УДК 517.946

М. Г. Хмельовський

ПЕРІОДИЧНА ЗАДАЧА ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Побудовано асимптотичне розвинення розв'язку періодичної задачі для сингулярно збуреного параболічного рівняння другого порядку.

Вступ. Сингулярно збуреним класичним задачам як для звичайних диференціальних рівнянь, так і для рівнянь у частинних похідних різних типів присвячена обширна література [7, 9].

Велика увага останнім часом приділяється вивченню нелокальних задач, що пов'язано з різноманітними практичними застосуваннями [5].

Очевидно, актуальним є вивчення нелокальних сингулярно збурених задач як мало досліджених. Ця публікація продовжує дослідження В. М. Цимбала та його учнів [10, 11].

1. Формулювання задачі. В області $D = \{(x,t) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le t \le T\}$ розглядаємо таку задачу:

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a(x,t)u = f(x,t)\,, \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(1,t), \qquad \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(1,t)}{\partial x}, \qquad 0 \le t \le T\,, \tag{2}$$

$$u(x,0) = 0, \qquad 0 \le x \le 1\,, \tag{3}$$

де $\varepsilon > 0$ – малий параметр.

Припустимо, що виконуються наступні умови:

1) функції $a(x,t)$ та $f(x,t)$, що входять в рівняння (1), є $N+1$ разів неперервно диференційовними за всіма своїми аргументами в області D, де N – порядок асимптотики (дивись нижче).

2) $a(x,t) \ge \alpha > 0$ в області D.

За цих умов, очевидно, існує єдиний класичний розв'язок задачі (1)–(3).

Метою роботи є побудова асимптотики цього розв'язку за малим параметром ε.

2. Побудова формальної асимптотики. Методом примежового шару [1, 2] побудуємо асимптотичне розвинення розв'язку задачі (1)–(3) за степенями ε.

Формальну асимптотику розв'язку задачі (1)–(3) шукаємо у вигляді

$$u(x,t) = \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i u_i(x,t) + \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i \Pi_i(x,\tau) + \varepsilon^{N+1} R_N(x,t)\,, \tag{4}$$

де N – натуральне число – порядок асимптотики; $u_i(x,t)$, $i = 0,\ldots,N$, – функції регулярної частини асимптотики; $\Pi_i(x,\tau)$, $i = 0,\ldots,N$, – функції примежового шару; $\varepsilon^{N+1} R_N(x,t)$ – залишковий член; $\tau = \dfrac{t}{\varepsilon}$ – параметр регуляризуючого перетворення.

Випишемо задачі, з яких визначаються функції, що входять у (4). Вони визначаються стандартно.

Функції регулярної частини асимптотики $u_i(x,t)$, $i = 0,\ldots,N$, є розв'язками задач

$$-\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + a(x,t)u_i = f_i(x,t), \qquad i = 0,\ldots,N\,, \tag{5}$$

ISSN 1810-3022. Прикл. проблеми мех. і мат. – 2008. – Вип. 6. – С. 111–114.

$$u_i(0,t) = u_i(1,t), \qquad \frac{\partial u_i(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u_i(1,t)}{\partial x}, \qquad i = 0,\ldots,N, \tag{6}$$

де $f_0(x,t) \equiv f(x,t)$, $f_i(x,t) \equiv \dfrac{\partial u_{i-1}}{\partial t}$, $i = 1,\ldots,N$.

Задачі (5), (6) є періодичними задачами для звичайного диференціального рівняння другого порядку (t входить як параметр).

Функції $u_i(x,t)$, $i = 0,\ldots,N$, отримуються рекурентно. Однозначна розв'язність задач (5), (6) за таких умов доведена у [3].

Функції примежового шару $\Pi_i(x,\tau)$, $i = 0,\ldots,N$, в околі $t = 0$ визначаємо як розв'язки таких задач:

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial x^2} + a(x,0)\Pi_i = \varphi_i(x,\tau),$$

$$i = 0,\ldots,N, \qquad (0 \le x \le 1)\times(0 \le \tau < \infty), \tag{7}$$

$$\Pi_i(0,\tau) = \Pi_i(1,\tau),$$

$$\frac{\partial \Pi_i(0,\tau)}{\partial x} = \frac{\partial \Pi_i(1,\tau)}{\partial x}, \qquad i = 0,\ldots,N, \qquad 0 \le \tau < \infty, \tag{8}$$

$$\Pi_i(x,0) = -u_i(x,0), \qquad i = 0,\ldots,N, \qquad 0 \le x \le 1, \tag{9}$$

$$\Pi_i(x,\tau) \to 0 \qquad \text{при} \qquad \tau \to \infty, \tag{10}$$

де

$$\varphi_0(x,\tau) \equiv 0, \qquad \varphi_i(x,\tau) = \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{j!}\frac{\partial^j a(x,0)}{\partial t^j}\tau^j \Pi_{i-j}(x,\tau), \qquad i = 1,\ldots,N.$$

Як бачимо, функції $\Pi_i(x,\tau)$, $i = 0,\ldots,N$, є розв'язками періодичних задач для параболічного рівняння другого порядку (7)–(9) і визначаються рекурентно. Умови (10) – це додаткові умови, що забезпечують примежовий характер функцій $\Pi_i(x,\tau)$, $i = 0,\ldots,N$.

Покажемо однозначну розв'язність задач (7)–(9), а також виконання умови (10).

Для $i = 0$ маємо однорідне рівняння (7_0) з умовами (8_0), (9_0). Будемо розв'язувати цю задачу методом Фур'є [6]. Розв'язок шукаємо у вигляді

$$\Pi_0(x,\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\lambda_k \tau} V_k(x), \tag{11}$$

де λ_k – характеристичні числа, а $V_k(x)$ – відповідні їм функції, які, очевидно, є розв'язками задач

$$V_k''(x) + [\lambda_k - a(x,0)]V_k(x) = 0,$$

$$V_k(0) = V_k(1), \qquad V_k'(0) = V_k'(1), \qquad k = 1,2,\ldots. \tag{12}$$

Покажемо, що λ_k, $k = 1,2,\ldots$, додатні. Для цього домноживши рівняння у (12) на $V_k(x)$ і проінтегрувавши результат у межах від 0 до 1, отримаємо

$$\lambda_k \int_0^1 V_k^2(x)\,dx = \int_0^1 a(x,0)V_k^2(x)\,dx - \int_0^1 V_k(x)V_k''(x)\,dx. \tag{13}$$

Інтегрування останнього доданку у (13) частинами з врахуванням граничних умов з (12), а також умови ***2***) дає $\lambda_k > 0$, $k = 1,2,\ldots$.

Повне обґрунтування методу Фур'є подано у [6]. Отже, знаходимо $\Pi_0(x,\tau)$ у вигляді (11), звідки, очевидно, автоматично виконується умова (10). Більше того, з (11) очевидне експоненціальне спадання функції $\Pi_0(x,\tau)$, тобто $\Pi_0(x,\tau)$ – функція експоненціального примежового шару.

Стосовно решти функцій $\Pi_i(x,\tau)$, $i = 1,\ldots,N$, то всі вони також можуть бути рекурентно отримані методом Фур'є як розв'язки аналогічних задач, але вже для неоднорідних рівнянь з правими частинами $\varphi_i(x,\tau)$, $i = 1,\ldots,N$, що експоненціально спадають при $\tau \to \infty$. Стандартними міркуваннями можна показати, що всі функції $\Pi_i(x,\tau)$, $i = 1,\ldots,N$, – функції експоненціального примежового шару.

3. Оцінка залишкового члена. Задача для залишкового члена асимптотики отримується стандартно [1, 2] підстановкою (4) у (1)–(3) з урахуванням співвідношень (5)–(10), що дає задачу, подібну до вихідної:

$$\varepsilon \frac{\partial R_N}{\partial t} - \frac{\partial^2 R_N}{\partial x^2} + a(x,t) R_N = \psi(x,t), \tag{14}$$

$$R_N(0,t) = R_N(1,t), \qquad \frac{\partial R_N(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial R_N(1,t)}{\partial x}, \qquad 0 \le t \le T, \tag{15}$$

$$R_N(x,0) = 0, \qquad 0 \le x \le 1, \tag{16}$$

де функція $\psi(x,t)$ легко може бути записана в явному вигляді та є обмеженою в області D в L_2-нормі.

Оцінку $R_N(x,t)$ отримаємо методом інтегралів енергії [4]. Для цього домножимо (14) на $2R_N$ і, зводячи до дивергентного вигляду, отримаємо

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon R_N^2\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(2\frac{\partial R_N}{\partial x} R_N\right) + 2\left(\frac{\partial R_N}{\partial x}\right)^2 + 2a(x,t)R_N^2 2\psi = (x,t)R_N. \tag{17}$$

Інтегруючи (17) по області D з використанням формули Ґаусса – Остроградського та умов (15), (16), після простих перетворень отримаємо

$$\alpha \iint\limits_D R_N^2 \, dx\, dt \le \iint\limits_D \psi(x,t) R_N \, dx\, dt. \tag{18}$$

Оцінимо праву частину (18) за допомогою нерівності Коші з параметром, вибираючи параметр так, щоб $\eta^2 < \alpha$:

$$\| R_N \|_{L_2(D)} \le C \| \psi \|_{L_2(D)},$$

де $C = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}\eta}$ і, очевидно, не залежить від малого параметра ε.

Результат роботи можна сформулювати у вигляді теореми.

Теорема. *Нехай виконуються умови* ***1***), ***2***). *Тоді розв'язок задачі* (1)–(3) *допускає асимптотичне розвинення* (4) *довільного порядку* N. *Функції регулярної частини асимптотики рекурентно визначаються із задач* (5), (6), *після чого функції примежового шару рекурентно визначаються як розв'язки задач* (7)–(9), *залишковий член має порядок* $O\left(\varepsilon^{N+1}\right)$ *у нормі* $L_2(D)$.

Отриманий результат дає наближений розв'язок вихідної задачі, а також може бути використаний для побудови ефективних обчислювальних алгоритмів розв'язку задачі (1)–(3).

Зауваження. Результат роботи анонсовано у [8].

1. *Васильева А. Б, Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. – Москва: Наука, 1973. – 272 с.
2. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. – 1957. – **12**, № 5. – С. 3–122.
3. *Колобов А. М.* О периодической краевой задаче для линейного дифференциального уравнения четвертого порядка // Дифференц. уравнения. – 1965. – **1**, № 6. – С. 758–763.
4. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. – Москва: Мир, 1964. – 832 с.
5. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – Київ: Наук. думка, 2002. – 416 с.
6. *Стеклов В. А.* Основные задачи математической физики. – Москва: Наука, 1983. – 432 с.
7. *Треногин В. А.* Развитие и приложение асимптотического метода Люстерника – Вишика // Успехи мат. наук. – 1970. – **25**, №. 4. – С. 123–156.
8. *Хмельовський М. Г.* Періодична задача для сингулярно збуреного періодичного рівняння другого порядку // Тези доп. конф. молодих учених з сучасних проблем механіки і математики ім. акад. Я. С. Підстригача. Львів, 24–27 травня 2005 р. – С. 325.
9. *Lions J.-L.* Perturbations singulières dans les problémes aux limites et en contrôle optimal // Lect. Notes Math. – 1973. – **323.** – 540 p.
10. *Tsymbal V., Flud V.* Pewne nielokalne zagadnienie dla silnie zaburzonego równania różniczkowego zwyczajnego // Zeszyty Nauk. Politechniki Opolskiej. Ser. Matematyka. – 2002. – **18**. – S. 27–35.
11. *Tsymbal V., Flud V.* O pewnym nielokalnym zagadnieniu dla równania różniczkowego zwyczajnego // Zeszyty Nauk. Politechniki Opolskiej. Ser. Matematyka. – 2002. – **18**. – S. 21–26.

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Построено асимптотическое разложение решения периодической задачи для сингулярно возмущенного параболического уравнения второго порядка.

PERIODIC PROBLEM FOR SINGULARLY PERTURBED PARABOLIC EQUATION OF THE SECOND ORDER

Asymptotic expansion of the solution to the singularly perturbed parabolic periodic problem of the second order equation is constructed.

Ін-т підприємництва та перспект. технол.,
Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано
15.10.08