УДК 517.526

О. М. Сусь

# ПРО ОЦІНКУ ШВИДКОСТІ ЗБІЖНОСТІ ДВОВИМІРНИХ НЕПЕРЕРВНИХ ДРОБІВ З КОМПЛЕКСНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ

*Розглядаються двовимірні неперервні дроби, елементи яких лежать у кутовій області правої півплощини. Встановлено достатні умови збіжності та фігурної збіжності. Одержано оцінку похибки наближення.*

В аналітичній теорії неперервних дробів поряд з круговими, парними, параболічними областями збіжності вивчаються й кутові області збіжності [9]. Однією з перших теорем, яка розглядає збіжність неперервних дробів у кутовій області, є теорема Ван Флека (без оцінки швидкості збіжності), встановлена в 1901 році [14].

Неперервний дріб $\mathop{\mathrm{K}}\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{b_k}$ називається дробом Ван Флека, якщо для елементів $b_k, k = 1,2,\ldots$, виконуються умови $\operatorname{Re} b_k > 0,\ k = 1,2,\ldots$, і правильним дробом Ван Флека з кутом $\theta < \frac{\pi}{2}$, якщо справджуються нерівності $\operatorname{Re} b_k > 0,\ |\arg b_k| < \theta,\ k = 1,2,\ldots$ [12].

У 1909 році J. L. W. V. Jensen [13] для правильних дробів Ван Флека встановив оцінку похибки наближення неперервного дробу його $n$-м підхідним дробом. У роботі [12] була запропонована методика встановлення оцінки швидкості збіжності для дробів загального вигляду $\mathop{\mathrm{K}}\limits_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{b_k}$, де $a_k > 0,\ k = 1,2,\ldots$, а елементи $b_k, k=1,2,\ldots$, задовольняють умови теореми Ван Флека.

Для багатовимірних узагальнень неперервних дробів, зокрема, гіллястих ланцюгових дробів (ГЛД), ГЛД спеціального вигляду та двовимірних неперервних дробів (ДНД), аналоги теореми Ван Флека встановлено в роботах [3, 6, 8, 10] (без оцінки швидкості збіжності). У роботах Т. М Антонової [1, 2] за допомогою встановлених нею формул для дійсних та уявних частин залишків ГЛД знайдено оцінки значень залишків правильних ГЛД Ван Флека і методом фундаментальних нерівностей встановлено оцінку похибки наближення таких ГЛД його $n$-ми підхідними дробами.

У цій роботі вивчаються правильні двовимірні неперервні дроби Ван Флека, тобто ДНД, елементи яких задовольняють умови теореми Ван Флека, та за допомогою методики, запропонованої в роботах [4, 7], досліджується швидкість їх збіжності.

Розглянемо нескінченний двовимірний неперервний дріб (ДНД) вигляду

$$\mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{b_{kk}+\Phi_k}, \qquad \Phi_k = \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty}\frac{1}{b_{k+j,k}} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty}\frac{1}{b_{k,k+j}}, \qquad k = 0,1,\ldots. \tag{1}$$

***Означення 1* [10].** Скінченні ДНД

$$f_n = \mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{b_{k,k}+\Phi_k^{(n-k-1)}}, \qquad n = 1,2,\ldots, \tag{2}$$

де

$$\Phi_k^{(0)} = 0, \quad \Phi_k^{(p)} = \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{p}\frac{1}{b_{k+j,k}} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{p}\frac{1}{b_{k,k+j}}, \quad k = 0,1,\ldots, \quad p = 1,2,\ldots, \tag{3}$$

називаються *звичайними* $n$*-ми наближенням* ДНД (1) .

**ISSN 1810-3022. Прикл. проблеми мех. і мат. – 2008. – Вип. 6. – С. 115–123.**

***Означення 2*** [**10**]. Назвемо $n$-*ми фігурними наближеннями* або $n$-*ми фігурними підхідними дробами* ДНД (1) скінченні ДНД вигляду

$$\tilde{f}_n = \mathop{\mathrm{D}}_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{1}{b_{k,k} + \Phi_k^{(n-2k-1)}}, \qquad n = 1,2,\ldots, \tag{4}$$

де $\Phi_k^{(p)}$, $k = 0,1,\ldots$, $p = 1,2,\ldots$, визначаються за формулами (3).

***Означення 3*** [**10**]. ДНД (1) називають збіжним (*фігурно збіжним)*, якщо існує скінченна границя послідовності його наближень $\{f_n\}$ $(\{\tilde{f}_n\})$. Величину цієї границі називають значенням нескінченного ДНД (1).

Вирази вигляду

$$Q_j^{(0)} = b_{j,j}, \qquad Q_j^{(p+1)} = b_{j,j} + \Phi_j^{(p+1)} + \frac{1}{Q_{j+1}^{(p)}},$$
$$p = 0,1,\ldots, \qquad j = 0,1,2,\ldots, \tag{5}$$

$$\tilde{Q}_j^{(0)} = b_{j,j}, \qquad \tilde{Q}_j^{(1)} = b_{j,j} + \Phi_j^{(1)}, \qquad \tilde{Q}_j^{(p+2)} = b_{j,j} + \Phi_j^{(p+2)} + \frac{1}{\tilde{Q}_{j+1}^{(p)}},$$
$$j = 0,1,\ldots, \qquad p = 0,1,\ldots, \tag{6}$$

називають двовимірними залишками звичайних наближень (2) і фігурних наближень (4) відповідно, а неперервні дроби

$$Q_{k+j,k}^{(p+1)} = b_{k+j,k} + \frac{1}{Q_{k+j+1,k}^{(p)}}, \qquad Q_{k,k+j}^{(p+1)} = b_{k,k+j} + \frac{1}{Q_{k,k+j+1}^{(p)}},$$
$$Q_{k+j,k}^{(0)} = b_{k+j,k}, \qquad Q_{k,k+j}^{(0)} = b_{k,k+j},$$
$$k = 0,1,\ldots, \qquad p = 0,1,\ldots, \qquad j = 1,2,\ldots, \tag{7}$$

називають їх одновимірними залишками.

Враховуючи формули (3) та позначення (7), маємо

$$\Phi_k^{(p)} = \frac{1}{Q_{k+1,k}^{(p-1)}} + \frac{1}{Q_{k,k+1}^{(p-1)}}, \qquad k = 0,1,\ldots, \qquad p = 1,2,\ldots. \tag{8}$$

Для дослідження властивостей послідовностей підхідних дробів ДНД (1) використовуються формули різниці (двох звичайних або двох фігурних), зокрема, для $n > m+1$:

$$\tilde{f}_n - \tilde{f}_m =$$
$$= \sum_{k=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} \frac{(-1)^{k+1}\left(\Phi_k^{(n-2k-1)} - \Phi_k^{(m-2k-1)}\right)}{\prod_{j=0}^{k} \tilde{Q}_j^{(m-2j-1)} \tilde{Q}_j^{(n-2j-1)}} + \frac{(-1)^{\left[\frac{m+1}{2}\right]}}{\prod_{j=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} \tilde{Q}_j^{(m-2j-1)} \prod_{j=0}^{\left[\frac{m+1}{2}\right]} \tilde{Q}_j^{(n-2j-1)}}. \tag{9}$$

У [5] з використанням методики встановлення формули (9) одержано таку формулу різниці між звичайними та фігурними наближеннями для $n > m+1$:

$$f_n - \tilde{f}_m =$$
$$= \sum_{k=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} \frac{(-1)^{k+1}\left(\Phi_k^{(n-k-1)} - \Phi_k^{(m-2k-1)}\right)}{\prod_{j=0}^{k} \tilde{Q}_j^{(m-2j-1)} Q_j^{(n-j-1)}} + \frac{(-1)^{\left[\frac{m+1}{2}\right]}}{\prod_{j=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} \tilde{Q}_j^{(m-2j-1)} \prod_{j=0}^{\left[\frac{m+1}{2}\right]} Q_j^{(n-j-1)}}. \tag{10}$$

**Теорема.** *Нехай елементи ДНД* (1) *задовольняють нерівності*

$$\operatorname{Re} b_{i,i} > 0, \quad \operatorname{Re} b_{i+j,i} > 0, \quad \operatorname{Re} b_{i,i+j} > 0, \quad i = 0,1,\ldots, \quad j = 1,2,\ldots, \tag{11}$$

$$\left|\arg b_{i,i}\right| < \theta, \quad \left|\arg b_{i+j,i}\right| < \theta, \quad \left|\arg b_{i,i+j}\right| < \theta, \quad \theta < \frac{\pi}{2},$$
$$i = 0,1,\ldots, \quad j = 1,2,\ldots. \tag{12}$$

*Якщо існують такі послідовності* $\{\mu'_\ell\}$, $\{\mu''_\ell\}$, $\ell = 2,3,\ldots$, $\{\mu_j\}$, $j = 1,2,\ldots$, *додатних чисел, що*

$$\mu'_\ell \le \left|b_{i+\ell-1,i}\right| \operatorname{Re} b_{i+\ell,i}, \qquad \ell = 2,3,\ldots, \quad i = 0,1,\ldots,$$

$$\mu''_\ell \le \left|b_{i,i+\ell-1}\right| \operatorname{Re} b_{i,i+\ell}, \qquad \ell = 2,3,\ldots, \quad i = 0,1,\ldots,$$

$$\mu_j \le \left|b_{j-1,j-1}\right| \operatorname{Re} b_{j,j}, \qquad j = 2,3,\ldots,$$

*і виконуються умови*

$$\lim_{r\to\infty}\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^{2r}\prod_{\ell=1}^{r}\frac{1}{1+\mu'_{\ell+1}} = 0, \qquad \lim_{r\to\infty}\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^{2r}\prod_{\ell=1}^{r}\frac{1}{1+\mu''_{\ell+1}} = 0,$$

$$\lim_{r\to\infty}\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^{3r}\prod_{j=1}^{r}\frac{1}{1+\mu_j} = 0, \tag{13}$$

*то ДНД* (1) *є збіжним і фігурно збіжним, причому* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = \lim\limits_{n\to\infty} \tilde f_n$ *і справджується нерівність*

$$\left|\tilde f - \tilde f_{4p+1}\right| \le \frac{1}{1-\cos\theta}\cdot\frac{1}{\operatorname{Re} b_{0,0}}\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^{4p+2}\left(\prod_{\ell=1}^{2p+2}\frac{1}{1+\mu'_{\ell+1}} + \prod_{\ell=1}^{2p+2}\frac{1}{1+\mu''_{\ell+1}}\right) +$$
$$+\, 2\frac{1}{\operatorname{Re} b_{0,0}}\cdot\frac{1}{1-\cos\theta}\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^{3p+1}\prod_{j=1}^{p+1}\frac{1}{1+\mu_j} +$$
$$+\, \frac{1}{\operatorname{Re} b_{0,0}}\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^{2p+1}\prod_{j=1}^{2p}\frac{1}{1+\mu_j}. \tag{13$'$}$$

Д о в е д е н н я. У роботі [11] доведено лему, в якій для одновимірних залишків (7) ДНД (1) за умов (11), (12) для $i = 0,1,\ldots$, $k = 1,2,\ldots$, $p = 0,1,\ldots$ встановлено нерівності

$$\left|Q^{(0)}_{i+k,i}\right| \ge \operatorname{Re} Q^{(0)}_{i+k,i} = \operatorname{Re} b_{i+k,i},$$

$$\left|Q^{(p+1)}_{i+k,i}\right| \ge \operatorname{Re} Q^{(p+1)}_{i+k,i} \ge \operatorname{Re} b_{i+k,i} + \frac{\cos\theta}{\left|Q^{(p)}_{i+k+1,i}\right|} \ge \operatorname{Re} b_{i+k,i}, \tag{14}$$

$$\left|Q^{(0)}_{i,i+k}\right| \ge \operatorname{Re} Q^{(0)}_{i,i+k} = \operatorname{Re} b_{i,i+k},$$

$$\left|Q^{(p+1)}_{i,i+k}\right| \ge \operatorname{Re} Q^{(p+1)}_{i,i+k} \ge \operatorname{Re} b_{i,i+k} + \frac{\cos\theta}{\left|Q^{(p)}_{i,i+k+1}\right|} \ge \operatorname{Re} b_{i,i+k}. \tag{15}$$

Двовимірні залишки (5) ДНД (1) за умов теореми (11), (12) задовольняють нерівності

$$\left|Q^{(0)}_{i}\right| \ge \operatorname{Re} Q^{(0)}_{i} = \operatorname{Re} b_{i,i}, \qquad i = 0,1,\ldots,$$

$$\left|Q^{(p+1)}_{i}\right| \ge \operatorname{Re} Q^{(p+1)}_{i} \ge \operatorname{Re} b_{i,i} + \frac{\cos\theta}{\left|Q^{(p)}_{i+1,i}\right|} + \frac{\cos\theta}{\left|Q^{(p)}_{i,i+1}\right|} + \frac{\cos\theta}{\left|Q^{(p)}_{i}\right|} \ge \operatorname{Re} b_{i,i},$$
$$i = 0,1,\ldots, \quad p = 0,1,\ldots. \tag{16}$$

Використовуючи схему встановлення нерівності (16), неважко показати, що для двовимірних залишків (6) фігурних наближень (4) ДНД (1) справджуються оцінки

$$\left|\tilde{Q}_i^{(0)}\right| \ge \operatorname{Re}\tilde{Q}_i^{(0)} = \operatorname{Re} b_{i,i}, \quad \left|\tilde{Q}_i^{(1)}\right| \ge \operatorname{Re}\tilde{Q}_i^{(1)} \ge \operatorname{Re} b_{i,i} + \frac{\cos\theta}{\left|\tilde{Q}_{i+1,i}^{(0)}\right|} + \frac{\cos\theta}{\left|\tilde{Q}_{i,i+1}^{(0)}\right|},$$

$$\left|\tilde{Q}_i^{(p+2)}\right| \ge \operatorname{Re}\tilde{Q}_i^{(p+2)} \ge \operatorname{Re} b_{i,i} + \frac{\cos\theta}{\left|\tilde{Q}_{i+1,i}^{(p+1)}\right|} + \frac{\cos\theta}{\left|\tilde{Q}_{i,i+1}^{(p+1)}\right|} + \frac{\cos\theta}{\left|\tilde{Q}_i^{(p)}\right|} \ge \operatorname{Re} b_{i,i},$$

$$i = 0,1,\ldots, \qquad p = 0,1,\ldots. \tag{17}$$

З формул (17) випливають нерівності

$$\left|Q_i^{(p+2)}\right| \ge \operatorname{Re} Q_i^{(p+2)} \ge \operatorname{Re} b_{i,i} + \frac{\cos\theta}{\left|Q_i^{(p)}\right|} \ge \operatorname{Re} b_{i,i}, \tag{17$'$}$$

$$\left|Q_i^{(p+2)}\right| \ge \operatorname{Re} Q_i^{(p+2)} \ge \operatorname{Re} b_{i,i} + \frac{\cos\theta}{\left|Q_{i+1,i}^{(p+1)}\right|} \ge \operatorname{Re} b_{i,i}, \tag{17$''$}$$

$$\left|Q_i^{(p+2)}\right| \ge \operatorname{Re} Q_i^{(p+2)} \ge \operatorname{Re} b_{i,i} + \frac{\cos\theta}{\left|Q_{i,i+1}^{(p+2)}\right|} \ge \operatorname{Re} b_{i,i}. \tag{17$'''$}$$

Доведемо фігурну збіжність ДНД (1). Для цього оцінимо за модулем різницю (9) для $m=4p+1$, $p=0,1,\ldots$. З формули (9) випливає, що

$$\left|\tilde{f}_n - \tilde{f}_{4p+1}\right| \le \sum_{k=0}^{2p-1} \frac{\left|\Phi_k^{(n-2k-1)} - \Phi_k^{(4p-2k)}\right|}{\prod\limits_{j=0}^{k}\left|\tilde{Q}_j^{(4p-2j)}\right|\left|\tilde{Q}_j^{(n-2j-1)}\right|} + \frac{\left|\Phi_{2p}^{(n-4p-1)}\right|}{\prod\limits_{j=0}^{2p}\left|\tilde{Q}_j^{(4p-2j)}\right|\prod\limits_{j=0}^{2p}\left|\tilde{Q}_j^{(n-2j-1)}\right|} +$$

$$+ \frac{1}{\prod\limits_{j=0}^{2p}\left|\tilde{Q}_j^{(4p-2j)}\right|\prod\limits_{j=0}^{2p+1}\left|\tilde{Q}_j^{(n-2j-1)}\right|}, \qquad n \ge 4p+1. \tag{18}$$

Оцінимо вираз $\left|\Phi_i^{(n-2i-1)} - \Phi_i^{(4p-2i)}\right|$, $0 \le i \le 2p-1$, $p = 1,2,\ldots$:

$$\left|\Phi_i^{(n-2i-1)} - \Phi_i^{(4p-2i)}\right| \le \frac{1}{\prod\limits_{\ell=1}^{4p-2i+1}\left|Q_{i+\ell,i}^{(n-2i-\ell-1)}\right|\prod\limits_{\ell=1}^{4p-2i}\left|Q_{i+\ell,i}^{(4p-2i-\ell)}\right|} +$$

$$+ \frac{1}{\prod\limits_{\ell=1}^{4p-2i+1}\left|Q_{i,i+\ell}^{(n-2i-\ell-1)}\right|\prod\limits_{\ell=1}^{4p-2i}\left|Q_{i,i+\ell}^{(4p-2i-\ell)}\right|}.$$

Добутки $\prod\limits_{\ell=1}^{4p-2i+1}\left|Q_{i+\ell,i}^{(n-2i-\ell-1)}\right|\prod\limits_{\ell=1}^{4p-2i}\left|Q_{i+\ell,i}^{(4p-2i-\ell)}\right|$, що стоять у знаменнику першого доданка, подамо у вигляді

$$\left|Q_{i+1,i}^{(n-2i-2)}\right|\prod_{\ell=1}^{2p-i}\left|Q_{i+2\ell-1,i}^{(4p-2i-2\ell-1)}Q_{i+2\ell,i}^{(4p-2i-2\ell)}\right|\prod_{\ell=1}^{2p-i}\left|Q_{i+2\ell,i}^{(n-2i-2\ell)}Q_{i+2\ell+1,i}^{(n-2i-2\ell-1)}\right|.$$

Оцінимо $\left|Q_{i+\ell-1,i}^{(s)}Q_{i+\ell,i}^{(s-1)}\right|$, $i = 0,1,\ldots$, $\ell = 2,3,\ldots$, $s = 1,2,\ldots$. Використовуючи нерівність

$$\frac{\operatorname{Re} b_{i+j,i}}{\left|b_{i+j,i}\right|} \ge \cos\theta, \qquad i,j = 0,1,\ldots, \tag{19}$$

яка справджується для правильних дробів Ван Флека [12], умови теореми (11), (12) та нерівності (14), одержимо для $i = 0,1,\ldots$, $\ell = 2,3,\ldots$, $s \ge 1$:

$$\left|Q_{i+\ell-1,i}^{(s)}\right|\left|Q_{i+\ell,i}^{(s-1)}\right| \ge \operatorname{Re} Q_{i+\ell-1,i}^{(s)} \left|Q_{i+\ell,i}^{(s-1)}\right| \ge \left(\operatorname{Re} b_{i+\ell-1,i} + \frac{\cos\theta}{\left|Q_{i+\ell,i}^{(s-1)}\right|}\right)\left|Q_{i+\ell,i}^{(s-1)}\right| =$$

$$= \operatorname{Re} b_{i+\ell-1,i} \left|Q_{i+\ell,i}^{(s-1)}\right| + \cos\theta \ge \operatorname{Re} b_{i+\ell-1,i} \operatorname{Re} b_{i+\ell,i} + \cos\theta \ge$$

$$\ge \cos\theta\left(1 + \left|b_{i+\ell-1,i}\right| \operatorname{Re} b_{i+\ell,i}\right).$$

Нехай $\mu'_\ell \le \left|b_{i+\ell-1,i}\right| \operatorname{Re} b_{i+\ell,i}$, $\ell = 2,3,\ldots$. Тоді

$$\frac{1}{\left|Q_{i+1,i}^{(n-2i-2)}\right|} \frac{1}{\prod\limits_{\ell=2}^{4p-2i+1} \left|Q_{i+\ell,i}^{(n-2i-\ell-1)}\right| \prod\limits_{\ell=1}^{4p-2i} \left|Q_{i+\ell,i}^{(4p-2i-\ell)}\right|} \le$$

$$\le \frac{1}{\left|Q_{i+1,i}^{(n-2i-2)}\right|} \prod_{\ell=1}^{4p-2i} \frac{1}{\cos\theta} \cdot \frac{1}{1+\mu'_{\ell+1}}.$$

Аналогічно оцінюємо і другий доданок. Нехай $\mu''_\ell \le \left|b_{i,i+\ell-1}\right| \operatorname{Re} b_{i,i+\ell}$, $\ell = 2,3,\ldots$. Тоді

$$\frac{1}{\left|Q_{i,i+1}^{(n-2i-2)}\right|} \frac{1}{\prod\limits_{\ell=2}^{4p-2i+1} \left|Q_{i,i+\ell}^{(n-2i-\ell-1)}\right| \prod\limits_{\ell=1}^{4p-2i} \left|Q_{i,i+\ell}^{(4p-2i-\ell)}\right|} \le$$

$$\le \frac{1}{\left|Q_{i,i+1}^{(n-2i-2)}\right|} \prod_{\ell=1}^{4p-2i} \frac{1}{\cos\theta} \cdot \frac{1}{1+\mu''_{\ell+1}}.$$

Отже,

$$\left|\Phi_i^{(n-2i-1)} - \Phi_i^{(4p-2i)}\right| \le \frac{1}{\left|Q_{i+1,i}^{(n-2i-2)}\right|} \prod_{\ell=1}^{4p-2i} \frac{1}{\cos\theta} \cdot \frac{1}{1+\mu'_{\ell+1}} +$$

$$+ \frac{1}{\left|Q_{i,i+1}^{(n-2i-2)}\right|} \prod_{\ell=1}^{4p-2i} \frac{1}{\cos\theta} \cdot \frac{1}{1+\mu''_{\ell+1}}. \tag{20}$$

Оцінимо $\prod\limits_{j=0}^{i} \frac{1}{\left|\tilde{Q}_j^{(n-2j-1)}\right|\left|\tilde{Q}_j^{(4p-2j)}\right|}$. Нехай $i = 2\ell$, $\ell = 1,2,\ldots$. Тоді

$$\prod_{j=0}^{2\ell} \frac{1}{\left|\tilde{Q}_j^{(n-2j-1)}\right|\left|\tilde{Q}_j^{(4p-2j)}\right|} = \frac{1}{\left|\tilde{Q}_0^{(4p)}\right|} \cdot \frac{1}{\left|\tilde{Q}_{2\ell}^{(n-4\ell-1)}\right|} \prod_{j=0}^{2\ell-1} \frac{1}{\left|\tilde{Q}_j^{(n-2j-1)}\right|} \prod_{j=1}^{2\ell} \frac{1}{\left|\tilde{Q}_j^{(4p-2j)}\right|} =$$

$$= \frac{1}{\left|\tilde{Q}_0^{(4p)}\right|} \cdot \frac{1}{\left|\tilde{Q}_{2\ell}^{(n-4\ell-1)}\right|} \prod_{j=0}^{\ell-1} \frac{1}{\left|\tilde{Q}_{2j}^{(n-4j-1)} \tilde{Q}_{2j+1}^{(n-4j-3)}\right|} \prod_{j=1}^{\ell} \frac{1}{\left|\tilde{Q}_{2j-1}^{(4p-4j+2)} \tilde{Q}_{2j}^{(4p-4j)}\right|}.$$

Якщо $i = 2\ell - 1$, $\ell = 1,2,\ldots$, то

$$\prod_{j=0}^{2\ell-1} \frac{1}{\left|\tilde{Q}_j^{(n-2j-1)}\right|\left|\tilde{Q}_j^{(4p-2j)}\right|} = \frac{1}{\left|\tilde{Q}_0^{(n-1)}\right|} \cdot \frac{1}{\left|\tilde{Q}_{2\ell-1}^{(n-4\ell+1)}\right|} \prod_{j=1}^{2\ell-2} \frac{1}{\left|\tilde{Q}_j^{(n-2j-1)}\right|} \prod_{j=0}^{2\ell-1} \frac{1}{\left|\tilde{Q}_j^{(4p-2j)}\right|} =$$

$$= \frac{1}{\left|\tilde{Q}_0^{(n-1)}\right|} \cdot \frac{1}{\left|\tilde{Q}_{2\ell-1}^{(n-4\ell+1)}\right|} \prod_{j=1}^{\ell-1} \frac{1}{\left|\tilde{Q}_{2j-1}^{(n-4j+1)} \tilde{Q}_{2j}^{(n-4j-1)}\right|} \prod_{j=0}^{\ell-1} \frac{1}{\left|\tilde{Q}_{2j}^{(4p-4j)} \tilde{Q}_{2j+1}^{(4p-4j-2)}\right|}.$$

Використовуючи нерівності (17), (19), оцінимо $\frac{1}{\left|\tilde{Q}_{j-1}^{(s)} \tilde{Q}_j^{(s-2)}\right|}$ для $j = 1,2,\ldots$, $s = 2,3,\ldots$:

$$\frac{1}{\left|\tilde{Q}_{j-1}^{(s)} \tilde{Q}_j^{(s-2)}\right|} \le \frac{1}{\operatorname{Re} \tilde{Q}_{j-1}^{(s)} \left|\tilde{Q}_j^{(s-2)}\right|} \le$$

$$\leq \frac{1}{\left(\operatorname{Re} b_{j-1,j-1} + \dfrac{\cos\theta}{\left|Q_{j,j-1}^{(s-1)}\right|} + \dfrac{\cos\theta}{\left|Q_{j-1,j}^{(s-1)}\right|} + \dfrac{\cos\theta}{\left|\tilde{Q}_{j}^{(s-2)}\right|}\right)\left|\tilde{Q}_{j}^{(s-2)}\right|} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\operatorname{Re} b_{j-1,j-1}\left|\tilde{Q}_{j}^{(s-2)}\right| + \cos\theta} \leq \frac{1}{\cos\theta} \cdot \frac{1}{1 + \left|b_{j-1,j-1}\right| \operatorname{Re} b_{j,j}}.$$

Отже,

$$\frac{1}{\left|\tilde{Q}_{j-1}^{(s)}\tilde{Q}_{j}^{(s-2)}\right|} \leq \frac{1}{\cos\theta} \cdot \frac{1}{1+\mu_j},$$

де $\mu_j \leq \left|b_{j-1,j-1}\right| \operatorname{Re} b_{j,j}$, $j = 1,2,\ldots$. Таким чином,

$$\prod_{j=0}^{i} \frac{1}{\left|\tilde{Q}_{j}^{(n-2j-1)}\right|\left|\tilde{Q}_{j}^{(4p-2j)}\right|} \leq \frac{1}{\operatorname{Re} b_{0,0}} \cdot \frac{1}{\left|\tilde{Q}_{i}^{(n-2i-1)}\right|} \prod_{j=1}^{i} \frac{1}{\cos\theta} \cdot \frac{1}{1+\mu_j}. \tag{21}$$

Аналогічно, з використанням схеми доведення нерівності (21), можна показати, що

$$\prod_{j=0}^{i} \frac{1}{\left|Q_{j}^{(n-j-1)}\right|\left|\tilde{Q}_{j}^{(4p-2j)}\right|} \leq \frac{1}{\operatorname{Re} b_{0,0}} \cdot \frac{1}{\left|Q_{i}^{(n-i-1)}\right|} \prod_{j=1}^{i} \frac{1}{\cos\theta} \cdot \frac{1}{1+\mu_j}. \tag{21$'$}$$

Розглянемо вираз

$$\frac{\left|\Phi_{2p}^{(n-4p-1)}\right|}{\prod\limits_{j=0}^{2p}\left|\tilde{Q}_{j}^{(4p-2j)}\right| \prod\limits_{j=0}^{2p}\left|\tilde{Q}_{j}^{(n-2j-1)}\right|} + \frac{1}{\prod\limits_{j=0}^{2p}\left|\tilde{Q}_{j}^{(4p-2j)}\right| \prod\limits_{j=0}^{2p+1}\left|\tilde{Q}_{j}^{(n-2j-1)}\right|}$$

і подамо його у вигляді

$$\left(\left|\Phi_{2p}^{(n-4p-1)}\right| + \frac{1}{\left|\tilde{Q}_{2p+1}^{(n-4p-3)}\right|}\right)\frac{1}{\prod\limits_{j=0}^{2p}\left|\tilde{Q}_{j}^{(4p-2j)}\right| \prod\limits_{j=0}^{2p}\left|\tilde{Q}_{j}^{(n-2j-1)}\right|} =$$

$$= \left(\left|\Phi_{2p}^{(n-4p-1)}\right| + \frac{1}{\left|\tilde{Q}_{2p+1}^{(n-4p-3)}\right|}\right) \cdot \frac{1}{\left|\tilde{Q}_{2p}^{(n-4p-1)}\right|} \cdot \frac{1}{\left|\tilde{Q}_{0}^{(4p)}\right|} \times$$

$$\times \prod_{j=0}^{2p-1} \frac{1}{\left|\tilde{Q}_{j}^{(n-2j-1)}\right|} \prod_{j=1}^{2p} \frac{1}{\left|\tilde{Q}_{j}^{(4p-2j)}\right|}.$$

Використовуючи формули (8), нерівності (17), (19), одержимо

$$\frac{\left|\Phi_{2p}^{(n-4p-1)}\right| + \dfrac{1}{\left|\tilde{Q}_{2p+1}^{(n-4p-3)}\right|}}{\left|\tilde{Q}_{2p}^{(n-4p-1)}\right|} \leq$$

$$\leq \frac{\dfrac{1}{\left|Q_{2p+1,2p}^{(n-4p-2)}\right|} + \dfrac{1}{\left|Q_{2p,2p+1}^{(n-4p-2)}\right|} + \dfrac{1}{\left|\tilde{Q}_{2p+1}^{(n-4p-3)}\right|}}{\operatorname{Re} b_{2p,2p} + \cos\theta \cdot \left(\dfrac{1}{\left|Q_{2p+1,2p}^{(n-4p-2)}\right|} + \dfrac{1}{\left|Q_{2p,2p+1}^{(n-4p-2)}\right|} + \dfrac{1}{\left|\tilde{Q}_{2p+1}^{(n-4p-3)}\right|}\right)} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\cos\theta} \cdot \frac{\dfrac{1}{\left|Q_{2p+1,2p}^{(n-4p-2)}\right|} + \dfrac{1}{\left|Q_{2p,2p+1}^{(n-4p-2)}\right|} + \dfrac{1}{\left|\tilde{Q}_{2p+1}^{(n-4p-3)}\right|}}{\left|b_{2p,2p}\right| + \dfrac{1}{\left|Q_{2p+1,2p}^{(n-4p-2)}\right|} + \dfrac{1}{\left|Q_{2p,2p+1}^{(n-4p-2)}\right|} + \dfrac{1}{\left|\tilde{Q}_{2p+1}^{(n-4p-3)}\right|}} \leq \frac{1}{\cos\theta}.$$

Враховуючи нерівність (21) для $i = 2p$, $p = 1, 2\ldots$, одержимо

$$\left(\left|\Phi_{2p}^{(n-4p-1)}\right| + \frac{1}{\left|\tilde{Q}_{2p+1}^{(n-4p-3)}\right|}\right) \cdot \frac{1}{\left|\tilde{Q}_{2p}^{(n-4p-1)}\right|} \cdot \frac{1}{\left|\tilde{Q}_{0}^{(4p)}\right|} \prod_{j=0}^{2p-1} \frac{1}{\left|\tilde{Q}_{j}^{(n-2j-1)}\right|} \prod_{j=1}^{2p} \frac{1}{\left|\tilde{Q}_{j}^{(4p-2j)}\right|} \le$$

$$\le \frac{1}{\cos\theta} \cdot \frac{1}{\operatorname{Re} b_{0,0}} \prod_{j=1}^{2p} \frac{1}{\cos\theta} \cdot \frac{1}{1+\mu_j}. \tag{22}$$

Аналогічно можна показати, що

$$\left(\left|\Phi_{2p}^{(n-2p-1)}\right| + \frac{1}{\left|Q_{2p+1}^{(n-2p-2)}\right|}\right) \cdot \frac{1}{\left|Q_{2p}^{(n-2p-1)}\right|} \cdot \frac{1}{\left|\tilde{Q}_{0}^{(4p)}\right|} \prod_{j=0}^{2p-1} \frac{1}{\left|Q_{j}^{(n-j-1)}\right|} \prod_{j=1}^{2p} \frac{1}{\left|\tilde{Q}_{j}^{(4p-2j)}\right|} \le$$

$$\le \frac{1}{\cos\theta} \cdot \frac{1}{\operatorname{Re} b_{0,0}} \prod_{j=1}^{2p} \frac{1}{\cos\theta} \cdot \frac{1}{1+\mu_j}. \tag{22$'$}$$

Далі розглянемо $\dfrac{1}{\left|\tilde{Q}_{i}^{(n-2i-1)}\right|} \cdot \dfrac{1}{\left|Q_{i+1,i}^{(n-2i-2)}\right|}$, $i = 0, 1, \ldots$, і оцінимо цей добуток, використовуючи позначення (6) і нерівності (17″):

$$\frac{1}{\left|\tilde{Q}_{i}^{(n-2i-1)}\right|} \cdot \frac{1}{\left|Q_{i+1,i}^{(n-2i-2)}\right|} \le \frac{1}{\operatorname{Re} \tilde{Q}_{i}^{(n-2i-1)}} \cdot \frac{1}{\left|Q_{i+1,i}^{(n-2i-2)}\right|} \le$$

$$\le \frac{1}{\left(\operatorname{Re} b_{i,i} + \dfrac{\cos\theta}{\left|Q_{i+1,i}^{(n-2i-2)}\right|}\right)\left|Q_{i+1,i}^{(n-2i-2)}\right|} \le$$

$$\le \frac{1}{\cos\theta} \cdot \frac{1}{1 + \left|b_{i,i}\right| \operatorname{Re} b_{i+1,i}} \le \frac{1}{\cos\theta}. \tag{23}$$

З позначень (6) і нерівностей (17‴) випливає, що

$$\frac{1}{\left|\tilde{Q}_{i}^{(n-2i-1)}\right|} \cdot \frac{1}{\left|Q_{i,i+1}^{(n-2i-2)}\right|} \le \frac{1}{\cos\theta}. \tag{24}$$

Аналогічно, використовуючи позначення (5), нерівності (16) і схему доведення оцінок (23), (24), встановлюємо нерівності

$$\frac{1}{\left|Q_{i}^{(n-i-1)}\right|} \cdot \frac{1}{\left|Q_{i+1,i}^{(n-i-2)}\right|} \le \frac{1}{\cos\theta}, \qquad \frac{1}{\left|Q_{i}^{(n-i-1)}\right|} \cdot \frac{1}{\left|Q_{i,i+1}^{(n-i-2)}\right|} \le \frac{1}{\cos\theta}. \tag{24$'$}$$

Підставляючи одержані нерівності (20)–(24) у формулу різниці (18), одержимо

$$\left|\tilde{f}_n - \tilde{f}_{4p+1}\right| \le \frac{1}{\cos\theta} \cdot \frac{1}{\operatorname{Re} b_{0,0}} \sum_{k=0}^{2p-1} \prod_{j=0}^{k} \frac{1}{\cos\theta} \cdot \frac{1}{1+\mu_{j+1}} \times$$

$$\times \left(\prod_{\ell=1}^{4p-2k} \frac{1}{\cos\theta} \cdot \frac{1}{1+\mu'_{\ell+1}} + \prod_{\ell=1}^{4p-2k} \frac{1}{\cos\theta} \cdot \frac{1}{1+\mu''_{\ell+1}}\right) +$$

$$+ \frac{1}{\cos\theta} \cdot \frac{1}{\operatorname{Re} b_{0,0}} \prod_{j=1}^{2p} \frac{1}{\cos\theta} \cdot \frac{1}{1+\mu_j} =$$

$$= \frac{1}{\cos\theta} \cdot \frac{1}{\operatorname{Re} b_{0,0}} \sum_{k=0}^{p-1} \prod_{j=0}^{k} \frac{1}{\cos\theta} \cdot \frac{1}{1+\mu_{j+1}} \left( \prod_{\ell=1}^{4p-2k} \frac{1}{\cos\theta} \cdot \frac{1}{1+\mu'_{\ell+1}} + \right.$$

$$+\prod_{\ell=1}^{4p-2k}\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{1+\mu''_{\ell+1}}\Bigg)+\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\operatorname{Re}b_{0,0}}\sum_{k=p}^{2p-1}\prod_{j=0}^{k}\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{1+\mu_{j+1}}\times$$

$$\times\left(\prod_{\ell=1}^{4p-2k}\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{1+\mu'_{\ell+1}}+\prod_{\ell=1}^{4p-2k}\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{1+\mu''_{\ell+1}}\right)+$$

$$+\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\operatorname{Re}b_{0,0}}\prod_{j=1}^{2p}\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{1+\mu_j}\le$$

$$\le\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\operatorname{Re}b_{0,0}}\sum_{k=0}^{p-1}\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^{4p+1-k}\left(\prod_{\ell=1}^{2p+2}\frac{1}{1+\mu'_{\ell+1}}+\prod_{\ell=1}^{2p+2}\frac{1}{1+\mu''_{\ell+1}}\right)+$$

$$+\frac{2}{\cos\theta}\frac{1}{\operatorname{Re}b_{0,0}}\sum_{k=p}^{2p-1}\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^{4p+1-k}\prod_{j=0}^{p}\frac{1}{1+\mu_{j+1}}+\prod_{j=1}^{2p}\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{1+\mu_j}\le$$

$$\le\frac{1}{\operatorname{Re}b_{0,0}}\cdot\frac{1}{1-\cos\theta}\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^{4p+2}\left(\prod_{\ell=1}^{2p+2}\frac{1}{1+\mu'_{\ell+1}}+\prod_{\ell=1}^{2p+2}\frac{1}{1+\mu''_{\ell+1}}\right)+$$

$$+2\frac{1}{\operatorname{Re}b_{0,0}}\cdot\frac{1}{1-\cos\theta}\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^{3p+1}\prod_{j=1}^{p+1}\frac{1}{1+\mu_j}+$$

$$+\frac{1}{\operatorname{Re}b_{0,0}}\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^{2p+1}\prod_{j=1}^{2p}\frac{1}{1+\mu_j}. \qquad (25)$$

Переходячи до границі при $p\to\infty$ в нерівності (25) і враховуючи умови (13) теореми, доходимо висновку про фігурну збіжність ДНД (1).

Нерівність (13′) теореми одержимо, переходячи в нерівності (25) до границі при $n\to\infty$.

Покажемо що $\lim\limits_{n\to\infty}f_n=\lim\limits_{n\to\infty}\tilde f_n$. Для цього розглянемо різницю (10) для $m=4p+1$, $p=0,1,\ldots$ і оцінимо її за модулем. Отже,

$$\left|f_n-\tilde f_{4p+1}\right|\le\sum_{k=0}^{2p-1}\frac{\left|\Phi_k^{(n-k-1)}-\Phi_k^{(4p-2k)}\right|}{\prod\limits_{j=0}^{k}\left|\tilde Q_j^{(4p-2j)}\right|\left|Q_j^{(n-j-1)}\right|}+\frac{\left|\Phi_{2p}^{(n-2p-1)}\right|}{\prod\limits_{j=0}^{2p}\left|\tilde Q_j^{(4p-2j)}\right|\prod\limits_{j=0}^{2p}\left|Q_j^{(n-j-1)}\right|}+$$

$$+\frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{2p}\left|\tilde Q_j^{(m-2j-1)}\right|\prod\limits_{j=1}^{2p+1}\left|Q_j^{(n-j-1)}\right|},\qquad n>4p+1,$$

підставляючи в яку нерівності (20), (21′), (22′) і (24′), одержимо

$$\left|f_n-\tilde f_{4p+1}\right|\le$$

$$\le\frac{1}{\operatorname{Re}b_{0,0}}\cdot\frac{1}{1-\cos\theta}\cdot\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^{4p+2}\left(\prod_{\ell=1}^{2p+2}\frac{1}{1+\mu'_{\ell+1}}+\prod_{\ell=1}^{2p+2}\frac{1}{1+\mu''_{\ell+1}}\right)+$$

$$+2\frac{1}{\operatorname{Re}b_{0,0}}\cdot\frac{1}{1-\cos\theta}\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^{3p+1}\prod_{j=1}^{p+1}\frac{1}{1+\mu_j}+$$

$$+\frac{1}{\operatorname{Re}b_{0,0}}\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^{2p+1}\prod_{j=1}^{2p}\frac{1}{1+\mu_j}.$$

Таким чином, за умов теореми (11)–(13) із фігурної збіжності ДНД (1) випливає звичайна збіжність ДНД (1) і збігаються вони до однієї границі, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = \lim\limits_{n\to\infty} \tilde{f}_n$.

Теорему доведено. ◊


1. *Антонова Т. М.* Про швидкість збіжності одного класу гіллястих ланцюгових дробів з комплексними елементами // Вісн. держ. ун-ту «Львів. політехніка». Прикл. математика. – 1998. – № 337. – С. 8–10.
2. *Антонова Т. М.* Швидкість збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // Волин. мат. вісн. – 1999. – Вип. 6. – С. 5–11.
3. *Антонова Т. М., Боднар Д. І.* Області збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // Теорія наближення функцій та її застосування: Праці Ін-ту математики НАН України. – 2000. – Вип. 31. – С. 19–32.
4. *Антонова Т. М., Сусь О. М.* Деякі достатні умови збіжності двовимірних неперервних дробів з дійсними елементами // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. – 2008. – Вип. 16. – С. 5–15.
5. *Антонова Т. М., Сусь О. М.* Про властивості деяких послідовностей наближень парного порядку для двовимірних неперервних дробів // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. – 2006. – Вип. 12–13. – С. 4–9.
6. *Боднар Д. И.* Ветвящиеся цепные дроби. – Киев: Наук. думка, 1986. – 176 с.
7. *Боднар Д. И., Кучминская Х. И.* О сходимости разложения функции двух переменных в соответствующую ветвящуюся цепную дробь // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1980. – Вып. 11. – С. 3–6.
8. *Боднар Д. І., Кучмінська Х. Й.* Аналог теореми Ван Флека для двовимірних неперервних дробів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – **42,** № 4. – С. 21–25.
9. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. – Москва: Мир, 1985. – 414 с.
10. *Кучмінська Х. Й., Сусь О. М., Возна С. М.* Апроксимативні властивості двовимірних неперервних дробів // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 1. – С. 30–44.
11. *Сусь О. М.* Про один із аналогів методу фундаментальних нерівностей для двовимірних неперервних дробів // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2007. – Вип. 5. – С. 71–76.
12. *Gragg W. B., Warner D. D.* Two constructive results in continued fractions // SIAM J. Numer. Anal. – 1983. – **20**, No. 3. – P. 1187–1197.
13. *Jensen J. L. W. V.* Bindrag til Kjaedebrökers Theorie. – Festsckrift till H. G.Zeuthen, 1909.
14. *Van Vlec E. B.* On the convergence of continued fractions with complex elements // Trans. Amer. Math. Soc. – 1901. – **2**. – C. 215–233.


### ОБ ОЦЕНКЕ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ДВУМЕРНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ДРОБЕЙ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

*Рассматриваются двумерные непрерывные дроби, элементы которых принадлежат угловой области правой полуплоскости. Установлены достаточные условия сходимости и фигурной сходимости. Получена оценка погрешности приближения.*

### ON TRUNCATION ERROR OF TWO-DIMENSIONAL CONTINUED FRACTIONS WITH COMPLEX ELEMENTS

*The paper deals with two-dimensional continued fractions whose elements are belonging to angular region of right half-plane. Sufficient conditions of the convergence and of the figured convergence for these two-dimensional continued fractions are established. Estimate of truncation error is obtained.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
28.07.08