УДК 517.95

Г. Р. Торган

НЕІСНУВАННЯ ГЛОБАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЗМІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТИПУ ЕЙДЕЛЬМАНА

Розглянуто змішану задачу для нелінійного рівняння типу Ейдельмана в обмеженій області. Одержано достатні умови існування локального узагальненого розв'язку та неіснування глобального розв'язку.

В узагальнених параболічних за Петровським системах [12] диференціюванню за різними просторовими змінними надають різну вагу порівняно з диференціюванням за змінною t. Такі рівняння називають $\overrightarrow{2b}$-параболічними або еволюційними рівняннями типу Ейдельмана. На цей час достатньо розроблено теорію розв'язності задачі Коші для лінійних систем цього типу [1–6, 8–11].

В останні десятиліття значний інтерес викликали дослідження задач для еволюційних рівнянь, розв'язки яких стають необмеженими у скінченний момент часу. Із великої кількості робіт цього напряму зазначимо лише деякі [13–15], у яких, зокрема, можна знайти достатньо повний огляд літератури з вказаного питання.

У цій роботі розглянуто нелінійне рівняння з першою похідною за часом, четвертими похідними за однією групою просторових змінних і другими похідними за другою групою просторових змінних в обмеженій області. Встановлено достатні умови існування узагальненого розв'язку змішаної задачі на часовому інтервалі, довжина якого залежить від початкових збурень і коефіцієнтів рівняння. Також доведено, що при певних умовах глобальний розв'язок задачі не існує.

Нехай Ω_x – обмежена область в просторі $\mathbb{R}^k$ з межею $\partial\Omega_x \in C^1$, Ω_y – обмежена область в просторі $\mathbb{R}^\ell$ з межею $\partial\Omega_y \in C^1$, $\Omega = \Omega_x \times \Omega_y$, $Q_T = \Omega \times (0,T)$, де $T < \infty$, $Q = \Omega \times (0,+\infty)$, $\Omega_\tau = Q_T \bigcap \{t = \tau\}$, $\tau \in [0,T]$, $k + \ell = n$, $x \in \Omega_x$, $y \in \Omega_y$, $z = (x,y)$.

В області Q розглянемо рівняння з дійснозначними коефіцієнтами та вільним членом:

$$u_t + \sum_{i,j,s,\ell=1}^{k} (a_{ij}^{s\ell}(z,t) u_{x_i x_j})_{x_s x_\ell} - \sum_{i=1}^{n} (a_i(z,t) |u_{z_i}|^{p-2} u_{z_i})_{z_i} + \sum_{i=1}^{k} b_i(z,t) u_{x_i} + \sum_{i=1}^{\ell} b_i^0(z,t) u_{y_i} + b(z,t)u - g(z,t)|u|^{q-2} u = f(z,t) \tag{1}$$

з початковою умовою

$$u(z,0) = u_0(z), \qquad z \in \Omega, \tag{2}$$

і крайовими умовами

$$u|_S = 0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega_x \times \Omega_y \times (0,+\infty)} = 0, \tag{3}$$

де ν – зовнішня нормаль до поверхні $\partial\Omega_x \times \Omega_y \times (0,+\infty)$.

Введемо простори

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \left(\int_\Omega |u|^p \, dz \right)^{1/p} < \infty \right\}, \qquad 1 < p < \infty,$$

ISSN 1810-3022. Прикл. проблеми мех. і мат. – 2008. – Вип. 6. – С. 98–103.

$$W_0^{1,q}(\Omega) = \{u : u_{z_i} \in L^q(\Omega),\ i \in \{1,\dots,n\},\ u|_{\partial\Omega} = 0\}, \qquad 1 < q < \infty,$$

$$H_0^2(\Omega_x) = \left\{u : u_{x_i x_j} \in L^2(\Omega_x),\ i, j \in \{1,\dots,k\},\ u|_{\partial\Omega} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega_x \times \Omega_y} = 0\right\}$$

з відповідними нормами

$$\|u\|^p_{L^p(\Omega)} = \int_\Omega |u|^p\,dz, \qquad \|u\|^q_{W_0^{1,q}(\Omega)} = \int_\Omega \sum_{i=1}^n |u_{z_i}|^q\,dz,$$

$$\|u\|^2_{H_0^2(\Omega_x)} = \int_{\Omega_x} \sum_{i,j=1}^k |u_{x_i x_j}|^2\,dx.$$

Припустимо виконання наступних умов:

(A) $a_{ij}^{s\ell},\ a_{ijt}^{s\ell},\ a_m,\ a_{mt} \in L^\infty(Q)$, $\quad D_x^\beta a_{ij}^{s\ell}(z,0),\ D_z^\gamma a_m(z,0) \in L^\infty(\Omega)$,

$i, j \in \{1,\dots,k\}, \qquad m \in \{1,\dots,n\}$,

де $D_x^\beta u = \dfrac{\partial^{|\beta|}u}{\partial^{\beta_1}x_1 \dots \partial^{\beta_k}x_k}$, $\quad |\beta| = \beta_1 + \dots + \beta_k$, $\quad |\beta| \le 2$, $\quad |\gamma| \le 1$, $\quad a_i(z,t) \ge A_1 > 0$ майже всюди в Q,

$$\sum_{i,j,s,\ell=1}^k a_{ij}^{s\ell}(z,t)\xi_{ij}\xi_{s\ell} \ge A_2 \sum_{i,j=1}^k |\xi_{ij}|^2, \qquad A_2 > 0,$$

для майже всіх $(z,t) \in Q$ і всіх $\xi_{ij} \in \mathbb{R}$ таких, що $\xi_{ij} = \xi_{ji}$,

$$a_{ij}^{s\ell}(z,t) = a_{s\ell}^{ij}(z,t)$$

майже для всіх $(z,t) \in Q$ і всіх $i,\ j,\ s,\ \ell \in \{1,\dots,k\}$;

(B) $b_i,\ b_{it},\ b_{ix_i},\ b_j^0,\ b_{jt}^0,\ b_{jy_j}^0,\ b,\ b_t \in L^\infty(Q)$,

$b_{ix_i}(z,0),\ b_{jy_j}^0(z,0) \in L^\infty(\Omega),\ i \in \{1,\dots,k\},\ j \in \{1,\dots,\ell\}$, $\ b(z,t) \ge B_0 > 0$

для майже всіх $(z,t) \in Q$;

(G) $g,\ g_t \in L^\infty(Q_T)$, $\quad g(z,t) \le g_0$, $\quad g_0 > 0$,

майже всюди в Q.

Означення. Функцію $u \in L^2((0,T_1)\times\Omega_y; H_0^2(\Omega_x)) \cap L^q(Q_{T_1}) \cap L^p((0,T_1); W_0^{1,p}(\Omega))$ таку, що $u_t \in L^\infty((0,T_1); L^2(\Omega)) \cap L^2((0,T_1)\times\Omega_y; H_0^2(\Omega_x))$, $|u_{z_i}|^{p-2}|u_{tz_i}|^2 \in L^1(Q_{T_1})$, $i \in \{1,\dots,n\}$, $\forall T_1 \in (0,T)$, називаємо *узагальненим розв'язком* задачі (1)–(3) в області Q_T, якщо вона задовольняє початкову умову (2) та інтегральну рівність

$$\int_{\Omega_t}\Bigg[u_t v + \sum_{i,j,s,\ell=1}^k a_{ij}^{s\ell}(z,t)\,u_{x_i x_j} v_{x_s x_\ell} + \sum_{i=1}^k b_i(z,t)\,u_{x_i} v + \sum_{i=1}^{\ell} b_i^0(z,t)\,u_{y_i} v + b(z,t)\,uv + \sum_{i=1}^n a_i(z,t)|u_{z_i}|^{p-2}u_{z_i}v_{z_i} - g(z,t)|u|^{q-2}uv\Bigg]dz = \int_{\Omega_t} f(z,t)\,v\,dz \tag{4}$$

для майже всіх $t \in (0,T)$ і для довільних $v \in L^2(\Omega_y; H_0^2(\Omega_x)) \cap W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^q(\Omega)$. Якщо $T = +\infty$, то розв'язок назвемо *глобальним*.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* **(A)**, **(B)**, **(G)**, $u_0 \in L^{2(q-1)}(\Omega) \cap L^2(\Omega_y; H_0^2(\Omega_x) \cap H^4(\Omega_x)) \cap W_0^{1,2(p-1)}(\Omega)$, $\left|u_{0z_i}\right|^{p-2} u_{0z_i} \in H^1(\Omega)$ *для всіх* $i \in \{1,\dots,n\}$, $2 < p < q \le \dfrac{2n+2}{n}$ *при* $n > 2$ *і* $2 < p < q$ *при* $n \in \{1,2\}$, $n \le \dfrac{pq}{q-p}$, f, $f_t \in L^2(Q_{\tau_0})$ *для довільного* $\tau_0 > 0$. *Тоді знайдеться таке* $T > 0$, *що в області* Q_T *існує узагальнений розв'язок задачі* (1)–(3), *причому число* T *залежить від коефіцієнтів, вільного члена і початкової умови задачі.*

Доведення теореми 1 базується на використанні методу Гальоркіна та методів компактності і монотонності [7, с. 167]. ◊

Розглянемо випадок задачі (1)–(3), коли коефіцієнти рівняння (1) залежать тільки від просторових змінних $z \in \Omega$, а вільний член має вигляд $f(z,t) \equiv 0$ і $b_i(z,t) = 0$, $b_j^0(z,t) = 0$ майже для всіх $(z,t) \in Q$ та для всіх $i \in \{1,\dots,k\}$, $j \in \{1,\dots,\ell\}$.

Введемо позначення

$$E(t) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_t}\left[\sum_{i,j,s,\ell=1}^{k} a_{ij}^{s\ell}(z) u_{x_i x_j} u_{x_s x_\ell} + b(z)u^2\right]dz + {} \\ + \int\limits_{\Omega_t}\left[\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} a_i(z)\left|u_{z_i}\right|^p - \frac{1}{q} g(z)|u|^q\right]dz. \tag{5}$$

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* **(A)**, **(B)**, **(G)**, $u_0 \in L^{2(q-1)}(\Omega) \cap L^2(\Omega_y; H_0^2(\Omega_x) \cap H^4(\Omega_x)) \cap W_0^{1,2(p-1)}(\Omega)$, $\left|u_{0z_i}\right|^{p-2} u_{0z_i} \in H^1(\Omega)$ *для всіх* $i \in \{1,\dots,n\}$. *Тоді, якщо* $2 < p < q$, $n \le \dfrac{pq}{q-p}$ *і* $E(0) = -\lambda < 0$, *то не існує глобального розв'язку задачі* (1)–(3).

Доведення. Припустимо, що u – глобальний розв'язок задачі (1)–(3). Спочатку доведемо, що $E(t) < 0$ для всіх $t > 0$, для яких визначений розв'язок задачі (1), (2), (3).

Продиференціюємо (5) за t:

$$E'(t) = \int\limits_{\Omega_t}\left[\sum_{i,j,s,\ell=1}^{k} a_{ij}^{s\ell}(z) u_{tx_i x_j} u_{x_s x_\ell} + b(z)uu_t + {} \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{n} a_i(z)\left|u_{z_i}\right|^{p-2} u_{z_i} u_{tz_i} - g(z)|u|^{q-2} uu_t\right]dz.$$

Але з рівності (4) при $v = u_t$ маємо

$$\int\limits_{\Omega_t}\left[|u_t|^2 + \sum_{i,j,s,\ell=1}^{k} a_{ij}^{s\ell}(z) u_{tx_i x_j} u_{x_s x_\ell} + b(z)uu_t + {} \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{n} a_i(z)\left|u_{z_i}\right|^{p-2} u_{z_i} u_{tz_i} - g(z)|u|^{q-2} uu_t\right]dz = 0.$$

Тому $E'(t) = -\int\limits_{\Omega_t} |u_t|^2\,dz$. З останньої оцінки випливає, що $E'(t) \le 0$. Отже, $E(t) < 0$.

Введемо

$$H(t) = -E(t), \qquad L(t) = H^{1-\alpha}(t) + \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{\Omega_t} |u|^2\,dz, \quad 0 < \alpha < 1, \quad \varepsilon > 0.$$

Тоді

$$L'(t) = (1-\alpha)H^{-\alpha}(t)H'(t) + \varepsilon\int\limits_{\Omega_t} uu_t\, dz\,.$$

Оскільки справджується рівність (4) з $v = u$:

$$\int\limits_{\Omega_t}\Bigg[u_t u + \sum_{i,j,s,\ell=1}^{k} a_{ij}^{s\ell}(z)u_{x_ix_j}u_{x_sx_\ell} + \\ + \sum_{i=1}^{n} a_i(z)\left|u_{z_i}\right|^p + b(z)|u|^2 - g(z)|u|^q\Bigg]dz = 0\,,$$

то для довільного $\beta > 2$ одержимо

$$L'(t) = (1-\alpha)H^{-\alpha}(t)H'(t) - \varepsilon\int\limits_{\Omega_t}\Bigg[\sum_{i,j,s,\ell=1}^{k} a_{ij}^{s\ell}(z)u_{x_ix_j}u_{x_sx\ell} + \\ + \sum_{i=1}^{n} a_i(z)\left|u_{z_i}\right|^p + b(z)|u|^2 - g(z)|u|^q\Bigg]dz = (1-\alpha)H^{-\alpha}(t)H'(t) - \\ - \varepsilon\int\limits_{\Omega_t}\Bigg[\sum_{i,j,s,\ell=1}^{k} a_{ij}^{s\ell}(z)u_{x_ix_j}u_{x_sx_\ell} + \sum_{i=1}^{n} a_i(z)\left|u_{z_i}\right|^p + b(z)|u|^2 - g(z)|u|^q\Bigg]dz + \\ + \varepsilon\beta H(t) + \frac{\varepsilon\beta}{2}\int\limits_{\Omega_t}\Bigg[\sum_{i,j,s,\ell=1}^{k} a_{ij}^{s\ell}(z)u_{x_ix_j}u_{x_sx\ell} + b(z)|u|^2\Bigg]dz + \\ + \varepsilon\beta\int\limits_{\Omega_t}\Bigg[\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} a_i(z)\left|u_{z_i}\right|^p - \frac{1}{q}g(z)|u|^q\Bigg]dz = (1-\alpha)H^{-\alpha}(t)H'(t) + \varepsilon\beta H(t) + \\ + \varepsilon\left(\frac{\beta}{2}-1\right)\int\limits_{\Omega_t} b(z)|u|^2\,dz + \varepsilon\left(\frac{\beta}{2}-1\right)\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i,j,s,\ell=1}^{n} a_{ij}^{s\ell}(z)u_{x_ix_j}u_{x_sx\ell}dz + \\ + \varepsilon\left(\frac{\beta}{p}-1\right)\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n} a_i(z)\left|u_{z_i}\right|^p dz + \varepsilon\left(1-\frac{\beta}{q}\right)\int\limits_{\Omega_t} g(z)|u|^q\,dz\,.$$

Враховуючи умови **(A)**, **(B)**, **(G)**, при $p < \beta < q$ маємо

$$L'(t) \ge (1-\alpha)H^{-\alpha}(t)H'(t) + \varepsilon\beta H(t) + \varepsilon\left(\frac{\beta}{2}-1\right)B_0\int\limits_{\Omega_t}|u|^2\,dz + \\ + \varepsilon\left(\frac{\beta}{2}-1\right)A_2\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i,j=1}^{k}\left|u_{x_ix_j}\right|^2 dz + \varepsilon\left(\frac{\beta}{p}-1\right)A_1\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n}\left|u_{z_i}\right|^p dz + \\ + \varepsilon\left(1-\frac{\beta}{q}\right)g_0\int\limits_{\Omega_t}|u|^q\,dz \ge M_1\varepsilon\left[H(t) + \int\limits_{\Omega_t}\left[|u|^q + \sum_{i=1}^{n}\left|u_{z_i}\right|^p\right]dz\right].$$

Розглянемо

$$[L(t)]^{1/(1-\alpha)} \le 2^{1/(1-\alpha)}\left[H(t) + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1/(1-\alpha)}\left|\int\limits_{\Omega_t}|u|^2\,dz\right|^{1/(1-\alpha)}\right].$$

Оцінимо доданки останньої нерівності:

$$\left(\int\limits_{\Omega_t}|u|^2\,dz\right)^{1/(1-\alpha)} \le (\operatorname{mes}\Omega)^{(q-2)/(q(1-\alpha))}\left(\int\limits_{\Omega_t}|u|^q\,dz\right)^{2/(q(1-\alpha))}.$$

Нехай $\alpha \in \left[\frac{p-2}{p}, \frac{q-2}{q}\right]$. Припустимо, що $\int\limits_{\Omega_t} |u|^q dz \ge 1$. Тоді

$$\left(\int\limits_{\Omega_t} |u|^q\, dz\right)^{\gamma/q} \le \int\limits_{\Omega_t} |u|^q\, dz, \qquad \gamma = \frac{2}{1-\alpha},$$

оскільки $\gamma \in [p, q]$.

Якщо $\int\limits_{\Omega_t} |u|^q dz < 1$, то, враховуючи теорему про вкладення Соболєва, при $\frac{n-p}{np} \le \frac{1}{q}$ одержимо

$$\left(\int\limits_{\Omega_t} |u|^q\, dz\right)^{\gamma/q} \le \left(\int\limits_{\Omega_t} |u|^q\, dz\right)^{p/q} \le M_2 \int\limits_{\Omega_t} \sum_{i=1}^{n} |u_{z_i}|^p dz.$$

Отже,

$$\left(\int\limits_{\Omega_t} |u|^2\, dz\right)^{1/(1-\alpha)} \le M_3 \int\limits_{\Omega_t} \left[|u|^q + \sum_{i=1}^{n} |u_{z_i}|^p\right] dz$$

і

$$[L(t)]^{1/(1-\alpha)} \le M_4 \left(H(t) + \int\limits_{\Omega_t} \left[\sum_{i=1}^{n} |u_{z_i}|^p + |u|^q\right] dz\right).$$

Нехай $E(0) = -\lambda$, $H(0) = \lambda$, $H'(t) \ge 0$, тоді $H(t) \ge \lambda$. Зменшивши при потребі ε, можемо вважати, що

$$L(0) = H^{1-\alpha}(0) + \frac{\varepsilon}{2} \int\limits_{\Omega_t} |u_0|^2\, dz \ge \frac{\lambda}{2},$$

тоді

$$L'(t) \ge M_5 [L(t)]^{1/(1-\alpha)}. \tag{6}$$

Позначимо $\gamma_0 = \frac{1}{1-\alpha}$, $\gamma_0 > 1$. Проінтегруємо обидві частини нерівності (6) від 0 до t:

$$L^{\gamma_0 - 1}(t) \ge \frac{1}{L^{1-\gamma_0}(0) - M_5(\gamma_0 - 1)t}.$$

Отже, існує таке скінченне $T_0 > 0$, для якого $\lim\limits_{t \to T_0 - 0} L(t) = +\infty$, тому

$$\lim_{t \to T_0 - 0} H(t) = +\infty \qquad \text{або} \qquad \lim_{t \to T_0 - 0} \int\limits_{Q_t} |u|^q\, dz = +\infty.$$

Одержана суперечність завершує доведення теореми 2. ◊

Наслідок. *Нехай виконуються умови теореми* 2 *і* u − *узагальнений розв'язок задачі* (1)–(3). *Тоді існує таке* $\lambda > 0$, *що*

$$\lim_{t \to T - 0} \int\limits_{Q_t} |u|^q\, dz = +\infty,$$

де $0 < T < +\infty$.

1. *Балабушенко Т. М., Івасишен С. Д.* Про властивості розв'язків $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем у необмежених за часовою змінною областях // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – **45**, № 4. – С. 19–26.
2. *Березан Л. П.* Деякі властивості фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2000. – Вип. 76. – С. 5–10.
3. *Березан Л. П., Івасишен С. Д.* Фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Доп. НАН України. – 1998. – № 12. – С. 7–12.
4. *Ивасишен С. Д., Эйдельман С. Д.* $\overrightarrow{2b}$-параболические системы // Тр. семинара по функц. анализу. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1968. – Вып. 1. – С. 3–175, 271–273.
5. *Івасишен С. Д., Пасічник Г. С.* Про задачу Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем зі зростаючими коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 11. – С. 1484–1496.
6. *Івасишен С. Д., Пасічник Г. С.* Про фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші для дисипативних $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Доп. НАН України. – 1999. – № 6. – С. 18–22.
7. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – Москва: Мир, 1972. – 588 с.
8. *Мартыненко М. Д., Бойко Л. Ф.* $\overrightarrow{2b}$-параболические граничные задачи // Дифференц. уравнения. – 1978. – **14**, № 12. – С. 2212–2222.
9. *Матійчук М. І.* Параболічні сингулярні крайові задачі. – Київ: Ін-тут математики НАН України, 1999. –176 с.
10. *Пасічник Г. С.* Про розв'язність задачі Коші для деяких $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем зі зростаючими коефіцієнтами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – **42,** № 3. – С. 61–65.
11. *Эйдельман С. Д.* Об одном классе параболических систем // Докл. АН СССР. – 1960. – **133**, № 1. – С. 40–43.
12. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. – Москва: Наука, 1964. – 443 с.
13. *Galaktionov V. A., Shishkov A. E.* Boundary blow-up localization for higher-order quasilinear parabolic equations: Hamilton-Jacobi asymptotics // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. – 2003. – **133A**. – P. 1075–1119.
14. *Shishkov A. E., Galaktionov V. A.* Structure of boundary blow-up for higher order quasilinear parabolic PDE // Proc. Roy. Soc. London. – 2004. – **460**. – P. 3299–3325.
15. *Shishkov A. E., Galaktionov V. A.* Self-similar boundary blow-up for higher-order quasilinear parabolic equations // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. – 2005. – **135A**. – P. 1195–1227.

НЕСУЩЕСТВОВАНИЕ ГЛОБАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА ЭЙДЕЛЬМАНА

Рассмотрена смешанная задача для нелинейного уравнения типа Эйдельмана в ограниченной области. Получены достаточные условия существования локального обобщенного решения и несуществование глобального решения.

NON-EXISTENCE OF A GLOBAL SOLUTION OF THE INITIAL BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR EILDELMAN TYPE EQUATION

The paper deals with the initial boundary-value problem for the nonlinear Eidelman type equation in a bounded domain. Sufficient conditions of the existence of a local generalized solution and the non-existence of a global solution were obtained.

Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів

Одержано
31.10.08