, в зависимости от дополнительно исследованной степени их влияния. В частности, степень совпадения скоростей метеороида V_A и V_B , вычисленных по различным пунктам, при сходных упомянутых параметрах может служить характеристикой общей точности вычислений.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ГЕО- И ГЕЛИОЦЕНТРИЧЕСКОЙ СКОРОСТИ МЕТЕОРОИДА

Полученная скорость $V_t \equiv V_{AB}$ является видимой топоцентрической скоростью метеора. Для дальнейших вычислений следует провести ряд редуций радиуса-вектора и вектора скорости метеороида, первым этапом из которых является коррекция за торможение метеороида атмосферой и получение его внеатмосферной топоцентрической скорости $V_{t,\infty}$. Далее осуществляется коррекция за суточную аберрацию, обусловленную вращением Земли, результатом которой является определение внеатмосферной геоцентрической скорости метеороида $V_{g,\infty}$. Последующий учет притяжения Земли дает геоцентрическую скорость метеороида в отсутствие земной гравитации V_g . Геоцентрический радиус-вектор метеороида во всех предыдущих вычисле-

ниях не изменяется и принимается равным вычисленному радиусу-вектору первой точки на метеоре $\mathbf{R}_g = \mathbf{R}_{O_1}$ по какому-либо из пунктов. Последним этапом, предшествующим вычислению орбит, является переход от геоцентрических радиус-вектора \mathbf{R}_g и вектора скорости метеороида \mathbf{V}_g к гелиоцентрическим $\mathbf{R}_h, \mathbf{V}_h$.

Вычисление топоцентрической (видимой) внеатмосферной скорости метеороида. Коррекция за атмосферу подразумевает изменение лишь модуля скорости V_t на $V_{t,\infty}$ и не изменяет ее направление. Если количество точек M_A или M_B вдоль следа метеора с известными моментами времени было достаточным, и вычисления топоцентрической скорости производилось по формуле (11) по одному из пунктов, то внеатмосферное значение скорости получаем после однократного дифференцирования уравнения (11) и подстановки $t = -\infty$. В случае применения формулы (12), подразумевающей невозможность определить ускорение, принимается $V_{t,\infty} = V_t$.

Вычисление геоцентрической внеатмосферной скорости метеороида. Определение геоцентрической внеатмосферной скорости метеороида (коррекция за суточную аберрацию) сводится к учету линейной скорости пункта наблюдения, обусловленного вращением Земли:

$$\mathbf{V}_{g,\infty} = \mathbf{V}_{t,\infty} + \omega_{\oplus} \times \mathbf{R}_{OA}, \quad (14)$$

где полный вектор угловой скорости вращения Земли ω_{\oplus} имеет компоненты $0, 0, \omega_{\oplus}$. Модуль угловой скорости возьмем из [2]: $\omega_{\oplus} = 7.292115 \cdot 10^{-5} \text{c}^{-1}$. Вместо \mathbf{R}_{OA} можно использовать \mathbf{R}_{OB} — это не внесет существенных изменений ввиду малости отличия географических широт двух пунктов наблюдения. Как видно из (14), данная коррекция изменяет как модуль, так и направление вектора скорости метеороида. Из выражения $\mathbf{r}_{Rg,\infty} = -\mathbf{v}_{g,\infty}$ найдем составляющие единичного вектора исправленного за вращение Земли радианта $\mathbf{r}_{Rg,\infty}$ в географической СК. Затем перейдя через (5) в экваториальную СК, при помощи (3) получим экваториальные координаты исправленного за суточную аберрацию радианта метеора на дату наблюдения $\alpha_{Rg,\infty}, \delta_{Rg,\infty}$.

Вычисление геоцентрической скорости метеороида, в отсутствие гравитационного воздействия Земли. Когда вычислена внеатмосферная геоцентрическая скорость метеороида $\mathbf{V}_{g,\infty}$, вычислим скорость, которую бы имел метеороид без гравитационного воздействия Земли. Очевидно, данная коррекция также изменяет модуль и направление вектора скорости метеороида. Для этого на данном этапе пренебрегают гравитационным притяжением Солнца и полагают, что метеороид движется вокруг Земли по гиперболе. Воспользуемся для этой цели, как это обычно делается [6], интегралом энергии:

$$V_{g,\infty}^2 = k^2 M_{\oplus} \left(\frac{2}{R_g} - \frac{1}{a} \right),$$

где k — гауссова постоянная, M_{\oplus} — масса Земли (массой метеороида пренебрегаем), R_g — по-прежнему геоцентрический радиус-вектор начальной точки метеора, a — большая полуось геоцентрической орбиты метеороида. Тогда геоцентрический модуль скорости на бесконечном удалении от Земли V_g (именно эту скорость, получаемую при $R_g = \infty$, а не внеатмосферную, получаемую после дифференцирования (11) при $t = -\infty$, более логично было бы снабдить индексом ∞ , однако здесь мы следуем исторически установившейся традиции) найдем, полагая $R_g = \infty$:

$$V_g^2 = -\frac{k^2 M_{\oplus}}{a},$$

и предыдущую формулу с учетом полученной зависимости перепишем в виде

$$V_{g,\infty}^2 = k^2 M_{\oplus} \frac{2}{R_g} + V_g^2, \quad (15)$$

откуда можно найти непосредственно V_g . Для практического использования данной формулы, с учетом специфики метеорной тематики, наиболее удобно воспользоваться системой геоцентрических постоянных GE [16], т. е. за единицу массы принять массу Земли, за единицу расстояния — километры, за единицу времени — секунды. Тогда скорость в (15) будет выражаться в км/с, как и принято в метеорной астрономии, а $k^2 = G_E = = 398602.8225 \text{ км}^3 \text{ M}_{\oplus}^{-1} \text{ с}^{-2}$.

Чтобы найти направление \mathbf{v}_g , сначала найдем угол γ между $\mathbf{v}_{g,\infty}$ и \mathbf{v}_g (см. рис. 3). Для этого можно воспользоваться уравнением касательной к гиперболе в полярных координатах в плоскости орбиты. Однако наиболее целесообразно воспользоваться формулой Скиапарелли [6], которая в геоцентрической СК выполняется строго:

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{V_{g,\infty} - V_g}{V_{g,\infty} + V_g} \operatorname{tg} \frac{\gamma_0}{2},$$

где через γ_0 обозначен угол между геоцентрическим радиусом-вектором метеора \mathbf{r}_g и направлением на геоцентрический (исправленный за вращение Земли) радиант $\mathbf{r}_{Rg,\infty} = -\mathbf{v}_{g,\infty}$, который можно найти из выражения $\gamma_0 = = \arccos(\mathbf{r}_g \mathbf{r}_{Rg,\infty})$. Теперь, когда угол γ известен, можно найти окончательно компоненты \mathbf{v}_g . Для этого воспользуемся тем фактом, что вектор \mathbf{v}_g лежит всегда (до перигелия) между векторами \mathbf{r}_g и $\mathbf{v}_{g,\infty}$ (см. рис. 3), причем, очевидно, все три вектора лежат в плоскости орбиты. В этом случае единичный вектор нормали \mathbf{n} к плоскости орбиты можно представить двумя выражениями: $\mathbf{n} \sin \gamma = \mathbf{v}_{g,\infty} \times \mathbf{v}_g$ и $\mathbf{n} \sin \gamma_0 = \mathbf{v}_{g,\infty} \times \mathbf{r}_g$. Исключая из обеих уравнений \mathbf{n} и умножая обе части полученного равенства слева векторно на $\mathbf{v}_{g,\infty}$, после несложных преобразований получим искомый единичный вектор

$$\mathbf{v}_g = \mathbf{v}_{g,\infty} \cos \gamma - (\mathbf{v}_{g,\infty} \times \mathbf{v}_{g,\infty} \times \mathbf{r}_g) \frac{\sin \gamma}{\sin \gamma_0},$$

и, таким образом, полный вектор скорости метеороида в отсутствие гравитации

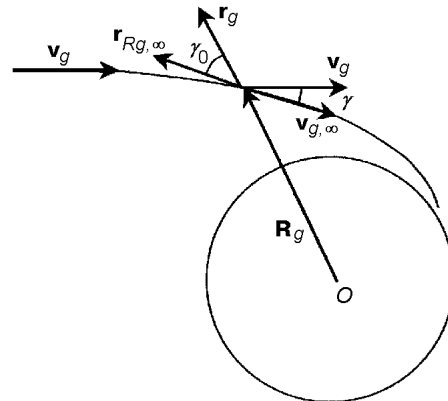


Рис. 3. Схема траектории метеороида в атмосфере

тации равен $V_g = V_g v_g$. Из единичного вектора $r_{Rg} = -v_g$ при помощи (5) и (3) найдем экваториальные координаты истинного геоцентрического радианта α_{Rg} , δ_{Rg} на дату наблюдения.

Вычисление гелиоцентрических радиуса-вектора и скорости метеороида. Перед тем, как перейти к вычислению гелиоцентрической орбиты метеора, переведем его радиус-вектор R_g и вектор скорости V_g из геоцентрической географической прямоугольной в экваториальную прямоугольную СК R_{eg} , V_{eg} согласно (5):

$$\begin{aligned} V_{eg} &= M_{ge} V_g, \\ R_{eg} &= M_{ge} R_g. \end{aligned}$$

Когда известен радиус-вектор и вектор скорости метеорного тела в экваториальной СК, для дальнейших расчетов нам понадобятся радиус-вектор и вектор скорости Земли, значения которых в экваториальной гелиоцентрической СК на стандартную эпоху J2000.0, $R_{\oplus ehJ2000}$ и $V_{\oplus ehJ2000}$, для данной даты можно найти, например, в [2]. Коррекцию к истинному равноденствию даты можно осуществить по формулам

$$\begin{aligned} R_{\oplus eh} &= M_{NP} R_{\oplus ehJ2000}, \\ V_{\oplus eh} &= M_{NP} V_{\oplus ehJ2000}, \end{aligned}$$

где M_{NP} — матрица совместного действия нутации и прецессии, элементы которой также можно найти в [2] либо рассчитать через разложение в ряды по времени [18].

Имея компоненты радиуса-вектора и скорости Земли в прямоугольной экваториальной гелиоцентрической СК ($R_{\oplus eh}$ и $V_{\oplus eh}$) и те же компоненты метеороида в геоцентрической СК (R_{eg} , V_{eg} можно переходить к вычислению элементов гелиоцентрической орбиты метеороида. Для этого сначала переведем координаты метеороида и его скорости также в гелиоцентрическую СК: R_{eh} , V_{eh} , предварительно переведа километры в астрономические единицы, а километры за секунду — в астрономические единицы за сутки: $R_{eh} = R_{\oplus eh} + R_{eg}$, $V_{eh} = V_{\oplus eh} + V_{eg}$.

Далее переведем полученные векторы R_{eh} , V_{eh} из экваториальной в эклиптическую гелиоцентрическую прямоугольную СК: R_h , V_h . Для этого воспользуемся матрицей поворота вокруг оси X, направленной в точку весеннего равноденствия:

$$\begin{aligned} R_h &= M_\varepsilon R_{eh}, \\ V_h &= M_\varepsilon V_{eh}, \end{aligned}$$

где

$$M_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon & \sin\varepsilon \\ 0 & -\sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{bmatrix},$$

ε — истинный наклон эклиптики к экватору на данный момент времени [2].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ГЕЛИОЦЕНТРИЧЕСКОЙ ОРБИТЫ МЕТЕОРОИДА

Следующим и последним этапом обработки результатов наблюдений метеора является классический для небесной механики переход от радиуса-вектора R_h и вектора скорости V_h метеороида к пяти элементам его орбиты: a ,

e, I, Ω, ω . В дальнейших расчетах для сокращения опустим индексы, т. е. положим $\mathbf{R}_h \equiv \mathbf{R}$, $\mathbf{V}_h \equiv \mathbf{V}$. Кроме указанных пяти элементов орбиты параллельно найдем единичные векторы восходящего узла \mathbf{l} , нормали к плоскости орбиты \mathbf{h} , направления на перигелий \mathbf{q} , а также вектор направления скорости метеороида в перигелии \mathbf{w} . Введенные обозначения для последних трех векторов, часто используемых в небесной механике при определении орбит, несколько не совпадают с принятыми в астродинамике ($\mathbf{W}, \mathbf{P}, \mathbf{Q}$) [16], но соответствуют принятой нами ранее методике обозначения единичных векторов. Некоторые из классических формул небесной механики заимствованы из [14]. Также предполагается, что орбита не может быть прямолинейной.

Запишем сначала формулы, которыми мы будем пользоваться при преобразовании координат:

— закон сохранения момента импульса (интеграл площадей)

$$\mathbf{R} \times \mathbf{V} = \mathbf{H}, \quad (16)$$

где \mathbf{H} — вектор момента импульса, и соответственно $H = Hh$. Кроме того, воспользуемся следующими равенствами [14]:

$$H^2 = \mu_s p, \quad (17)$$

где $\mu_s = k^2 M_s$ (k^2 — постоянная Гаусса, M_s — масса Солнца, массой метеора пренебрегаем), p — параметр орбиты, и

$$H = R^2 \dot{f}. \quad (18)$$

Здесь f — угол между направлением на перигелий и радиусом-вектором метеороида (истинная аномалия);

— закон сохранения энергии

$$V^2 = \mu_s \left(\frac{2}{R} - \frac{1}{a} \right); \quad (19)$$

— выражение, связывающее параметр орбиты с большой полуосью и эксцентриситетом:

$$p = a(1 - e^2); \quad (20)$$

— уравнение движения в полярных координатах:

$$R = \frac{p}{1 + e \cos f}; \quad (21)$$

— и

$$R \dot{R} = R \mathbf{V}. \quad (22)$$

Сначала воспользуемся (16) и найдем H и \mathbf{h} . Из уравнений (19) и (17) найдем $1/a$ и p соответственно. Из (20) найдем эксцентриситет e . Теперь по величине, обратной к большой полуоси орбиты, и эксцентриситету можно классифицировать орбиту ($1/a > 0$, $0 < e < 1$ — эллипс, $1/a < 0$, $e > 1$ — гипербола, $1/a = 0$, $e = 1$ — парабола, $1/a = 1/R$, $e = 0$ — окружность). Учитывая, что косинус угла наклона орбиты лежит в пределах $-1 \dots 1$ из $h_z = \cos I$ ($h_k = \cos I$) однозначно определим

$$I = \arccos h_z.$$

Вектор \mathbf{l} найдем из соотношения

$$\mathbf{l} = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{h}}{|\mathbf{k} \times \mathbf{h}|},$$

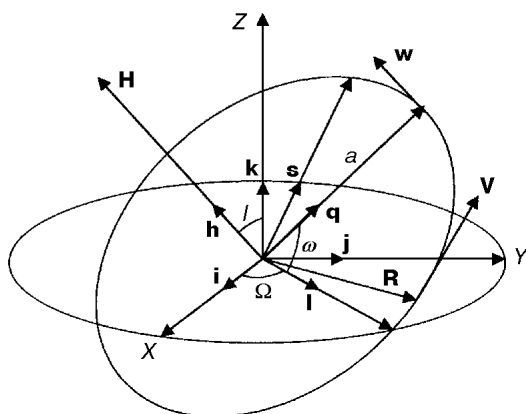


Рис. 4. К определению элементов орбиты метеороида

где k — орт оси Z гелиоцентрической эллиптической прямоугольной СК (рис. 4).

До этого момента все уравнения выполняются для любого типа орбиты (кроме прямолинейного, который мы не рассматриваем). При дальнейших вычислениях следует учитывать, не равен ли нулю угол наклона орбиты и не является ли орбита круговой.

Если $l \neq 0$ ($|h_z| \neq 1$) найдем долготу восходящего узла Ω по компонентам вектора l ($l_x = \cos\Omega$, $l_y = \sin\Omega$):

$$\begin{aligned} \Omega &= \arccos l_x, l_y > 0, \\ \Omega &= -\arccos l_x + 2\pi, l_y < 0. \end{aligned} \quad (23)$$

В случае, если орбита не является окружностью, найдем аргумент перигелия ω . Для этого сначала найдем сумму $\omega + f$. Введем орт s , дополняющий единичные векторы h и l до правоориентированной тройки векторов из выражения $s = h \times l$. Тогда можно получить систему уравнений

$$\begin{aligned} lr &= \cos(\omega + f), \\ sr &= \sin(\omega + f), \end{aligned} \quad (24)$$

где $r = R/R$, из которой аналогично (23) найдем $\omega + f$. Для нахождения f воспользуемся уравнением (21), из которого найдем косинус угла. Затем продифференцировав указанное уравнение по времени с учетом (18) и (22) получим выражение

$$RV = R \frac{H}{p} e \sin f,$$

из которого можно определить $\sin f$ и, таким образом, найти истинную аномалию f , а затем и ω . Единичный вектор направления на перигелий можно найти из выражения

$$q \times r = h \sin f.$$

Умножив обе его части слева векторно на r , получим:

$$q = r \cos f + (r \times h) \sin f.$$

Если орбита лежит в плоскости эклиптики ($l = 0$) — угол Ω не определен. В этом случае система (23) пропускается, а ищется угол $\Omega + \omega$. Вместо системы (24) можно воспользоваться уравнениями

$$\begin{aligned} ir &= \cos(\Omega + \omega + f), \\ jr &= \sin(\Omega + \omega + f), \end{aligned}$$

где \mathbf{i} , \mathbf{j} — орты осей X и Y соответственно. Угол f ищется аналогично предыдущему случаю.

Если орбита параболическая, вместо большой полуоси орбиты, которая в этом случае равна бесконечности, можно вычислить перигелийное расстояние, равное $p/2$, где параметр по-прежнему ищется из (17).

В случае круговой орбиты, очевидно, аргумент перигелия ω , векторы \mathbf{q} и \mathbf{w} не определены. Для некруговой орбиты единичный вектор \mathbf{w} направления скорости в перигелии найдем из выражения

$$\mathbf{w} = \mathbf{h} \times \mathbf{q}.$$

При публикации результатов метеорных наблюдений часто приводится эклиптическая долгота Солнца в геоцентрической СК. Для ее вычисления полученный ранее гелиоцентрический вектор Земли $\mathbf{R}_{\oplus h}$ в экваториальных координатах следует сначала перевести в эклиптическую СК \mathbf{R}_{\oplus} при помощи матрицы \mathbf{M}_e , затем получить, предварительно перейдя к единичным векторам, согласно (3) долготу Земли в гелиоцентрической эклиптической СК λ_{\oplus} . Очевидно, долгота Солнца в геоцентрической СК

$$\lambda_{\odot} = \lambda_{\oplus} + \pi.$$

Для окончательного представления полученные угловые элементы орбиты, компоненты векторов, а также экваториальные координаты радиантов следует перевести на стандартную эпоху J2000.0, для чего также можно воспользоваться данными, которые приведены в работах [2, 18].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный векторный метод определения кинематических характеристик метеора в целом можно рассматривать как обобщение всех разработанных ранее методик для фотографических метеоров, максимально учитывающее использование современных средств цифровой техники, возможностей наблюдательной телевизионной аппаратуры и цифровой обработки. Компактность векторного представления формул проявляется не только на этапе их вывода, но и на этапе программирования средствами современных алгоритмических языков. В этом случае вводятся трехмерные переменные типа вектора и предварительно единожды программируются несколько функций векторного анализа (векторное, скалярное произведения и т. п.), а вся остальная программа практически совпадает с изложенными выше формулами. Такой подход позволяет избежать накопления ошибок при многократном программировании покомпонентной записи векторов.

В заключение следует отметить ряд допущений, которые были сделаны из-за ориентации данного метода главным образом на обработку результатов телевизионных наблюдений. Поскольку описанная методика в перспективе может быть использована и для аппаратуры, обеспечивающей большую точность измерений, то следующие замечания должны быть учтены отдельно. Высоты над уровнем моря (10) вычисляются геоцентрические, а не геодезические (в обозначениях рис. 1 CA а не DA , если под точкой A понимать точку на метеоре). Их различие на высотах до 200 км не превышает 2 м. Зенитные расстояния (13) также вычисляются относительно геоцентрического зенита, не совпадающего ни с астрономическим, ни с геодезическим. При переходе от геоцентрической к гелиоцентрической СК используется скорректированное за притяжение Земли значение скорости метеороида V_g , но не скорректированный геоцентрический радиус-вектор \mathbf{R}_g . Его вычисление является довольно сложной задачей, а кроме того, он

значительно меньше влияет на точность определения орбит, чем скорость. Однако по сравнению с другими методами, где за гелиоцентрический вектор метеороида принимался гелиоцентрический вектор центра Земли, данная методика дает более близкое к истинному значение.

Автор выражает искреннюю признательность В. Г. Кручиненко за ценные советы и замечания при работе над статьей.

1. Андреев Г. В. Об исправлении радиантов метеоров за зенитное притяжение // Астрон. вестник.—1983.—17, № 1.—С. 56—59.
2. *Астрономический ежегодник на 2002 год.* — Л.: Инст. прикл. астрон. РАН, 2001.—724 с.
3. Бабаджанов П. Б., Крамер Е. Н. Методика и некоторые результаты фотографических исследований метеоров // Результаты исследований по программе МГГ. Ионосфера и метеоры. — М.: Изд-во АН СССР, 1963.—№ 12.—144 с.
4. Гришин В. К., Живописцев Ф. А., Иванов В. А. Математическая обработка и интерпретация физического эксперимента. — М.: Изд-во Москов. ун-та, 1988.—318 с.
5. Демьяненко В. И., Терентьева А. К., Шербаум Л. М. Орбиты метеорных тел по фотографическим наблюдениям 1957—1958 гг. // Материалы МГГ. — Киев: Наук. думка, 1964.—С. 32—35.—(Инф. бюл. № 6).
6. Дубяго А. Д. Определение орбит. — М.-Л.: Гостехтеориздат, 1949.—444 с.
7. Загребин Д. В. Основы геометрической геодезии. — Л.: Наука, 1981.— 219 с.
8. Заусаев А. Ф., Пушкарев А. Н. Определение скорости метеора по фотографическим наблюдениям // Астрон. вестник.—1991.—25, № 5.—С. 609—612.
9. Катасев Л. А. Исследования метеоров в атмосфере Земли фотографическим методом. — Л.: Гидрометеиздат, 1966.—334 с.
10. Козак П. Н. Анализ методов и точность определения экваториальных координат при цифровой обработке телевизионных наблюдений метеоров // Кинематика и физика небес. тел.—2002.—18, № 5.—С. 471—480.
11. Крамер Е. Н., Шестака И. С. Метеорная материя в атмосфере Земли и околосолнечном космическом пространстве // Результаты исследований по МГГ. — М.: Наука, 1983.— 184 с.
12. Кривуца Ю. Н., Кручиненко В. Г., Шульман Л. М. Определение радиантов, высот и скоростей метеоров, наблюдавшихся в Киеве в 1959 г. // Материалы МГГ. — Киев: Наук. думка, 1964.—С. 25—31.—(Инф. бюл. № 6).
13. Пясковский Д. В. Курс сферической астрометрии. — Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1964.— 136 с.
14. Рой А. Движение по орбитам. — М.: Мир, 1981.—544 с.
15. Станюкович К. П. Определение траектории метеоров в атмосфере Земли // Бюл. ВАГО.—1955.—№ 16 (23).—С. 7—14.
16. Херрик С. Астродинамика. — М.: Мир, 1976.—Т. 1.—318 с.
17. Шербаум Л. М., Шульман Л. М. Орбіти метеорних тіл за спостереженнями а Астрономічній обсерваторії Київського університету в 1959—1961 рр. // Вісник Київ. ун-ту.— 1966.—№ 7.—С. 79—86.
18. *The Astronomical Almanac for the year 2001.* — Washington: U. S. Government Printing Office, 2000.—P. B18—B19.
19. Whipple F. L., Jacchia L. G. Reduction methods for photographic meteor trails // Smithsonian Contribs to Astrophys.—1957.—1, N 2.—P. 183—206.

Поступила в редакцию 12.11.02