КИНЕМАТИКА
И ФИЗИКА
НЕБЕСНЫХ
ТЕЛ том 29 № 2 2013

УДК 528.33:551.24

М. М. Фис, П. М. Зазуляк, П. Г. Черняга

Національний університет «Львівська політехніка»
вул. С. Бандери 12, Львів, 79013

Значення та варіації густини у центрі мас еліпсоїдальних планет

Отримано формулу для визначення густини в центрі мас планети. Розраховані значення густини добре узгоджуються з даними спостережень, а одержані межі їхньої зміни дозволяють будувати більш вірогідні розподіли мас, що є особливо актуальним при дослідженні внутрішньої структури планет Сонячної системи.

ЗНАЧЕНИЯ И ВАРИАЦИИ ПЛОТНОСТИ В ЦЕНТРЕ МАСС ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫХ ПЛАНЕТ, Фис М. М., Зазуляк П. М., Черняга П. Г. — Получена формула для определения плотности в центре масс планеты. Вычисленные значения плотности хорошо согласуются с данными наблюдений, а полученные пределы их изменений позволяют строить более достоверные распределения масс, что особенно актуально при исследовании внутренней структуры планет Солнечной системы.

THE VALUE AND VARIATIONS OF DENSITY IN MASS CENTRES OF ELLIPSOIDAL PLANETS, by Fis M. M., Zazuliak P. M., Cherniaha P. H. — A formula for the determination of the density value in the mass centre of a planet is derived. The values calculated are in good agreement with observational data. The obtained boundaries for their changes enable one to build more reliable mass distributions, which is especially urgent in the study of the internal structure of planets of the solar system.

ВСТУП

Основою при вивченні внутрішньої структури планети є функція розподілу її мас. Вона значною мірою визначає поведінку небесного тіла. Наприклад, сферично-симетрична модель PREM [6] використовується у теорії нутації Вара [9], швидкість обертання планети також пов’язана з густиною [3], а інтерпретація геодинамічних процесів грунтується на одному із вірогідних модельних розподілів.

При цьому всі функції розподілу мас, як тривимірні, так і радіальні (сферично-симетричні), вважаються розривними. Величини стрибків і глибини їхнього розміщення для Землі визначаються з використанням даних сейсмології, у зв'язку з чим суттєвим є значення величини $_0$ в центрі планети, тому що її постулювання суттєво впливає на властивості створюваного модельного розподілу густини.

Величина $_0$ для Землі вибирається на основі гіпотез про поведінку речовини з визначеним хімічним складом при надвисокому тиску [2], другий підхід грунтується на математичних допущеннях про функцію розподілу (гіпотеза про гравітаційну диференціацію [4], умови Радо [2] тощо). Модельні розподіли інших планет будуються аналогічно земним моделям.

Нижче представлено методику, що дозволяє представляти $_0$ у вигляді нескінченної суми, утримання декількох (чотирьох) членів якої добре узгоджується з допустимими межами $_0$, приведеними в інших джерелах [2, 8].

ВИКЛАД ОСНОВНОГО МАТЕРІАЛУ

Встановимо аналітичний вираз для $_0$, для чого представимо функцію густини мас виразом [5]

$$(x_1,x_2,x_3) \qquad \underset{m\ n\ k\ 0}{} b_{mnk}\, w_{mnk}(x_1,x_2,x_3), \tag{1}$$

де $\{\ _{mnk}\}$, $\{w_{mnk}\}$ — дві біортогональні системи многочленів в еліпсоїді

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} \quad \frac{x_2^2}{a_2^2} \quad \frac{x_3^2}{a_3^2} \quad 1\ ,$$

причому

$$w_{mnk}(x_1,x_2,x_3)$$

$$\frac{1}{2^N\, m!n!k!} \quad \frac{^{N}}{x_1^m\ x_2^n\ x_3^k} \quad \frac{x_1^2}{a_1^2} \quad \frac{x_2^2}{a_2^2} \quad \frac{x_3^2}{a_3^2} \quad 1^{\quad N} \quad (m \quad n \quad k \quad N), \tag{2}$$

$$b_{mnk} \quad \frac{3V_e(2N \quad 3)}{2^N\, m!n!k!}\, a_1^{2m} a_2^{2n} a_3^{2k} \qquad _{mnk}(x_1 x_2 x_3)d\ , \tag{3}$$

де V_e — об'єм, обмежений еліпсоїдом.

У центрі мас значення густини визначається виразом

$$(0,0,0) \qquad \underset{m\ n\ k\ 0}{} b_{mnk}\, w_{mnk}(0,0,0). \tag{4}$$

Для обчислення $w_{mnk}(0,0,0)$ твірну функції [5] розкладемо за степенями $^{m\ \ n\ \ k}$, в результаті чого отримаємо

$$w_{2m2n2k}(0,\,0,\,0) \quad \frac{(\ \ 1)^N \quad (2N \quad 1)!!}{2^N\, a_1^{2m} a_2^{2n} a_3^{2k}\, m!n!k!}, \tag{5}$$

або $w_{mnk}(0,\,0,\,0) = 0$, якщо m, n, або k є непарними.

Отже, ряд (1) із врахуванням співвідношень (3) та (5) набуде вигляду

$$(0) \quad \frac{1}{3V_e}{}_{N \quad 0} \frac{(\ \ 1)^N(2N \quad 1)!!(4N \quad 3)}{2^N} a_1^{4m} a_2^{4n} a_3^{4k}$$

$$\sum_{m \ n \ k \ N} \frac{2m!2n!2k!}{m!n!k!} \qquad {}_{2m2n2k}\, d \ . \tag{6}$$

Знайдемо аналітичні вирази для многочленів (x_1, x_2, x_3). Для цього подамо їх у вигляді

$$_{mnk} \quad {}^{N/2}_{l \ 0 \ i \ y \ s \ l} \frac{a_{ijs}^{mnk} x_1^{m \ \ 2i} x_2^{n \ \ 2j} x_3^{k \ \ 2s}}{a_1^{m \ \ 2i} a_2^{n \ \ 2j} a_3^{k \ \ 2s}}. \tag{7}$$

На основі диференціювання твірної функції за змінними x_1, x_2, x_3 відповідну кількість разів [1] з умови $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ визначається коефіцієнт при ${}^{m \ \ n \ \ k}$:

$$a_{i,j,s}^{mnk} \quad \frac{(2N \quad 2l \quad 1)!!}{2^l\, i!\, j!\, s!(m \quad 2i)!(n \quad 2j)!(k \quad 2s)!}, \tag{8}$$

підстановка якого у рівність (7) дає вираз

$$_{mnk} \quad \frac{1}{a_1^m a_2^n a_3^k}$$

$$\sum^{N/2}_{l \ i \ j \ s \ 0} \frac{(\ \ 1)^l (2N \quad 2l \quad 1)!! \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{m \ \ 2i} \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^{n \ \ 2j} \left(\frac{x_3}{a_3}\right)^{k \ \ 2s}}{i!\, j!\, s!(m \quad 2i)!(n \quad 2j)!(k \quad 2s)!}. \tag{9}$$

Ввівши оператор

$$^l f \quad \left(a_1^2 \frac{f}{x_1^2} \quad a_2^2 \frac{f}{x_2^2} \quad a_3^2 \frac{f}{x_3^2} \right)^l =$$

$$= \sum_{i \ j \ s \ l} \frac{l!}{i!\, j!\, s!} \frac{a_1^{2i} a_2^{2j} a_3^{2s}\, f^{2l}}{x_1^{2i}\ x_2^{2j}\ x_3^{2s}}, \tag{10}$$

для функції $f \quad \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^m \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^n \left(\frac{x_3}{a_3}\right)^k$ одержимо

$$^l \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^m \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^n \left(\frac{x_3}{a_3}\right)^k =$$

$$= l! \sum_{i \ j \ s \ l} \frac{m!\,n!\,k!\,a_1^n a_2^m a_3^k}{(m \quad 2i)!(n \quad 2j)!(k \quad 2s)!\,i!\,j!\,s!} \frac{x_1^{m \ \ 2i} x_2^{n \ \ 2j} x_3^{k \ \ 2s}}{a_1^{m \ \ 2i} a_2^{n \ \ 2j} a_3^{k \ \ 2s}}. \tag{11}$$

При цьому вираз (9) набуде вигляду

$$w_{mnk} \quad \frac{1}{a_1^m a_2^n a_3^k} \sum^{N/2}_{l \ 0} \frac{(\ \ 1)^l (2N \quad 2l \quad 1)!!}{2^l\, l!} \frac{^l \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^m \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^n \left(\frac{x_3}{a_3}\right)^k}{m!\,n!\,k!}. \tag{12}$$

Підставивши вираз (12) у (6), прийдемо до формули

$$(0,0,0) \quad \frac{1}{3V_e} \; {}_{N \quad 0} \; (\;\; 1)^N \frac{(\;\; 1)^N (4N \quad 3)}{2^N (N!)} \; {}^{N}_{l \;\; 0} \frac{(4N \quad 2l \quad 1)!!}{2^l \, l!}$$

$$^{l} \quad \frac{x_1}{a_1}^{2} \quad \frac{x_2}{a_2}^{2} \quad \frac{x_3}{a_3}^{2} \quad ^{N} \quad . \tag{13}$$

Дія оператора ^{l} на $^{2N} = \quad \frac{x_1^2}{a_1^2} \quad \frac{x_2^2}{a_2^2} \quad \frac{x_3^2}{a_3^2} \quad ^{N}$ призводить до виразу

$$^{l}[(\;\; ^{2})]^{N} \quad \frac{(2N \quad 1)!!}{(2N \quad 2l \quad 1)!} \quad ^{2N \quad 2l}, \tag{14}$$

що дає значення функції густини в центрі мас

$$(0,0,0) \quad \frac{1}{3V_e} \; {}_{N \quad 0} \; \frac{(\;\; 1)^N (4N \quad 3)(2N \quad 1)!!}{2^N (N!)}$$

$$^{N}_{l \;\; 0} \frac{(\;\; 1)^l (4N \quad 2l \quad 1)!!}{2^l \, l!(2N \quad 2l \quad 1)!} \quad ^{2N \quad 2l} dt. \tag{15}$$

Заміна у формулі (15) l на $N \quad l$ приводить до остаточного вигляду шуканого співвідношення:

$$(0,0,0) \quad \frac{1}{3V_e} \quad \frac{(4N \quad 3)(2N \quad 1)!!}{2^{2N} (N!)}^{2l}$$

$$^{N}_{l \;\; 0} \frac{(\;\; 2)^l (2N \quad 2l \quad 1)!!}{(N \quad l)!(2l \quad 1)!} \quad ^{2l} d \quad . \tag{16}$$

Таким чином, у центрі мас планети густина $_0$ записується через інтегральні характеристики I_{2l}, які можна трактувати як моменти густини вищих порядків. Нагадаємо, що вони при $l = 0$ і $l = 1$ мають фізичний зміст маси планети

$$I_0 \qquad d \qquad M, \tag{17}$$

та середнього моменту інерції

$$I_2 \qquad ^{2}d \quad \frac{1}{2}(A \quad B \quad C), \tag{18}$$

що визначаються на основі даних про гравітаційне поле. Далі, утримуючи два члени у формулі (16):

$$^{2}_{0} \quad \frac{\;\; _c}{3} \; 3I_0 \quad \frac{21}{4} \; 5I_2 \quad 3I_0 \quad , \tag{19}$$

виконаємо обчислення для різних планет. Із табл. 2 буде видно, що значення $^{2}_{0}$ близькі до передбачуваних.

Швидкість збіжності або її розбіжність залежить від характеру досліджуваної функції, що ілюструється наведеними двома прикладами.

Визначимо степеневі моменти

$$I_{2n} \quad \frac{1}{2n \quad 3}[1 \quad (0.5)^{2n \quad 3}]$$

Таблиця 1*. Значення густини у центрі мас (формула (6)) для деяких розподілів при різних *N

N	Густина, г/см^3			*N*	Густина, г/см^3		
	$_{prem}$	$_z$	= 5.514		$_{prem}$	$_z$	= 5.514
1	10.53459	1.6172	5.5140	14	15.52791	2.1823	5.5140
2	13.79867	2.2819	5.5140	15	15.24641	2.5820	5.5140
3	15.53266	2.6303	5.5140	16	21.15436	2.4024	5.5140
4	13.45276	2.3794	5.5140	17	69.75576	1.8225	5.5140
5	10.60356	1.7765	5.5140	18	300	1.4200	5.5142
6	10.81371	1.3999	5.5140	19	1300	1.5976	5.5172
7	13.57337	1.6112	5.5140	20	6400	2.0166	5.5071
8	15.54328	2.2011	5.5140	21	3.5E4	2.5956	5.5316
9	15.45470	2.5898	5.5140	22	2.2E5	2.0991	5.2082
10	12.19146	2.3952	5.5154	23	1.4E6	4.8621	8.5457
11	11.06139	1.8106	5.5140	24	9.0E6	7.5788	11.6477
12	12.32253	1.4152	5.5140	25	5.4E7	–71.4503	–67.4765
13	15.29435	1.6006	5.5140				

для розподілу

$$_z(\ )\quad \begin{matrix} 2, & 0 & & 0.5, \\ 1, & 0.5 & & 1, \end{matrix}$$

а також для однієї з правдоподібних моделей густини Землі $_{prem}$ (PREM [6]).

Обчислюємо $_z(0)$ і $_{prem}(0)$ за формулою (16) для різних N. Табл. 1 підтверджує висновок про нестійкість знайдених значень, тому що вони спочатку коливаються навколо відомих, а після першого десятка ряд починає розбігатись. В зв’язку з цим при практичних дослідженнях слід брати декілька членів.

Розбіжність ряду (16) може бути обумовлена і похибками обчислень, про що свідчить випадок $_c = 5.514$, для якого ряд (16) розбігається, хоча *apriori* всі його члени при $N > 1$ дорівнюють нулю.

Знайдемо можливі межі зміни густини. Для цього зобразимо похідні функції густини (x_1, x_2, x_3) також рядом (1) [3].

Функцію за певних умов [1] можна відтворити за її похідними:

$$(x_1, x_2, x_3)\quad \frac{1}{a_1}\ _0^{x_1} \frac{}{x_1}(x_1, x_2, x_3)dx_1 + \frac{1}{a_2}\ _0^{x_2} \frac{}{x_2}(0, x_2, x_3)dx_2 +$$

$$+\frac{1}{a_3}\ _0^{x_3} \frac{}{x_3}(0,0,x_3)dx_3 \qquad _0, \tag{20}$$

де $_0$ — значення густини в центрі мас.

Розпишемо функцію, подану виразом (20), детальніше:

$$(x_1, x_2, x_3) =$$

$$= \ _{m\ n\ k\ 0} \frac{1}{a_1} d^1_{m\ 1nk}\quad \frac{1}{a_2} d^2_{mn\ 1k}\quad \frac{1}{a_3} d^3_{mnk\ 1}\quad \frac{^{N\ 1}(\ ^2\ \ 1)^N}{2^N\ m!n!k!}$$

$$_{m\ n\ k\ 0} \frac{x_1}{a_1} d^1_{0nk} W_{0nk}(x_1, x_2, x_3)\quad \frac{x_2}{a_2} d^2_{mn\ 1k} W_{m0k}(0, x_2, x_3)$$

$$\frac{x_3}{a_3} d^3_{mnk \quad 1} W_{mn0}(0,0,x_3) \ . \tag{21}$$

Підставимо її у вираз стоксової сталої нульового порядку. В результаті одержимо

$$C_{00} \qquad {}_0 \quad \frac{1}{10}(d^1_{100} \quad d^2_{010} \quad d^3_{001}) \ \frac{V_e}{M} , \tag{22}$$

де коефіцієнти розкладу будуть дорівнювати

$$d^1_{100} \quad 5 \ {}_c I^1_{100}, \quad d^2_{010} \quad 5 \ {}_c I^2_{010}, \quad d^3_{010} \quad 5 \ {}_c I^3_{001}.$$

В свою чергу, моменти похідних дорівнюють

$$\begin{aligned} I^1_{100} &\quad a_1^{\ 1}(\ I_{000} \qquad {}^1_{100}), \\ I^2_{010} &\quad a_2^{\ 1}(\ I_{000} \qquad {}^2_{010}), \\ I^3_{001} &\quad a_3^{\ 1}(\ I_{000} \qquad {}^3_{001}), \end{aligned} \tag{23}$$

де $I_{000} \quad \frac{1}{M} \quad d \quad 1$ нульовий степеневий момент густини,

$$ {}^1_{100} \qquad x_1 \cos \ {}_1 d \qquad \frac{x_1}{a_1}^2 \frac{d}{G} \qquad {}_{200} a_3 ,$$

$$ {}^2_{010} \qquad x_2 \cos \ {}_2 d \qquad \frac{x_2}{a_2}^2 \frac{d}{G} \qquad {}_{020} a_3 ,$$

$$ {}^3_{001} \qquad x_3 \cos \ {}_3 d \qquad \frac{x_3}{a_3}^2 \frac{d}{G} \qquad {}_{002} a_3 ,$$

$$G \quad \sqrt{1 \quad \frac{x_1^2}{a_1^2} \ \frac{a_3^2}{a_1^2} \quad 1 \qquad \frac{x_2^2}{a_2^2} \ \frac{a_3^2}{a_1^2} \quad 1} \ .$$

Звідси

$$\frac{5}{2} I_{000} \qquad {}_0 \quad \frac{1}{2} a_3(\quad {}_{200} \qquad {}_{020} \qquad {}_{002}) \qquad {}_0 \quad \frac{1}{2 \ {}_c} a_3 \quad \frac{}{G} d \ . \tag{24}$$

Враховуючи, що $I_{000} \quad 1$, одержимо

$$ {}_0 \quad \frac{5}{2} \quad \frac{a_3}{2 \ {}_c} \quad \frac{d}{G} \ . \tag{25}$$

У такий спосіб формула (25) пов’язує середнє значення густини ${}_p$ на поверхні з величиною ${}_0$ у центрі планети, що дає можливість побудувати нерівність

$$2.5 \quad 1.5(\ {}_p / \ {}_c) \qquad {}_0 \quad 2.5, \tag{26}$$

яка випливає з оцінки

$$\frac{a_3}{2} \quad \frac{d}{G} \quad 0.5 \ {}_p S_e a_3 \quad 1.5 \ {}_p V_e , \tag{27}$$

де ${}_p$ — поверхневе значення густини, а V_e, S_e — об’єм і площа еліпсоїда.

Таблиця 2. **Допустимі значення для густини у центрі мас планет**

Планета	$_{c}$	$_{p}$	$^{min}_{0}$	$^{max}_{0}$	Середній момент	C	$^{2}_{0}$
Меркурій	5.44	3.3	8.65	13.6	0.3248	0.486	10.86
Венера	5.25	2.8	6.125	13.125	0.334	0.501	9.853
Земля	5.514	2.67	9.78	13.785	0.3308	0.4962	10.52
Місяць	3.34	3.08	3.73	8.35	0.3967	0.5951	3.48
Марс	3.94	2.7	5.8	9.85	0.364	0.546	5.802
Юпітер	1.334	0.35	2.8	3.335	0.284	0.42	3.43
Сатурн	0.69	0.36	1.085	1.625	0.264	0.39	1.4145
Уран	1.26	0.3	2.7	3.15	0.274	0.405	2.488
Нептун	1.67	0.3	3.725	4.175	0.274	0.405	4.519

У табл. 2 приведено допустимі значення густини $_0$ для планет Сонячної системи, отримані з використанням даних [7].

ВИСНОВКИ

1. Результати обчислень для Землі добре узгоджуються з результатами досліджень сучасної геофізики [2].
2. Неузгодженість $^{2}_{0}$ з допустимими межами зміни $_0$ можна пояснити неточністю значень густини на поверхні планети.
3. Отримані результати слід враховувати для побудови моделей розподілу мас, тому що значення $_0$ дають можливість істотно уточнити як сферично-симетричні моделі, так і тривимірні, що дає змогу ефективніше вивчати внутрішню будову планет.

1. *Бермант А. Д.* Краткий курс математического анализа. — М.: Наука, 1964.—663 с.
2. *Буллен К. Е.* Плотность Земли. — М.: Мир, 1978.—442 с.
3. *Грушинский Н. П.*Теория фигуры Земли. — М.: Наука, 1976.—512 с.
4. *Жарков В. Н.* Внутреннее строение Земли и планет. — М.: Наука, 1983.—416 с.
5. *Мещеряков Г. А., Фыс М. М.* О биортогональных системах внутри эллипсоида // Теоретические и прикладные проблемы вычислительной математики. — М., 1981.—С. 120.
6. *Dziewonski A. M., Anderson D. L.* Preliminary reference Earth model // Phys. Earth and Planet. Inter. P 297—356
7. *Marchenko A. N.* On the representation of planet's gravitational and magnetic fields. Planet's radial density profiles // Astron. Report's School's.—2000.—**1**, N 2.—P. 12—28.
8. *Tisserand F.* Traite de Mecanique Celeste. — Paris: Gauthier-Villars, 1891. Vol. II.—552 p.
9. *Warh J. M.* The forced nutations of an elliptical, rotating, elasting and oceanless Earth // Geophys. J. Roy Astron. Soc.—1981.—**64**.—P. 705—727.

Стаття надійшла до редакції 05.05.12