ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

1 • 2009

МЕХАНІКА

УДК 621.318.001.2

Член-корреспондент НАН Украины **А. Е. Божко**

О возможных весовой нагрузке, демпфировании, жесткости пружин в электромагнитном вибровозбудителе при полигармоническом управлении

На основі заданого керованого полігармонічного напруження визначаються маса вагового навантаження, коефіцієнти дисипації та пружності в електромагнітному вібробуджувачі.

Известно широкое применение электромагнитных вибровозбудителей (ЭМВ) в промышленности [1]. ЭМВ представляет собой систему, состоящую из электрической, магнитной и механической частей. Схема ЭМВ изображена на рис. 1, где М — магнитопровод; Я — якорь; И — изделие (весовая нагрузка); Пр — пружины; К — корпус; О — электрическая обмотка с током i; δ — воздушный зазор; U — входное управляющее электрическое напряжение.

При проектировании ЭМВ необходимо знать вес изделия И, жесткость пружин, величину коэффициента диссипации при заданных U, δ, характеристик материала М, сопротивлений О. Искомые параметры тесно связаны с электрическими задающими воздействиями, проходящими от источника через систему управления, включающую в себя и усилитель мощности. А это значит, целесообразно определить связь параметров механической части ЭМВ и управляющего сигнала, т. е. целесообразно знать, на какие возможные параметры

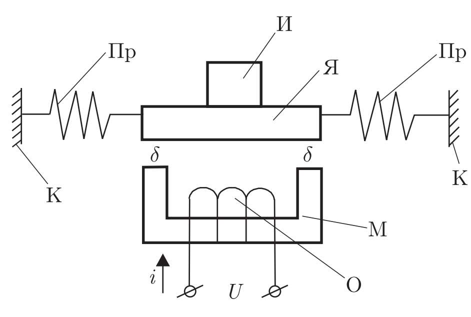

Рис. 1

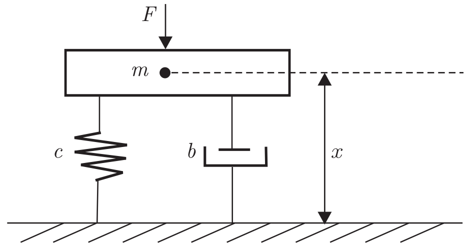

Рис. 2

нагрузки, диссипации и упругости (жесткости) в ЭМВ можно рассчитывать при заданном U или i. В данной работе принимается входной сигнал U как полигармонический, т. е.

$$U(t) = \sum_{k=1}^{n} U_{ak} \sin \omega_k t, \tag{1}$$

где U_{ak}, ω_k — амплитуда и круговая частота k-1 гармоники; t — время; n — число гармоник.

Для определения параметров механической части ЭМВ в простом случае представим ее в виде колебательной системы с одной степенью свободы, схема которой изображена на рис. 2, где m — масса Я + И; c, b — коэффициенты упругости и диссипации соответственно; x — перемещение; F — тяговое усилие.

Уравнение движения в этой системе запишем в виде

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = F. \tag{2}$$

Для определения возможных m, b и c, а также x необходимо знать F. Величина F для k-й гармоники тока i выражается формулой

$$F_k = \frac{dW_{ek}}{d\delta}, \tag{3}$$

где $W_{ek} = Li_k^2/2$ — электрическая энергия в ЭМВ; L — индуктивность обмотки О.

В силу закона Ома ток от каждой гармоники (1) равен

$$i_k(t) = \frac{U_{ak}}{\sqrt{r^2 + (\omega_k L)^2}} \sin(\omega_k t - \varphi_k), \tag{4}$$

где $\varphi_k = \mathrm{arctg}(\omega_k L/r)$ — угол сдвига между $U_k(t)$ и $i_k(t)$.

С учетом (1) общая электрическая энергия в ЭМВ записывается в виде

$$W_{e\Sigma} = \frac{1}{2}L\left(\sum_{k=1}^{n} i_k\right)^2. \tag{5}$$

Выражение (5) справедливо при суммировании $U_k(t)$, $k = \overline{1,n}$, в сумматоре и подаче $U(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} U_{ak} \sin_k t$ на одну обмотку О.

Известно [2], что $L = w^2 G$, где w — число витков обмотки О; $G = \mu_0 S/(2\delta)$ — магнитная проводимость в ЭМВ; μ_0 —магнитная проницаемость воздуха; S — площадь поперечного сечения полюса М у воздушного зазора δ.

С учетом (3) и (5) выражение общего тягового усилия F_Σ имеет вид

$$F_\Sigma = \frac{d}{d\delta}W_{e\Sigma} = \frac{1}{2}\frac{d}{d\delta}L\sum_{k=1}^{n} i_k^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} i_k\right)^2 \frac{dL}{d\delta} =$$

$$= \frac{\mu_0 S}{4}\left(\frac{w}{\delta}\right)^2 \left(\sum_{k=1}^{n} i_k\right)^2 = \frac{\mu_0 S}{4}\left(\frac{w}{\delta}\right)^2 \left(\sum_{k=1}^{n} i_k^2 + 2\sum_{\substack{k=1\\ l=1\\ k\neq l}}^{C_n^2} i_k i_l\right), \qquad (6)$$

где $C_n^2 = n(n-1)/(1\cdot 2)$ — число сочетаний из n по два.

При включении в (6) выражения (4) получим

$$F_\Sigma = \frac{\mu_0 S}{4}\left(\frac{w}{\delta}\right)^2 \left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{U_{ak}^2 \sin^2(\omega_k t - \varphi_k)}{r^2 + (\omega_k L)^2} + 2\sum_{\substack{k=1\\ l=1\\ k\neq l}}^{C_n^2} \frac{U_{ak}U_{al}\sin(\omega_k t - \varphi_k)\sin(\omega_l t - \varphi_l)}{[r^2 + (\omega_k L)^2][r^2 + (\omega_l L)^2]}\right\}. \qquad (7)$$

Обычно в ЭМВ, тем более с повышением частоты ω_k, $k = \overline{1, n}$, индуктивное сопротивление $\omega_k L \gg r$. Поэтому (7) можно представить в виде

$$F_\Sigma = \frac{\mu_0 S}{4}\left(\frac{w}{\delta}\right)^2 \left\{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{U_{ak}}{\omega_k L}\right)^2 \cos^2 \omega_k t + 2\sum_{\substack{k=1\\ l=1\\ k\neq l}}^{C_n^2} \frac{U_{ak}U_{al}}{\omega_k \omega_l L^2} \cos\omega_k t \cos\omega_l t\right\}. \qquad (8)$$

Такое F_Σ, выраженное через (8), подается на механическую часть (Я + И) и вызывает в последней колебания x. Для упрощения математических записей введем в (8) следующие обозначения:

$$F_A = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_0 S}{4}\left(\frac{w}{\delta}\right)^2 \frac{U_{ak}^2}{L^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_0 S}{4}\left(\frac{w}{\delta}\right)^2 \frac{U_{ak}^2}{w^2 G} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_0 S}{4}\left(\frac{w}{\delta}\right)^2 \frac{U_{ak}^2}{w^4(\mu_0 S)^2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_0 S w^2} U_{ak}^2, \qquad (9)$$

$$F_B = \frac{2}{\mu_0 S w^2} \sum_{\substack{k=1\\ l=1\\ k\neq l}}^{C_n^2} U_{ak}U_{al}.$$

Тогда выражение (8) с учетом обозначений (9) и тригонометрических преобразований [3] $\cos^2\alpha = (1 + \cos 2\alpha)/2$, $\cos\alpha\cos\beta = [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]/2$ примет вид

$$F_\Sigma = \frac{1}{2}\left\{F_A \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\omega_k^2}(1 + \cos 2\omega_t) + F_B \sum_{\substack{k=1\\ l=1\\ k\neq l}}^{C_n^2} \frac{1}{\omega_k \omega_l}[\cos(\omega_k - \omega_l)t + \cos(\omega_k + \omega_l)t]\right\}. \qquad (10)$$

Как видно из (10), общее тяговое усилие F_Σ включает в себя постоянную

$$\frac{1}{2}F_a\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\omega_k^2}=F_{\Sigma 0}$$

и переменную

$$F_{\Sigma\sim}=\frac{1}{2}\left[F_A\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\omega_k^2}\cos 2\omega_k t+F_B\sum_{\substack{k=1\\ l=1\\ k\neq l}}^{C_n^2}\frac{1}{\omega_k\omega_l}[\cos(\omega_k+\omega_l)t+\cos(\omega_k-\omega_l)t]\right].$$

Выражение (10) — это F в (2). А это значит, что в перемещении x имеется постоянное смещение

$$x_0=\frac{F_{\Sigma 0}}{C}=\frac{1}{2C}F_A\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\omega_k^2} \tag{11}$$

и переменное перемещение $x_\sim(t)$, которое определяется как сумма решений дифференциальных уравнений

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+cx=\frac{1}{2}F_a\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos 2\omega_k t}{\omega_k^2}, \tag{12}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+cx=\frac{1}{2}F_B\sum_{\substack{k=1\\ l=1\\ k\neq l}}^{C_n^2}\frac{1}{\omega_k\omega_l}[\cos(\omega_k-\omega_l)t+\cos(\omega_k+\omega_l)t]. \tag{13}$$

Так как колебательная система ЭМВ является линейной, то к ней применяется принцип суперпозиции и поэтому решения уравнений (12) и (13) суммируются и суммируются решения этих уравнений для каждой гармонической составляющей. Заметим, что $x_0\leqslant l\delta_0$, где $l\ll 1$. Кроме того, общая максимальная величина амплитуды перемещения $x_a\leqslant \delta_0-x_0=$ $=\delta_0(1-l)$, где δ_0 — начальный воздушный зазор при $x=0$. Эти ограничения, исключая удары якоря о магнитопровод, обусловливают определение m, b и c.

Из (11) с учетом $x_0\leqslant l\delta_0$, $l\ll 1$,

$$C=\frac{1}{2x_0}F_a\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\omega_k^2}=\frac{1}{2l\delta_0}F_a\frac{1}{\omega_k^2}. \tag{14}$$

На основании работы [4] максимальное m при моногармоническом $U(t)$ выражается соотношением

$$m_k=\left(\frac{F_{ak}}{x_{ak}}+c\right)\frac{1}{\omega_k^2}. \tag{15}$$

В нашем случае C нашли в виде (14). F_{ak} известны из выражения (10), $\sum\limits_{k=1}^{n}x_{ak}\leqslant\delta_0(1-l)$, ω_k, $k=\overline{1,n}$, — также известны. Тогда приведем (15) к нашему случаю и определим общее значение массы m_Σ

$$m_\Sigma = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{F_a}{2\delta_0(1-l)\omega_k^2} + C\right]\frac{1}{\omega_k^2} + \sum_{\substack{k=1\\l=1\\k\neq l}}^{C_n^2}\left[\frac{F_B}{\delta_0(1-l)\omega_k\omega_l} + C\right]\frac{1}{\omega_k^2}. \tag{16}$$

Итак, мы получили выражение для коэффициента жесткости C в виде (14) и для возможной весовой нагрузки m_Σ в виде (16).

Перейдем к определению коэффициента диссипации b. Заметим, что диссипация в ЭМВ определяется трением подвижных частей, в том числе витков пружин Пр, о воздух и по величине она мала. Ее можно определить из уравнения (2) при уже полученных m и c и тяговом усилии F_k k-й гармоники.

Пусть $F_k = F_{ak}\cos 2\omega_k t$. Тогда $x_k(t) = x_{ak}\cos(2\omega_k t - \varphi_{xk})$, где φ_{xk} — угол сдвига между F_k и x_k $[\varphi_{xk} = \operatorname{arctg}(\omega_k b/((\omega_0^2 - \omega_k^2)m))]$. Подставим в (2) выражение $x_k(t) = x_{ak} \times \times \cos(2\omega_k t - \varphi_{xk})$. Тогда имеем

$$-mx_{ak}\omega_k^2\cos(2\omega_k t - \varphi_{xk}) - x_{ak}b\omega_k\sin(2\omega_k t - \varphi_{xk}) + x_{ak}C\cos(2\omega_k t - \varphi_{xk}) = \\ = F_{ak}\cos 2\omega_k t. \tag{17}$$

Далее из [5] известно, что

$$x_{ak} = \frac{F_{ak}}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_k^2) + \left(\frac{b\omega_k}{m}\right)^2}}. \tag{18}$$

Подставляя (18) в (17) и совершая определенные преобразования, получаем

$$b_{1,2} = \frac{D \pm \sqrt{D^2 - 4ap}}{2a}, \tag{19}$$

где

$$a = +\omega_k^2[\cos^2 2\omega_k t - \sin^2(2\omega_k t - \varphi_{xk})];$$

$$D = 2\omega_k\sin(2\omega_k t - \varphi_{xk})[(C - m\omega_k^2)\cos(2\omega_k t - \varphi_{xk})];$$

$$p = (2mC - m^2\omega_k^2 - C^2)\cos^2(2\omega_k t - \varphi_{xk}) + (\omega_0^2 - \omega_k^2)^2 m^2\cos^2 2\omega_k^t.$$

В выражении (19) учитываем действительное значение коэффициента диссипации b. Если b_1 или b_2 являются действительными, то исследование надо проводить для каждого из них. Причем, как мы видим из обозначений a, D, p, на величину коэффициента диссипации влияет частота ω_k. Поэтому, принимая заданным этот коэффициент, определяем частотный диапазон полигармонического управляющего воздействия. Но здесь можно также варьировать и другими величинами, в частности, величиной коэффициента жесткости.

Таким образом, на основе данного исследования получены выражения массы нагрузочного изделия совместно с массой якоря, коэффициенты жесткости и диссипации в функции параметров ЭМВ и величин гармонических составляющих полигармонического управляющего воздействия.

1. *Вибрации* в технике: В 4 т. / Под ред Э. Э. Лавенделла. – Москва: Машиностроение, 1981. – Т. 4. – 510 с.
2. *Ступель Ф. А.* Электромеханические реле. – Харьков: Изд-во Харьков. гос. ун-та, 1956. – 355 с.
3. *Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.* Справочник по математике. – Москва: Гос. изд-во техн.-экон. лит., 1956. – 608 с.
4. *Божко А. Е., Мягкохлеб К. Б.* О весовой нагрузке на электромагнитном вибростенде // Доп. НАН України. – 2003. – № 7. – С. 87–90.
5. *Божко А. Е., Голуб Н. М.* Динамико-энергетические связи колебательных систем. – Киев: Наук. думка, 1980. – 188 с.

Институт проблем машиностроения
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 07.08.2007

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **A. E. Bozhko**

On the possible weighty load, damping, and toughness of springs of an electromagnetic vibroexciter on the polyharmonic control

On the base of a given controlling polyharmonic voltage, the mass of a weighty load and the coefficients of dissipation and elasticity of springs of electromagnetic vibroexciter are determined.