УДК 512.553.2

Р. М. Олійник

ПРО СПЕЦІАЛЬНІ КВАЗІ-ФІЛЬТРИ В МУЛЬТИПЛІКАТИВНОМУ МОНОЇДІ НАТУРАЛЬНИХ ЧИСЕЛ

Вводяться поняття σ-скруту в категорії S-полігонів над моноїдом S та відповідного йому σ-квазі-фільтра в моноїді S. Описано ріссові конґруенції на моноїді натуральних чисел з операцією множення. На основі цього опису побудовано деякі класи σ-квазі-фільтрів в моноїді $(\mathbb{N},\cdot)$. Основні результати статті містяться в теоремах 2, 3 і 4.

1. Вступ. Категорія S-полігонів багато в чому подібна до категорії R-модулів. Природно, що й частина результатів, які стосуються цих категорій, також мають певну аналогію. У 1983 році J. K. Luedeman [6] увів до розгляду основні поняття, пов'язані зі скрутами в категорії S-полігонів, за аналогією з існуючою теорією скрутів у категорії R-модулів. У даний час теорія скрутів для S-полігонів стрімко розвивається, про що свідчать хоча би публікації [8–10] та монографія [5].

У цій статті означені σ-квазі-фільтри конґруенцій в моноїді S, які є аналогами S-фільтрів ідеалів кільця R, які розглядались у статті [1]. У роботах [9, 10] досліджувались квазі-фільтри правих конґруенцій, які тісно пов'язані зі скрутами. Ці фільтри будемо називати квазі-фільтрами, щоб узгодити термінологію. Відмінністю між квазі-фільтром і радикальним фільтром [2] є те, що квазі-фільтри складаються з конґруенцій із певними властивостями, а радикальні фільтри – з ідеалів.

У пункті **3** описано всі ліві ріссові конґруенції на моноїді натуральних чисел стосовно множення (лема 5).

У пункті **4** описано два типи неріссових конґруенцій на моноїді натуральних чисел стосовно множення. Перший з цих типів можна знайти у монографії [3], але стосовно операції додавання. Для цих двох типів конґруенцій побудовано σ-фільтри та описано їх структуру (теореми 2, 3 і 4).

Означення, які не наведені у статті, можна знайти у монографіях [2–5].

2. Термінологія та попередні відомості. Надалі, якщо не сказано протилежне, літера S позначатиме фіксований моноїд.

Поняття S-полігона (полігона над моноїдом) відносно нове. Перед тим, як появився термін S-полігона, зі схожими структурами працювали раніше в теорії перетворень і в дослідженнях з теорії груп такі математики, як П. Руфіні, А. Келі, С. Лі, А. Сушкевич і т. д.

Введемо означення, необхідні для формулювання результатів.

Означення 1. Нехай S – моноїд і $A \neq \varnothing$ – множина. Назвемо множину A *лівим полігоном* над S, якщо задано таке відображення $\mu : S \times A \to \to A$, $(s,a) \to sa = \mu(s,a)$, що виконуються умови:

1) $1a = a$;

2) $(st)a = s(ta)$ для всіх $a \in A$, $s,t \in S$.

Називатимемо μ множенням зліва елементів з S на елементи з A. Аналогічно визначається правий S-полігон A і в позначеннях це відображається так: A_S – правий, ${}_SA$ – лівий полігони. Вживаємо скорочений термін S-полігон, якщо відомо, яку операцію вибрано на ньому.

Зауважимо, що замість терміну S-полігон іноді вживається один із наступних: S-множина, S-операнда, S-дія, S-система, S-автомат і т. д.

Означення 2. Нехай ${}_SA$ та ${}_SB$ – ліві S-полігони. Відображення $f : {}_SA \to_S B$ називається *гомоморфізмом S-полігонів* A та B, якщо для будь-яких $s \in S$ та $a \in A$ виконується рівність $f(sa) = sf(a)$. Категорію лівих S-полігонів та їх гомоморфізмів будемо позначати $S - Act$.

Означення 3. Нехай ρ – відношення еквівалентності на S-полігоні A. Тоді ρ називається *лівою конґруенцією на* A, якщо з умови $a\rho b$ випливає $sa\rho sb$ для всіх $s \in S$. Аналогічно визначається права конґруенція.

Розглянемо деякі операції над конґруенціями:

1) Нехай ρ, τ – ліві конґруенції на моноїді S. Тоді $\rho \wedge \tau = \{(a,b) | (a,b) \in \rho, (a,b) \in \tau\}$ – ліва конґруенція на моноїді S.

2) Нехай ρ, τ – ліві конґруенції на моноїді S. Тоді $\rho \vee \tau$ – найменша конґруенція на моноїді S, яка містить конґруенції ρ та τ.

Множину всіх конґруенцій на S позначимо через $Con(S)$. Ця множина насправді є ґраткою стосовно об'єднання і перетину конґруенцій [7]. Найменшу конґруенцію позначимо через Δ, де $\Delta = \{(a,b) \in S \times S \mid a = b\}$, найбільшу конґруенцію – через 1_S, де $1_S = S \times S$.

Для довільної лівої конґруенції ρ на A і для будь-якого елемента $m \in A$ означимо множину

$$(\rho : m) = \{(a,b) \in S \times S | (am, bm) \in \rho\}.$$

Відомо, що $(\rho : m)$ є лівою конґруенцією на S.

Лема 1. *Нехай* I *– лівий ідеал моноїда* S. *Тоді* $\Delta \bigcup (I \times I)$ *– ліва конґруенція моноїда* S.

Доведення. Нехай $\rho = \Delta \bigcup (I \times I)$, $(a,b) \in \rho$ тоді й тільки тоді, коли $a, b \in I$ або $a = b$. Перевіримо, що ρ є відношенням еквівалентності на моноїді S. За побудовою ρ – рефлексивне. Покажемо, що відношення ρ – симетричне. Нехай $(a,b) \in \rho$. Оскільки I – ідеал, то $(b,a) \in \rho$. Транзитивність: нехай $(a,b) \in \rho$ та $(b,c) \in \rho$. Це означає, що $a, b, c \in I$. Звідси отримуємо, що $(a,c) \in \rho$. Покажемо, що для будь-яких пар $(a,b) \in \rho$ та елементів $s \in S$ виконується $(sa, sb) \in \rho$. Оскільки $a, b \in I$, то за означенням ідеалу $sa, sb \in I$. Лему доведено. ◊

Конґруенції, побудовані за допомогою ідеалу, як у лемі 1, називають конґруенціями Рісса і позначають ρ_I.

Лема 2. *Нехай* I_1, I_2 *– ліві ідеали моноїда* S, $\rho = \Delta \bigcup (I_1 \times I_1)$ *та* $\tau = \Delta \bigcup (I_2 \times I_2)$ *– ліві конґруенції на* S. *Тоді* $\rho \wedge \tau = \Delta \bigcup ((I_1 \bigcap I_2) \times (I_1 \bigcap I_2))$ *та* $\rho \vee \tau = \Delta \bigcup ((I_1 \bigcup I_2) \times (I_1 \bigcup I_2))$.

Доведення випливає з леми 1. ◊

Означення 4 **[7].** *Теорією скруту* τ в категорії лівих S-полігонів $S - Act$ називаємо впорядковану пару $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{F})$ класів S-полігонів з такими властивостями:

1) $Hom_S(T, F) = \varnothing$ для всіх $T \in \boldsymbol{T}$ і $F \in \boldsymbol{F}$;

2) якщо $Hom_S(T, F) = \varnothing$ для всіх $F \in \boldsymbol{F}$, тоді $T \in \boldsymbol{T}$;

3) якщо $Hom_S(T, F) = \varnothing$ для всіх $T \in \boldsymbol{T}$, тоді $F \in \boldsymbol{F}$.

Тоді S-полігони з класу $\boldsymbol{T}$ називаються *періодичними полігонами* та з класу $\boldsymbol{F}$ називають *напівпростими*. Класи $\boldsymbol{T}$ та $\boldsymbol{F}$ називаються періодичними та напівпростими відповідно. Теорія скруту τ називається *спадковою*, якщо клас $\boldsymbol{T}$ є замкнений стосовно підполігонів. Спадкову теорію скруту τ називаємо *скрутом.*

Означення 5. Конґруенція ρ на S-полігоні A називається τ-*щільною*, якщо $A/\rho \in \boldsymbol{T}_\tau$. Позначимо множину всіх τ-щільних конґруенцій на A через $\mathbb{C}_\tau[A]$.

Означення 6. *Квазі-напередфільтром моноїда* S називають підмножину E в $Con(S)$, яка задовольняє умови:

1) якщо $\rho \in E$ і $\rho \subseteq \tau \in Con(S)$, то $\tau \in E$;

2) з умови $\rho \in E$ випливає $(\rho : s) \in E$ для всіх $s \in S$.

Якщо, крім цих умов, виконується умова

3) якщо $\rho \in E$ і $\tau \in Con(S)$ таке, що $(\tau : s)$, $(\tau : t)$ належать до E для всіх $(s,t) \in \rho$, то $\tau \in E$,

тоді E називають *квазі-фільтром*. Квазі-напередфільтри утворюють ґратку стосовно очевидних операцій об'єднання і перетину.

Зв'язок між скрутами в категорії S-полігонів та квазі-фільтрами моноїда S встановлює наступна

Теорема 1 [9]. *Нехай* S − S*-полігон та* τ − *теорія скруту над* S. *Тоді*:

(***i***) *якщо* τ *є спадковою теорією скруту*, то $\mathbb{C}_\tau$ *є квазі-фільтром лівих конґруенцій визначених на моноїді* S;

(***ii***) *якщо* E *є квазі-фільтром, то існує така спадкова теорія скруту* τ, *що* $E = \mathbb{C}_\tau$.

3. Опис ґратки ідеалів у моноїді $(\mathbb{N},\cdot)$**.** Надалі розглядаємо моноїд натуральних чисел стосовно множення, який будемо позначати через $(\mathbb{N},\cdot)$.

Для зручності посилань виділимо у вигляді леми добре відомий факт про головні ідеали цього моноїда, який є прямим наслідком основної теореми арифметики.

Лема 3. *Нехай* n − *натуральне число. Тоді довільний лівий головний ідеал вигляду* $n\mathbb{N}$ *можна записати як перетин головних лівих ідеалів, тобто* $n\mathbb{N} = p_1^{n_1}\mathbb{N} \cap p_2^{n_2}\mathbb{N} \cap \ldots \cap p_k^{n_k}\mathbb{N}$, *де* p_i − *прості числа,* n_i − *їх степені, та* $n = p_1^{n_1}\mathbb{N} \cdot p_2^{n_2}\mathbb{N} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}\mathbb{N}$, *де* $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$.

В подальшому без додаткових посилань використовуватимемо різні очевидні наслідки леми 3. Наприклад, якщо A, B, C − ліві головні ідеали в моноїді $(\mathbb{N},\cdot)$, то виконується

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C). \tag{1}$$

Аналогічно, якщо p, q − прості числа, то $p^n\mathbb{N}$ та $q^m\mathbb{N}$ − головні ліві ідеали в $(\mathbb{N},\cdot)$. Тоді $p^n\mathbb{N} \cap q^m\mathbb{N} \neq \varnothing$ та

$$p^n\mathbb{N} \cap q^m\mathbb{N} = \begin{cases} p^n \cdot q^m\mathbb{N}, & p \neq q, \\ p^t\mathbb{N}, & p = q, \end{cases} \qquad t = \max\{n, m\}.$$

Лема 4. *Довільний лівий ідеал* I *моноїда* $(\mathbb{N},\cdot)$ *є об'єднанням послідовності головних лівих ідеалів, твірні яких утворюють монотонно зростаючий ланцюг натуральних чисел.*

Д о в е д е н н я. Нехай $I \neq \varnothing$ та $I \neq \mathbb{N}$. Тоді існує $n_0 \in I$ таке, що n_0 − найменше натуральне число в ідеалі I. Легко бачити, що $n_0\mathbb{N} \in I$. Якщо $I \setminus n_0\mathbb{N} = I_1 \neq \varnothing$, тоді існує $n_1 \in I$, яке є найменшим натуральним числом в

I_1 та $n_0 < n_1$. Аналогічно отримуємо, що $I = n_0\mathbb{N} \cup n_1\mathbb{N} \cup n_2\mathbb{N} \cup \ldots$ та $n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$. Цей процес аналогічний до «решета Ератосфена». Відмінність: тут замість простих чисел беремо натуральні. Лему доведено. ◊

Якщо ідеал $I = p_0^{n_0}\mathbb{N} \cup p_1^{n_1}\mathbb{N} \cup p_2^{n_2}\mathbb{N} \cup \ldots$, де p_i – прості числа, n_i – їх степені та $p_1 < p_2 < p_3 < \ldots$, тоді його позначимо I_p. Під індексом розуміємо послідовність $(p_0^{n_0}, p_1^{n_1}, p_2^{n_2}, \ldots)$. Множину всіх таких індексів будемо позначати $\bar{P}$. Нехай $P \subseteq \bar{P}$. Зрозуміло, що кожній підмножині P відповідає певний ідеал і, навпаки, для кожного ідеалу існує підмножина P.

Лема 5. *Нехай $P \subseteq \bar{P}$, де $\bar{P}$ – множина всіх послідовностей степенів простих чисел та I – довільний лівий ідеал моноїда $(\mathbb{N}, \cdot)$. Тоді $I = \bigcap\limits_{P} I_p$.*

Доведення. Нехай $I \neq \varnothing$ та $I \neq \mathbb{N}$. Тоді за лемою 4: $I = n_0\mathbb{N} \cup n_1\mathbb{N} \cup \cup n_2\mathbb{N} \cup \ldots$, де $n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$, та за лемою 3: $n_i\mathbb{N} = p_{1i}^{n_1}\mathbb{N} \cap p_{2i}^{n_2}\mathbb{N} \cap \ldots \ldots \cap p_{ki}^{n_k}\mathbb{N}$, де $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тоді $I = (p_{10}^{n_{10}}\mathbb{N} \cap p_{20}^{n_{20}}\mathbb{N} \cap \ldots \cap p_{k0}^{n_{k0}}\mathbb{N}) \cup (p_{11}^{n_{11}}\mathbb{N} \cap \cap p_{21}^{n_{21}}\mathbb{N} \cap \ldots \cap p_{s1}^{n_{s1}}\mathbb{N}) \cup \ldots$. За формулою (1) запишемо

$$I = (p_{10}^{n_{10}}\mathbb{N} \cup (p_{11}^{n_{11}}\mathbb{N} \cap p_{21}^{n_{21}}\mathbb{N} \cap \ldots \cap p_{s1}^{n_{s1}}\mathbb{N})) \cap$$

$$\cap (p_{20}^{n_{20}}\mathbb{N} \cup (p_{11}^{n_{11}}\mathbb{N} \cap p_{21}^{n_{21}}\mathbb{N} \cap \ldots \cap p_{s1}^{n_{s1}}\mathbb{N}) \cap$$

$$\cap \ldots \cap (p_{k0}^{n_{k0}}\mathbb{N} \cup (p_{11}^{n_{11}}\mathbb{N} \cap p_{21}^{n_{21}}\mathbb{N} \cap \ldots \cap p_{s1}^{n_{s1}}\mathbb{N})) \cap \ldots .$$

Після нескладних перетворень отримаємо

$$I = (p_{10}^{n_{10}}\mathbb{N} \cup p_{11}^{n_{11}}\mathbb{N} \cup p_{12}^{n_{12}}\mathbb{N} \cup \ldots \cup) \cap$$

$$\cap \ldots \cap (p_{10}^{n_{10}}\mathbb{N} \cup p_{11}^{n_{11}}\mathbb{N} \cup p_{t2}^{n_{t2}}\mathbb{N} \cup \ldots) \cap \ldots .$$

Тобто остаточно маємо розклад довільного лівого ідеалу у вигляді перетину ідеалів вигляду I_p, тобто $I = \bigcap\limits_{P} I_p$. Лему доведено. ◊

4. σ – квазі-фільтри конґруенцій. Квазі-фільтри відіграють важливу роль, як було сказано вище, у вивченні скрутів в категорії $S - Act$. В загальному такі фільтри можуть бути дуже складними. Пропонуємо спочатку вивчити більш прості квазі-фільтри, які називатимемо σ-квазі-фільтрами.

Нехай задано фіксовану ліву конґруенцію σ на S. Тоді розглянемо множину

$$E_\sigma = \{\tau \mid \tau \in Con(S),\ \tau \vee \sigma = 1_S\}.$$

Ця множина є квазі-фільтром. Називатимемо його спеціальним квазі-фільтром або скорочено σ-квазі-фільтром. Говоритимемо, що σ-квазі-фільтр тривіальний, якщо він містить Δ або складається тільки з 1_S.

Лема 6. *Для довільної конґруенції σ множина E_σ є квазі-фільтром.*

Доведення. Перевіримо три умови з означення 6. Перші дві умови легко перевірити. Покажемо від супротивного, що третя умова виконується. Припустимо, що умови **3**) виконуються, але $\tau \notin E_\sigma$. Тобто існує така конґруенція ρ, яка містить конґруенції σ та τ, але $\rho \neq 1_S$. Тоді можемо знайти такі пари (a, b) з конґруенції 1_S, які «додаванням» до τ збільшують

$\sigma \vee \tau = 1_S$. Але з іншого боку, (a, s) та (s, b) належать до ρ. Оскільки ρ – конґруенція, тоді з транзитивності випливає, що $(a, b) \in \rho$. А це суперечність. Лему доведено. ◊

Лема 7. *Нехай S – моноїд, I – лівий ідеал в S, $\sigma = \sigma_I$ – ріссова конґруенція. Тоді σ-квазі-фільтр E_σ не містить нетривіальних конґруенцій Рісса.*

Д о в е д е н н я. Від супротивного. Нехай конґруенції $\tau, \rho \in Con(S)$, але вони ріссові. Тобто їх можна збудувати так: $\rho = \Delta \cup (I_1 \times I_1)$ і $\tau = \Delta \cup (I_2 \times I_2)$. Щоб фільтр був σ-квазі-фільтром E_σ треба, щоб $\sigma \vee \tau = 1_S$. З леми 2: $\rho \vee \tau = \Delta \cup ((I_1 \cup I_2) \times (I_1 \cup I_2))$. З іншого боку, $\sigma \vee \tau = \Delta \cup ((I_1 \cup I_2) \times (I_1 \cup I_2)) = S \times S$. Звідси випливає, що $I_1 \cup I_2 = S$. Але це виконується тоді й тільки тоді, якщо $I_1 = S$ або $I_2 = S$. Оскільки моноїд S містить одиницю, то отримуємо, що I_1 або I_2 співпадає з всім S. Лему доведено. ◊

Лема 8. *Нехай I – лівий головний ідеал моноїда $(\mathbb{N}, \cdot)$. Множина $\overline{\tau} = \{(a,b) \mid |a-b| \in I$ або $a = b\}$ породжує конґруенцію на моноїді $(\mathbb{N}, \cdot)$.*

Д о в е д е н н я. Покажемо, що $\overline{\tau} = \{(a,b) \mid |a-b| \in I$ або $a = b\}$ є конґруенцією на множині натуральних чисел. Рефлексивність і симетричність очевидні. Перевіримо транзитивність. Оскільки $|a-b| \in I$ та $|b-c| \in I$, тоді $|a-b+c-c| \in I$, $|a-b+c-c| = |a-c| + |c-b| \in I$. Оскільки $|b-c| \in I$, то звідси випливає, що $|a-c| \in I$. Це відношення еквівалентності витримує множення, бо, якщо $|a-b| \in I$, тоді $|sa-sb| \in I$. Лему доведено. ◊

Лема 9. *Якщо σ – ріссова конґруенція, побудована за допомогою ідеалу із леми 5, та $\overline{\tau}_I$ – неріссові конґруенції із леми 8. Тоді множина $E_\sigma = \{\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \overline{\tau}_{p\mathbb{N}}, \overline{\tau}_{p^2\mathbb{N}}, \ldots, \overline{\tau}_{p^n\mathbb{N}}, \ldots\}$ є σ-квазі-фільтром, де p – довільне просте число та $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.*

Д о в е д е н н я. Легко перевірити, що об'єднання конґруенцій $\sigma \vee \overline{\tau}_{p^n\mathbb{N}} = 1_\mathbb{N} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Тоді $E_\sigma = \{\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \overline{\tau}_{p\mathbb{N}}, \overline{\tau}_{p^2\mathbb{N}}, \ldots, \overline{\tau}_{p^n\mathbb{N}}, \ldots\}$ – σ-квазі-фільтр, де p – просте число та $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ за означенням 6. Лему доведено. ◊

Приклад. Нехай $p = 2$, тоді $E_\sigma = \{\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \overline{\tau}_{2\mathbb{N}}, \overline{\tau}_{2^2\mathbb{N}}, \ldots, \overline{\tau}_{2^n\mathbb{N}}, \ldots\}$, $\sigma = \{(a,b) \mid a, b \notin 2^n, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. В σ немає пар, у яких елементи були б степенями 2, і пар вигляду $(1, p^n)$ та $(p^n, 1)$.

Відмітимо, що $\overline{\tau}_{2\mathbb{N}} = 2\mathbb{N} \times 2\mathbb{N} \cup \{(a-b) \| a-b| \in 2\mathbb{N}\}$.

Легко бачимо, що $\sigma \vee \overline{\tau}_{2\mathbb{N}} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Покажемо, що конґруенція $\theta = \sigma \vee \overline{\tau}_{2\mathbb{N}}$, яка містить конґруенції σ та $\overline{\tau}_{2\mathbb{N}}$, співпадає з $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Беремо пари $(6,5) \in \sigma$ та $(5,1) \in \overline{\tau}_{2\mathbb{N}}$, тоді за транзитивністю $(1,6)$ належить θ. Оскільки $(6,2) \in \overline{\tau}_{2\mathbb{N}}$, тоді $(1,2) \in \theta$. Якщо $(1,2) \in \theta$, то за транзитивністю до θ належать всі можливі пари.

Аналогічно можна показати, що $\sigma \vee \overline{\tau}_{4\mathbb{N}} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Те, що $\sigma \vee \overline{\tau}_{2^n\mathbb{N}} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ для довільного $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, випливає із властивості квазі-фільтра (умова ***3***) з означення 6). ◄

Лема 10. *Нехай* $\overline{\tau}_I$ *– конґруенції із леми* 8 *та* σ *– ріссова конґруенція, побудована за допомогою лівого головного ідеалу моноїда* $(\mathbb{N},\cdot)$. *Тоді* $\sigma \vee \overline{\tau}_I = 1_S$.

Доведення. Нехай $I = p_1\mathbb{N}$ та $\sigma = \{p_2\mathbb{N} \times p_2\mathbb{N}\} \bigcup \Delta$, де p_1 та p_2 – довільні прості числа. Об'єднаємо ці дві конґруенції. Виберемо пари $(s, np_1 + +s) \in \overline{\tau}_{p_1\mathbb{N}}$ та $(p_2k, p_2t) \in \sigma$, де $s, t, k \in \mathbb{N}$. Вибираємо $np_1 + s = p_2k$, за транзитивністю отримуємо пари вигляду (s, p_2t). Ці пари породять всі інші, тобто $\sigma \vee \overline{\tau}_{p_1\mathbb{N}} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Лему доведено. ◊

Лема 11. *Якщо* $\overline{\tau}_I$, $\overline{\tau}_R$ *– конґруенції із леми* 8*, породжені головними ідеалами I, R моноїда* $(\mathbb{N},\cdot)$. *Тоді* $\overline{\tau}_R \vee \overline{\tau}_I = 1_S$.

Доведення. Нехай $I = p_1\mathbb{N}$ та $R = p_2\mathbb{N}$, де p_1 та p_2 – довільні прості числа. Вибираємо пари вигляду $(1, kp_1 + 1) \in \overline{\tau}_I$ та $(kp_1 + 1, np_2 + kp_1 + 1)$. За транзитивністю отримуємо пари вигляду $(1, np_2 + kp_1 + 1)$. За допомогою підбору $n, k \in \mathbb{N}$ отримаємо, що $np_2 + kp_1 + 1 = t$, де $t = 2,3,\ldots$. Звідси $\overline{\tau}_R \vee \overline{\tau}_I = 1_S$. Лему доведено. ◊

Теорема 2. *Нехай* σ *– ріссова конґруенція, яка побудована з довільного ідеалу в лемі* 5*. Якщо* σ *не міститься в конґруенції із леми* 8*, то* E_σ *буде нетривіальним* σ*-квазі-фільтром. Якщо* σ *– неріссова конґруенція, то* σ*-квазі-фільтр буде містити всі ріссові конґруенції із леми* 8 *та всі неріссові із леми* 8*, які не містять цієї конґруенції* σ.

Доведення випливає із лем 10 та 11.

Означимо множину

$$\rho_{(1,k)} = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid s(1,k), s(k,1), s(1,k^2),$$
$$s(k^2,1), \ldots, s(1,k^n), s(k^n,1), \ldots\} \bigcup \Delta,$$

де k – довільне натуральне число, $s, n \in \mathbb{N}$.

Лема 12. *Множина* $\rho_{(1,k)}$ *породжує неріссову конґруенцією на моноїді* $(\mathbb{N},\cdot)$.

Доведення. За побудовою $\rho_{(1,k)}$ є рефлексивне, симетричне. Транзитивність випливає з того, що в цій множині є пари тільки такого типу, а інших пар не можна отримати. Замкненість щодо множення також випливає із побудови. Лему доведено. ◊

Лема 13. *Нехай* $\rho_{r\mathbb{N}}$ *– ріссова конґруенція,* $\tau_{(1,r)}$ *– неріссова конґруенція, де* r *– довільне натуральне число. Тоді* $\rho_{r\mathbb{N}} \vee \tau_{(1,r^n)} = 1_S$*, де* n *– довільне натуральне число.*

Доведення. Візьмемо пари $(s, sr^n) \in \tau_{(1,r^n)}$ та $(sr^n, r^n) \in \rho_{r\mathbb{N}}$. За транзитивністю отримаємо пару (s, r^n). Взявши пари $(r^n, 1) \in \tau_{(1,r^n)}$ та (s, r^n), отримаємо пару вигляду $(s, 1)$, де $s \in \mathbb{N}$. Це означає, що отримали всі пари з $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Лему доведено. ◊

Лема 14. *Нехай* $\rho_{r\mathbb{N}}$ *– ріссова конґруенція,* $\tau_{(1,r)}$ *– неріссова конґруенція, де* r *– довільне натуральне число. Тоді* $\rho_{r^n\mathbb{N}} \vee \tau_{(1,r)} = 1_S$*, де* n *– довільне натуральне число.*

Доведення аналогічне, як в лемі 13. ◊

Лема 15. *Нехай* $\rho_{m_2\mathbb{N}}$ *– ріссова конґруенція,* $\tau_{(1,m_1)}$ *– неріссова конґруенція,* m_1, m_2 *– довільні натуральні числа такі, що* $m_1 \neq r^n$ *та* $m_2 \neq r^k$*, де* $r \in \mathbb{N}$*. Тоді* $\rho_{m_2\mathbb{N}} \vee \tau_{(1,m_1)} \neq 1_S$.

Доведення. Якщо m_1 не ділить m_2, тоді $\rho_{m_2\mathbb{N}} \vee \tau_{(1,m_1)} = \rho_{m_2\mathbb{N}} \cup \cup \tau_{(1,m_1)} \neq 1_S$. Це звичайне об'єднання буде конґруенцією. Транзитивність ніяких нових пар не дасть.

Нехай $u = \text{НСД}(m_1, m_2)$, тобто $m_1 = uk_1$ та $m_2 = uk_2$. Тоді виберемо пари $(m_2, k_1m_2) \in \rho_{m_2\mathbb{N}}$ та $(k_2m_1, k_2) \in \tau_{(1,m_1)}$. Оскільки $m_1 = uk_1$, тоді з пари $(k_2um_2, k_2) \in \tau_{(1,m_1)}$ та при $m_2 = uk_2$ отримаємо пару $(k_1m_2, k_2) \in \tau_{(1,m_1)}$. За транзитивністю отримаємо пари $(m_2, k_2) \in \rho_{k_2\mathbb{N}}$. Отже, $\rho_{m_2\mathbb{N}} \vee \tau_{(1,m_1)} = \rho_{k_2\mathbb{N}} \vee \vee \tau_{(1,m_1)} \neq 1_S$, бо k_2 не ділить m_1.

Доведення випадку, коли m_1 ділить m_2, випливає з доведеного вище при $k_1 = 1$. Лему доведено. ◊

Лема 16. *Нехай* m_1, m_2 *– довільні натуральні числа,* $\tau_{(1,m_1)}$ *– неріссова конґруенція та* $\tau_{(1,m_2)}$ *– неріссова конґруенція. Тоді* $\tau_{(1,m_1)} \vee \tau_{(1,m_2)} \neq 1_S$.

Доведення. За транзитивністю матимемо багато нових пар, але не буде пар типу $s(1, m_1 + m_2)$, оскільки в будь-якому розкладі числа $m_1 + m_2$ на множники не можуть зустрітися одночасно m_1 і m_2 як співмножники. Лему доведено. ◊

Теорема 3. *Нехай* $\sigma = \rho_{r\mathbb{N}}$ *– ріссова конґруенція, де* r *– довільне натуральне число. Для довільного* σ*-квазі-фільтра*

$$E_\sigma = \{\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \tau_{(1,r)}\tau_{(1,r^2)}, \ldots, \tau_{(1,r^n)}, \ldots\},$$

де $n \in \mathbb{N}$.

Доведення випливає із леми 13 та леми 15. ◊

Теорема 4. *Нехай* $\sigma = \tau_{(1,r)}$ *– неріссова конґруенція, де* r *– довільне натуральне число. Для довільного σ-квазі-фільтра*

$$E_\sigma = \{\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \tau_{r\mathbb{N}}, \tau_{r^2\mathbb{N}}, \ldots, \tau_{r^n\mathbb{N}}, \ldots\},$$

де $n \in \mathbb{N}$.

Доведення випливає із леми 14 та леми 16. ◊

1. *Горбачук О. Л., Комарницький М. Я.* Про S-кручення в модулях // Вісн. Львів. держ. ун-ту. Сер. Мех.-мат. – 1977. – Вип. 12. – С. 32–34.
2. *Мишина А. П., Скорняков Л. А.* Абелевы группы и модули. – Москва: Наука, 1969. – 152 с.
3. *Grillet P. A.* Semigroups. An introduction to the structure theory. – New York: Marcel Dekker Inc., 1995. – 398 p.

4. *Howie J. M.* An introduction to semigroup theory. – London: Acad. Press, 1976. – 272 p.
5. *Kilp M., Knauer U., Mikhalov A. V.* Monoids, acts and categories. – Berlin: Walter de Gruyter, 2000. – 529 p.
6. *Luedeman J. K.* Torsion theories and semigroup of quotients // Lect. Notes in Math. – Berlin: Springer-Verlag, 1983. – **998**. – P. 350–373.
7. *Mitsch H.* Semigroups and their lattice of congruencies. II // Semigroup Forum. – 1997. – **54**. – P. 1–42.
8. *Wiegandt R.* Radicals and torsion theory for acts // Semigroup Forum. – 2006. – **72**. – P. 312–328.
9. *Zang R. Z., Gao W. M., Xu F. Y.* Torsion theories and quasi-filters of right congruencies // Algebra Colloq. – 1944. – **1**, No. 3. – P. 273–280.
10. *Zang R. Z., Shum K. P.* Hereditary torsion classes of S-systems // Semigroup Forum. – 1996. – **52**. – P. 253–270.

О СПЕЦИАЛЬНЫХ КВАЗИ-ФИЛЬТРАХ В МУЛЬТИПЛИКАТИВНОМ МОНОИДЕ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Вводится понятие σ-кручения в категории S-полигонов над моноидом S и соответствуещего ему σ-квази-фильтра в моноиде S. Описаны риссовы конгруэнции на мультипликативном моноиде натуральных чисел. На основе этого описания построены некоторые классы σ-квази-фильтров в моноиде $(\mathbb{N}, \cdot)$. Основные результаты статьи содержатся в теоремах 2, 3 *и* 4.

ON SPECIAL QUASI-FILTERS ON THE MULTIPLICATIVE MONOID TO THE NATURAL NUMBERS

In this paper, we introduce the concept of σ-torsion theory in the category S-system to monoid S and his σ-quasi-filter on a monoid S. We described Riesz congruencies on the multiplication monoid to the natural numbers. On the base of this description we established some classes of σ-quasi-filter on a monoid $(\mathbb{N}, \cdot)$. The main results of this paper are in the theorems 2, 3 *and* 4.

Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів

Одержано
12.11.08