

Критические скорости в двухкомпонентных сверхтекучих бозе-системах

Л.Ю. Кравченко, Д.В. Филь

Институт монокристаллов НАН Украины, пр. Ленина, 60, г. Харьков, 61001, Украина
E-mail: fil@isc.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 25 апреля 2007 г.

На основе критерия Ландау рассмотрен вопрос о критических скоростях сверхтекучего движения в двухкомпонентном однородном слабонеидеальном бозе-газе с точечным взаимодействием между частицами. Показано, что при движении компонент с различными скоростями не требуется, чтобы скорость движения каждой из компонент была меньше минимальной фазовой скорости элементарных возмущений в неподвижном конденсате. Критерий Ландау в этом случае приводит к совместному условию на скорости компонент и их взаимное направление. Найдено, что максимальное значение критической скорости данной компоненты может быть достигнуто, когда другая компонента покоится, либо компоненты движутся во взаимно перпендикулярных направлениях. Результаты обобщены на случай дальнедействующего взаимодействия между частицами, а также для неоднородного двухкомпонентного бозе-газа, удерживаемого в цилиндрическом гармоническом потенциале. Показано, что в этих случаях поведение критических скоростей качественно такое же, как и в однородной двухкомпонентной системе с точечным взаимодействием.

На основі критерію Ландау розглянуто питання про критичні швидкості надплинного руху у двокомпонентному однорідному слабконеідеальному бозе-газі з точковою взаємодією між частинками. Показано, що при русі компонент з різними швидкостями не потрібно, щоб швидкість руху кожної з компонент була менш ніж мінімальна фазова швидкість елементарних збуджень у нерухомому конденсаті. Критерій Ландау в цьому випадку зводиться до сумісної умови на швидкості компонент та їх взаємний напрямок. Знайдено, що максимальне значення критичної швидкості даної компоненти може бути досягнуто, коли інша компонента нерухома, або компоненти рухаються у взаємно перпендикулярних напрямках. Результати узагальнено на випадок далекодіючої взаємодії між частинками, а також для неоднорідного двокомпонентного бозе-газу, що утримується у циліндричному гармонійному потенціалі. Показано, що в цих випадках поведінка критичних швидкостей якісно така ж, як і в однорідній двокомпонентній системі з точковою взаємодією.

PACS: 03.75.Kk Динамические свойства конденсатов; коллективные и гидродинамические возбуждения, течение сверхтекучей жидкости;
03.75.Mn Многокомпонентные конденсаты, спинорные конденсаты.

Ключевые слова: сверхтекучесть, двухкомпонентная бозе-система, критические скорости.

1. Введение

В последнее время большое внимание уделяется изучению свойств двухкомпонентных бозе-конденсатов. Такие конденсаты были получены в лабораторных условиях в ультрахолодных газах щелочных металлов как в смесях одних и тех же изотопов (^{87}Rb [1,2], ^{23}Na [3]) в различных сверхтонких зеемановских состояниях, так и в смесях различных изотопов ($^{41}\text{K} - ^{87}\text{Rb}$ [4], $^{133}\text{Cs} - ^7\text{Li}$ [5]).

Интерес к этим системам обусловлен рядом причин. В двухкомпонентных конденсатах могут реализовываться топологические возбуждения, отсутствующие в однокомпонентных, такие как геликоидальные вихри и вихревые узлы [6]. Последнее позволяет рассматривать бозе-системы в качестве модельных объектов для наблюдения явлений, предсказываемых калибровочными теориями элементарных частиц. В двухкомпонентных бозе-системах имеет место эффект бездисси-

пативного увлечения сверхтекучего потока между компонентами [7]. Это позволяет создавать контролируруемую разность фаз между бозе-конденсатами, помещенными в двухъямный потенциал, и наблюдать эффекты, подобные тем, что имеют место в сверхпроводящих системах с джозефсоновскими контактами [8]. С точки зрения космологии, интерес к двухкомпонентным бозе-конденсатам связан с возможным моделированием в них этапа ранней эволюции Вселенной [9]. В астрофизике такие системы рассматриваются в качестве модели нейтронных звезд [10,11].

Двухкомпонентные бозе-конденсаты даже при чисто отталкивающем взаимодействии между частицами могут демонстрировать эффект модуляционной неустойчивости [12]. Предвестник такой неустойчивости — смягчение коллективной моды антифазных колебаний. Появление мягкой моды должно проявиться в резком уменьшении критической скорости сверхтекучего движения в такой системе. Однако, поскольку в двухкомпонентной системе возможно сверхтекучее движение компонент с различными скоростями, вопрос о критических скоростях требует более подробного анализа, что и является предметом настоящего сообщения. Основной вывод работы состоит в том, что сверхтекучесть может иметь место при скоростях компонент, больших фазовой скорости мягкой моды.

2. Критические скорости в однородном конденсате

Согласно критерию Ландау [13], критическая скорость в однокомпонентном конденсате определяется выражением

$$v_c = \min \left(\frac{E_0(k)}{\hbar k} \right), \quad (1)$$

где $E_0(k)$ — спектр возбуждений в неподвижном конденсате, k — волновое число. Для боголюбовского спектра уравнение (1) дает критическую скорость, совпадающую со скоростью гидродинамической моды. Используя преобразования Галилея, легко показать, что уравнение (1) применимо также к двухкомпонентной системе, в которой компоненты движутся с одинаковыми по модулю и направлению скоростями. Соответственно, критическая скорость движения компонент совпадает со скоростью нижней гидродинамической моды.

При различных скоростях компонент не существует системы отсчета, в которой обе компоненты покоятся. Поэтому для нахождения критических скоростей будем исходить непосредственно из требования положительности энергий элементарных возбуждений в системе отсчета, связанной со стенкой или препятствием (относительно которой заданы скорости движения компонент v_1 и v_2).

Рассмотрим однородный слабонеидеальный двухкомпонентный бозе-газ с точечным взаимодействием между частицами. Для нахождения энергии элементарных возбуждений воспользуемся уравнением Гросса–Питаевского

$$i\hbar \frac{\partial \psi_j}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_j} \nabla^2 \psi_j + \gamma_j |\psi_j|^2 \psi_j + \gamma_{12} |\psi_{(3-j)}|^2 \psi_j \quad (j=1, 2), \quad (2)$$

где ψ_j — волновые функции компонент, m_j — масса частиц j -й компоненты. Связь между константами взаимодействия (γ_j, γ_{12}) и длинами рассеяния (a_{jk}) определяется уравнениями $\gamma_j = 4\pi\hbar^2 a_{jj}/m_j$, $\gamma_{12} = 2\pi\hbar^2 (m_1 + m_2) a_{12}/(m_1 m_2)$. Температуру смеси будем считать много меньшей температуры конденсации. Тогда волновые функции компонент можно представить как сумму стационарной части и малых флуктуаций $\psi_j = \psi_{0j} + \delta\psi_j$, где $\delta\psi_j \ll \psi_{0j}$. Стационарную часть конденсатной волновой функции запишем в виде

$$\psi_{0j}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{n_j} e^{i\phi_j(\mathbf{r})} e^{-\frac{i\mu_j t}{\hbar}}, \quad (3)$$

где $\mu_j = \frac{m_j v_j^2}{2} + \gamma_j n_j + \gamma_{12} n_{3-j}$ — химические потенциалы компонент. Градиенты фаз ϕ_j связаны со скоростями сверхтекучего движения компонент обычным соотношением $\mathbf{v}_j = \frac{\hbar}{m_j} \nabla \phi_j$. При указанных выше условиях плотности компонент конденсата n_j практически совпадают с плотностями частиц.

Ограничиваясь в (2) первым порядком по флуктуациям $\delta\psi_j$, получаем систему уравнений для нахождения спектра элементарных возбуждений

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \delta\psi_j = -\frac{\hbar^2}{2m_j} \nabla^2 \delta\psi_j + 2\gamma_j |\psi_{0j}|^2 \delta\psi_j + \gamma_j \psi_{0j}^2 \delta\psi_j^* + \gamma_{12} |\psi_{0(3-j)}|^2 \delta\psi_j + \gamma_{12} \psi_{0j} \psi_{0(3-j)}^* \delta\psi_{3-j} + \gamma_{12} \psi_{0j} \psi_{0(3-j)} \delta\psi_{3-j}^* \quad (j=1, 2). \quad (4)$$

Решение уравнений (4) будем искать в виде

$$\delta\psi_j(\mathbf{r}, t) = e^{-\frac{i\mu_j t}{\hbar}} e^{i\phi_j(\mathbf{r})} [u_j e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)} + v_j^* e^{-i(\mathbf{kr}-\omega t)}]. \quad (5)$$

Подстановка (5) в (4) приводит к системе уравнений на коэффициенты u, v , определитель которой дает искомого дисперсионное уравнение для спектра элементарных возбуждений

тарных возбуждений $E = \hbar\omega$ в выбранной системе отсчета:

$$\Delta(E) = [E_1^2 - (E - \hbar\mathbf{v}_1\mathbf{k})^2][E_2^2 - (E - \hbar\mathbf{v}_2\mathbf{k})^2] - 4\varepsilon_1\varepsilon_2\gamma_{12}^2 n_1 n_2 = 0, \quad (6)$$

где $E_j = \sqrt{\varepsilon_j(\varepsilon_j + 2\gamma_{jj}n_j)}$ — боголюбовский спектр для j -й компоненты в отсутствие взаимодействия между компонентами и $\varepsilon_j = \hbar^2 k^2 / 2m_j$.

При $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = 0$ уравнение (6) дает известный [14] спектр возбуждений в двухкомпонентном неподвижном конденсате

$$E_{0,\pm} = \sqrt{\frac{E_1^2 + E_2^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(E_1^2 - E_2^2)^2}{4} + 4\gamma_{12}^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 n_1 n_2}}. \quad (7)$$

Отметим, что из требования вещественности энергий (7) вытекает условие $\gamma_1\gamma_2 - \gamma_{12}^2 > 0$, которое определяет границу стабильности двухкомпонентного конденсата относительно фазового разделения. Ниже будем считать это условие выполненным. При $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}$ уравнение (6) приводит к тому же результату, что и преобразование Галилея: $E_{\pm} = E_{0,\pm} + \hbar\mathbf{v}\mathbf{k}$. Из условия положительности E_{\pm} при всех \mathbf{k} находим критическую скорость

$$v_c = s_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{s_1^2 + s_2^2 - \sqrt{(s_1^2 - s_2^2)^2 + 4s_1^2 s_2^2 \frac{\gamma_{12}^2}{\gamma_1 \gamma_2}}}, \quad (8)$$

где $s_j = \sqrt{\gamma_{jj}n_j / m_j}$ — скорость звуковой моды в j -й компоненте в отсутствие взаимодействия между компонентами.

В общем случае $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2$, $E_1 \neq E_2$ уравнение (6) является уравнением 4-го порядка, не сводящимся к биквадратному. Для нахождения критических скоростей нет необходимости в явном виде получать его решение. Покажем, что энергии возбуждений в выбранной системе отсчета остаются положительными при выполнении двух неравенств:

$$[E_1^2 - (\hbar\mathbf{v}_1\mathbf{k})^2][E_2^2 - (\hbar\mathbf{v}_2\mathbf{k})^2] - 4\varepsilon_1\varepsilon_2\gamma_{12}^2 n_1 n_2 > 0, \quad (9)$$

$$E_1^2 > (\hbar\mathbf{v}_1\mathbf{k})^2 \quad (10)$$

((10) можно заменить неравенством $E_2^2 > (\hbar\mathbf{v}_2\mathbf{k})^2$). Для доказательства рассмотрим функцию $\Delta(E)$, определяемую выражением (6), и будем считать неравенства (9), (10) выполненными. Из явного вида функции $\Delta(E)$ следует ее положительность при $E \rightarrow \pm\infty$. Согласно (9), значение функции $\Delta(E)$ положительно и при $E = 0$. Кроме того, из явного вида (6) следует, что $\Delta(E_1 + \hbar\mathbf{v}_1\mathbf{k}) < 0$ и $\Delta(-E_1 + \hbar\mathbf{v}_1\mathbf{k}) < 0$. Поскольку, с учетом (10), $-E_1 + \hbar\mathbf{v}_1\mathbf{k} < 0$, а $E_1 + \hbar\mathbf{v}_1\mathbf{k} > 0$, то функция $\Delta(E)$ дважды

меняет знак в области $E > 0$ и дважды — в области $E < 0$. Соответственно, уравнение $\Delta(E) = 0$ имеет два положительных и два отрицательных вещественных корня. В качестве энергий возбуждений следует выбирать положительные корни, так как выражения E_{\pm} должны быть непрерывными по параметрам $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ и переходить в $E_{0,\pm}$ при $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = 0$.

Критические значения \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 соответствуют случаю, когда неравенство (9) переходит в равенство хотя бы для одной пары векторов \mathbf{k}_c и $-\mathbf{k}_c$, что соответствует обращению в нуль энергии возбуждения $E_-(\mathbf{k})$ для одного из этих волновых векторов.

С учетом явного вида $E_j(k)$ достаточным условием выполнения неравенств (9), (10) при всех \mathbf{k} является их выполнение при $k \rightarrow 0$ для всех направлений \mathbf{k} , компланарных с \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 . Поэтому неравенства (9), (10) можно заменить системой неравенств

$$(s_1^2 - v_1^2 \cos^2 \alpha)(s_2^2 - v_2^2 \cos^2(\theta - \alpha)) - \frac{\gamma_{12}^2}{\gamma_1 \gamma_2} s_1^2 s_2^2 > 0, \quad s_1^2 > v_1^2 \cos^2 \alpha \quad (11)$$

(где θ — угол между \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 , а α — угол между \mathbf{k} и \mathbf{v}_1), которые должны выполняться при всех α .

Анализ неравенств (11) удобно провести графически. Введем функции $x(\alpha) = v_1^2 \cos^2 \alpha / s_1^2$ и $y(\alpha) = v_2^2 \cos^2(\theta - \alpha) / s_2^2$. При фиксированных v_j, s_j и θ эти функции представляют собой параметрическое задание эллипса, причем при θ , кратном $\pi/2$, эллипс вырождается в отрезок. Условия (11) сводятся к требованию, чтобы данный эллипс (отрезок) лежал в области, ограниченной нижней ветвью гиперболы $(1-x)(1-y) = \gamma_{12}^2 / \gamma_1 \gamma_2$ (рис. 1). На рис. 2 приведена полученная из графического решения связь между критическими скоростями v_{c1} и v_{c2} при различных углах θ . Отметим, что при замене θ на $\pi - \theta$ соотношения между критическими скоростями не меняются.

При движении компонент в одном и том же либо противоположных направлениях ($\theta = 0, \pi$) связь между критическими скоростями задается соотношением

$$(s_1^2 - v_{c1}^2)(s_2^2 - v_{c2}^2) = \frac{\gamma_{12}^2}{\gamma_1 \gamma_2} s_1^2 s_2^2 \quad (12)$$

при дополнительном условии $v_{c1} < s_1$ (либо $v_{c2} < s_2$). Согласно уравнению (12), только при одинаковых скоростях компонент их критические значения совпадают со скоростью нижней гидродинамической моды $v_{c1} = v_{c2} = s_-$. В общем случае сверхтекучее движение сохраняется и при скорости одной из компонент, превышающей s_- (при этом скорость второй компоненты должна быть меньше s_-). Если одна из компонент покоится, то скорость второй (j -й) компоненты может достигать значения

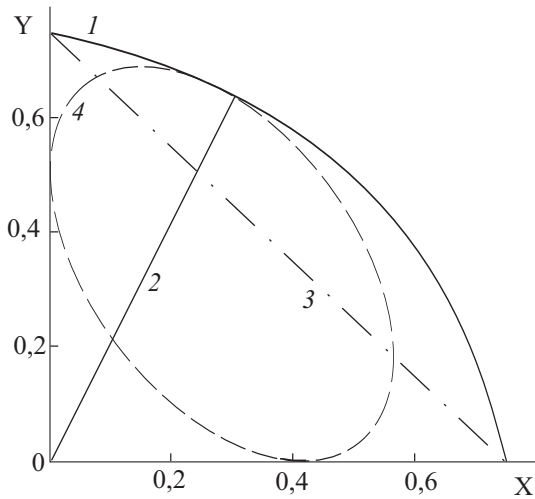


Рис. 1. Графическое решение неравенств (11) при $\gamma_{12} = \sqrt{\gamma_1\gamma_2}/2$. Показан случай, когда скорости v_1, v_2 достигают критических значений. Кривая 1 отвечает нижней ветви гиперболы, отрезки 2, 3 и эллипс 4 показывают области значений, которые могут принимать функции $x(\alpha)$ и $y(\alpha)$ при $\theta = 0, \pi, \theta = \pi/2$ и $\theta = \pi/3, 2\pi/3$ соответственно.

$$v_{cj,max} = s_j \sqrt{1 - \frac{\gamma_{12}^2}{\gamma_1\gamma_2}} \quad (13)$$

Легко убедиться, что $v_{c1,max} > s_-$ и $v_{c2,max} > s_-$ (это, в частности, демонстрирует рис. 2). При этом максимальная критическая скорость одной из компонент может значительно превышать величину s_- . Например, при $s_1 \gg s_2$ имеет место следующая цепочка неравенств: $v_{c1,max} \gg v_{c2,max} > s_-$ (величина $v_{c2,max}$ в такой ситуации практически совпадает с s_-).

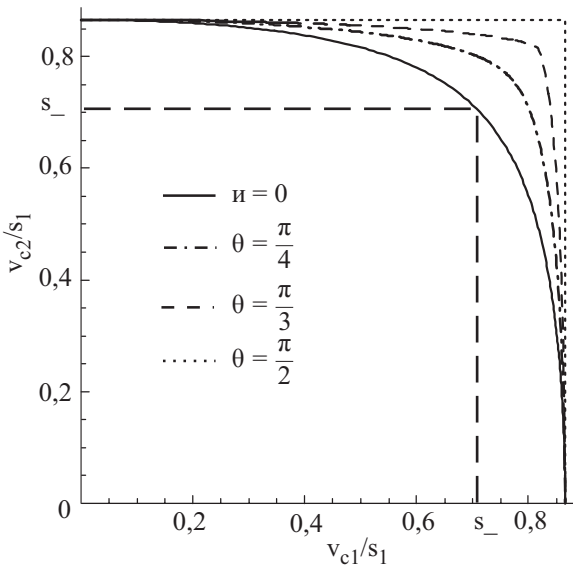


Рис. 2. Связь между критическими скоростями при $\gamma_{12} = \sqrt{\gamma_1\gamma_2}/2$ при различных θ . Величина s_- соответствует случаю $s_1 = s_2$.

Как видно на рис. 2, при $\theta \neq 0, \pi$ возможно движение обеих компонент со скоростями, превышающими s_- . При движении компонент во взаимно перпендикулярных направлениях ($\theta = \pi/2$) их скорости могут одновременно достигать максимальных критических значений (13).

Полученный результат легко обобщается на системы с дальнедействующим взаимодействием между частицами. В этом случае коллективные моды в неподвижном конденсате также определяются уравнением (7), в котором параметры γ_j и γ_{12} заменены на фурье-компоненты потенциалов взаимодействия между частицами $\gamma_j(k)$ и $\gamma_{12}(k)$ (в том числе и в выражении для E_j : $E_j = [\epsilon_j(\epsilon_j + 2\gamma_j(k)n_j)]^{1/2}$). Отметим, что такая замена позволяет, в частности, смоделировать ситуацию, когда спектры коллективных возбуждений содержат ротонный минимум. Для того чтобы в системе не возникла модуляционная неустойчивость, должно удовлетворяться неравенство $E_1^2 E_2^2 > 4\epsilon_1 \epsilon_2 \gamma_{12}^2(k) n_1 n_2$ (при всех k). Максимальная критическая скорость движения данной (j -й) компоненты при покоящейся второй компоненте определяется выражением

$$v_{cj,max} = \min \left(\frac{E_j}{\hbar k} \sqrt{1 - \frac{4\epsilon_1 \epsilon_2 \gamma_{12}^2(k) n_1 n_2}{E_1^2 E_2^2}} \right) \quad (14)$$

При движении обеих компонент с одинаковыми скоростями критическая скорость определяется выражением $v_c = \min(E_{0,-}/\hbar k)$. Как и в предыдущем случае, последняя величина меньше каждой из величин (14). Это, в частности, означает, что наличие ротонного минимума в спектре возбуждений не меняет основной вывод настоящей работы.

Строго говоря, рассмотренный в работе подход в общем случае дает лишь верхнюю оценку для критических скоростей, поскольку не учитывает возможность возбуждения вихрей. Тем не менее в ряде ситуаций оценка критических скоростей на основе анализа спектра коллективных мод полностью оправдана. Например, это имеет место при обтекании сверхтекучими потоками препятствий, имеющих малый (меньше длины залечивания) линейный размер [15–17].

3. Критические скорости в конденсате, удерживаемом в цилиндрическом гармоническом потенциале

В неоднородных бозе-газах, удерживаемых в оптических либо магнитных ловушках, минимальную фазовую скорость имеют поверхностные возбуждения [18]. Процесс рождения вихрей в таких системах связан с возбуждением поверхностных мод, и критическая скорость совпадает с минимальной фазовой скоростью поверхностной моды [19]. Поэтому есть основания

ожидать, что полученный в работе результат применим и к неоднородной двухкомпонентной системе.

Проиллюстрируем последнее утверждение на примере двухкомпонентного бозе-газа, удерживаемого в гармоническом цилиндрическом потенциале $V(r) = m\omega_0^2(x^2 + y^2)/2$. Рассмотрим случай, когда сверхтекучие потоки направлены вдоль z . Для простоты будем считать $n_1(r) = n_2(r) = n(r)$ (r — радиальная координата), $m_1 = m_2 = m$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ и $0 < \gamma_{12} < \gamma$. Рассмотрим систему, у которой томас-фермиевский радиус конденсата $R_{TF} = [2(\gamma + \gamma_{12})n_0/m\omega_0^2]^{1/2}$ много больше осцилляторной длины ловушки. Для нахождения спектра элементарных возбуждений перейдем от уравнения Гросса–Питаевского к линеаризованной системе гидродинамических уравнений для плотностей $n_j(\mathbf{r}, t) = |\psi_j(\mathbf{r}, t)|^2$ и скоростей $\mathbf{v}_j(\mathbf{r}, t) = \hbar[\psi_j^*(\mathbf{r}, t)\nabla\psi_j(\mathbf{r}, t) - \nabla\psi_j^*(\mathbf{r}, t)\psi_j(\mathbf{r}, t)]/2im$ компонент:

$$\frac{\partial \delta n_j}{\partial t} + \nabla(n\delta \mathbf{v}_j + \mathbf{v}_{0j}\delta n_j) = 0,$$

$$m\frac{\partial \delta \mathbf{v}_j}{\partial t} + \nabla(\gamma\delta n_j + \gamma_{12}\delta n_{3-j} + m\mathbf{v}_{0j}\delta \mathbf{v}_j) = 0, \quad (15)$$

где $n = n_0(1 - r^2/R_{TF}^2)$ — равновесные плотности компонент (n_0 — плотность в центре ловушки), $\mathbf{v}_{0j} = (0, 0, v_j)$ — их сверхтекучие скорости, а δn_j и $\delta \mathbf{v}_j$ — флуктуации этих величин.

Для определенного элементарного возбуждения зависимость флуктуаций от координат (в цилиндрической системе) и времени можно записать в виде $\delta n_j = \tilde{n}_j(r, \varphi)e^{i(\omega t - kz)}$, $\delta \mathbf{v}_j = \delta \tilde{\mathbf{v}}_j(r, \varphi)e^{i(\omega t - kz)}$. Подставив эти выражения в (15), приходим к следующей системе уравнений для \tilde{n}_j :

$$m(\omega - kv_j)^2 \tilde{n}_j - nk^2(\gamma \tilde{n}_j + \gamma_{12} \tilde{n}_{3-j}) + \nabla_2[n\nabla_2(\gamma \tilde{n}_j + \gamma_{12} \tilde{n}_{3-j})] = 0 \quad (j=1,2), \quad (16)$$

где $\nabla_2 = \partial_r \mathbf{i}_r + \frac{1}{r} \partial_\varphi \mathbf{i}_\varphi$ — двумерный градиент. При $k \gg R_{TF}^{-1}$ возбуждения локализованы возле края бозе-облака, где плотность линейно зависит от радиальной координаты: $n = \beta x$ с $\beta = 2n_0/R_{TF}$ и $x = R_{TF} - r$. Поэтому для нахождения решений уравнения (16) можно воспользоваться результатами задачи о спектре и собственных векторах возбуждений в линейном потенциале [20–22].

Для двух нижних, синфазной и антифазной, поверхностных мод флуктуации плотности не зависят от φ , а их зависимость от x имеет вид $\tilde{n}_j = y_j e^{-kx}$. Получив из (16) систему уравнений для y_j и приравняв ее определитель нулю, получим дисперсионное уравнение

$$\left[(\omega - kv_1)^2 - \frac{2\gamma n_0 k}{mR_{TF}} \right] \left[(\omega - kv_2)^2 - \frac{2\gamma n_0 k}{mR_{TF}} \right] - \frac{4\gamma_{12}^2 n_0^2 k^2}{m^2 R_{TF}^2} = 0. \quad (17)$$

Область применимости используемого гидродинамического приближения ограничена сверху условием $k \lesssim k_m$, где k_m — волновой вектор, при котором становятся сравнимыми вклады кинетической и потенциальной энергий в энергию возбуждения. Величину k_m можно оценить, приравняв кинетическую энергию частиц $\hbar^2 k^2/2m$ энергии нижней моды в гидродинамическом пределе $E_{0,-} = \hbar[2(\gamma - \gamma_{12})n_0 k/mR_{TF}]^{1/2}$, что дает $k_m = 2[mn_0(\gamma - \gamma_{12})/\hbar^2 R_{TF}]^{1/3}$. В точке $k \approx k_m$ зависимость энергии возбуждения от k имеет перегиб, и поэтому критическую скорость можно оценить, подставляя в уравнение (17) $k = k_m$.

Как следует из (17), при $v_1 = v_2$ критическая скорость совпадает с минимальной фазовой скоростью нижней поверхностной моды

$$v_c = s_{sf} = \sqrt{\frac{2\gamma n}{mR_{TF} k_m}} \sqrt{1 - \frac{\gamma_{12}}{\gamma}}, \quad (18)$$

а при движении только одной компоненты критическая скорость достигает значения

$$v_{c,\max} = \sqrt{\frac{2\gamma n}{mR_{TF} k_m}} \sqrt{1 - \frac{\gamma_{12}^2}{\gamma^2}} = s_{sf} \sqrt{1 + \frac{\gamma_{12}}{\gamma}}. \quad (19)$$

Таким образом, как и в предыдущих случаях, сверхтекучее движение только одной компоненты может происходить с большей скоростью, чем одновременное движение обеих компонент.

4. Заключение

Экспериментальную проверку предсказанных в работе свойств можно провести, исследовав, например, поведение критических скоростей в двухкомпонентной системе, в которой после изменения формы удерживающего потенциала происходит расширение бозе-облака. Поскольку внешние поля могут, в общем случае, создавать различные потенциалы для разных компонент, в такой системе, по-видимому, можно реализовать движение компонент с неодинаковыми скоростями. Другая возможность состоит в создании в бозе-облаке барьеров, непроницаемых для одной из компонент. Если в отсутствие барьеров компоненты движутся с одинаковой скоростью, появление таких барьеров должно приводить к увеличению критической скорости. Наконец, движение компонент с различными скоростями легко реализовать в системах, в которых компоненты разделены пространственно (например, двухслойных). В таких системах для наблюдения предсказанного в работе эффекта необходимо

дальнодействующее взаимодействие между компонентами. В качестве последней системы можно использовать не только атомарные бозе-газы в оптических сверхрешетках, но и многослойные конденсаты электрон-дырочных пар, которые могут возникать в гетероструктурах с четным (> 2) числом двумерных электронных слоев [23,24]. Критические скорости в электрон-дырочных конденсатах можно легко измерять, поскольку они пропорциональны величине критического тока.

Отметим, что полученный результат важен также с точки зрения возможности наблюдения эффекта бездиссипативного увлечения сверхтекучего потока в двухкомпонентных бозе-системах. Величина этого эффекта достаточно мала [8,25] и поэтому желательно, чтобы скорость увлекающей компоненты была велика. Как следует из результатов настоящей работы, обеспечить последнее можно за счет использования в качестве увлекающей компоненты такой, у которой велика собственная скорость звуковой моды (s_j), например компоненты с достаточно большой плотностью частиц.

В заключение авторы выражают благодарность С.И. Шевченко за обсуждение результатов работы. Работа частично поддержана грантом CRDF № 2853.

1. D.S. Hall, M.R. Matthews, J.R. Ensher, C.E. Wieman, and E.A. Cornell, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1539 (1998).
2. P. Maddaloni, M. Modugno, C. Fort, F. Minardi, and M. Inguscio, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 2413 (2000).
3. H.J. Miesner, D.M. Stamper-Kurn, J. Stenger, S. Inouye, A.P. Chikkatur, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 2228 (1999).
4. G. Modugno, M. Modugno, F. Riboli, G. Roati, and M. Inguscio, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 190404 (2002).
5. M. Mudrich, S. Kraft, R. Grimm, A. Mosk, M. Weidenmüller, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 253001 (2002).
6. Y.M. Cho, H. Khim, and P. Zhang, *Phys. Rev.* **A72**, 063603 (2005).
7. А.Ф. Андреев, Е.П. Башкин, *ЖЭТФ* **69**, 319 (1975).
8. D.V. Fil and S.I. Shevchenko, *Phys. Rev.* **A72**, 013616 (2005).
9. U.R. Fischer and R. Schutzhold, *Phys. Rev.* **A70**, 063615 (2004).
10. M.A. Alpar, S.A. Langer, and J.A. Sauls, *Astrophys. J.* **282**, 533 (1984).
11. E. Babaev, *Phys. Rev.* **D70**, 043001 (2004).
12. K. Kasamatsu and M. Tsubota, *Phys. Rev.* **A74**, 013617 (2006).
13. Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский, *Статистическая физика, ч. 2, Теория конденсированного состояния*, Наука, Москва (1978).
14. E. Timmermans, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 5718 (1998).
15. S. Stieberger and W. Zwerger, *Phys. Rev.* **A62**, 061601 (2000).
16. D.L. Kovrizhin and L.A. Maksimov, *Phys. Lett.* **A282**, 421 (2001).
17. I. Carusotto, S.X. Hu, L.A. Collins, and A. Smerzi, *cond-mat/0612114*.
18. P.O. Fedichev and G.V. Shlyapnikov, *Phys. Rev.* **A63**, 045601 (2001).
19. J.R. Anglin, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 240401 (2001).
20. С.И. Шевченко, *ФНТ* **18**, 328 (1992).
21. U.A.I. Khawaja, C.J. Pethick, and H. Smith, *Phys. Rev.* **A60**, 1507 (1999).
22. D.V. Fil and S.I. Shevchenko, *Phys. Rev.* **A64**, 013607 (2001).
23. С.И. Шевченко, Д.В. Филь, А.А. Яковлева, *ФНТ* **30**, 413 (2004).
24. D.V. Fil and S.I. Shevchenko, *J. Luminesc.* **112**, 212 (2005).
25. D.V. Fil and S.I. Shevchenko, *ФНТ* **30**, 1028 (2004).

Critical velocities in two-component superfluid Bose systems

L.Yu. Kravchenko and D.V. Fil

On the basis of the Landau criterion, the question on critical velocities of superfluid motion is considered in a two-component homogeneous weakly nonideal Bose gas with a contact interaction between particles. It is shown that under the motion of components with different velocities the velocity of each component is not needed to be lower than the minimum phase velocity of elementary excitations in a still condensate. In that case the Landau criterion yields a joint condition for the velocities of components and their relative directions. It is found that the maximum value of the critical velocity of a given component can be reached when the other component does not move or both components move in the directions perpendicular to each other. The results are generalized to the case of particles with a long-range interaction, as well as to the case of an inhomogeneous two-component Bose gas confined in a cylindrical harmonic potential. It is shown that in these cases the behavior of the critical velocities is qualitatively the same as that in the homogeneous two-component system with a contact interaction.

PACS: 03.75.Kk Dynamic properties of condensates; collective and hydrodynamic excitations, superfluid flow;

03.75.Mn Multicomponent condensates; spinor condensates.

Keywords: superfluidity, two-component Bose system, critical velocity.