УДК 512.64

А. М. Романів, В. П. Щедрик

ПРО НЕАСОЦІЙОВНІ ТА УНІТАЛЬНІ ДІЛЬНИКИ МНОГОЧЛЕННИХ МАТРИЦЬ

Для неособливої многочленної матриці $A(x)$ над нескінченним полем побудовано певну множину її дільників, яка містить всі неасоційовні дільники із наперед заданою канонічною діагональною формою. При деяких обмеженнях на матрицю $A(x)$ вказано критерій існування унітального множника цієї матриці.

Нехай F – нескінченне поле, $A(x)$ – неособлива $(n \times n)$-матриця над $F[x]$, що записана у вигляді матричного многочлена над F: $A(x) = A_k x^k + A_{k-1}x^{k-1} + \ldots + A_0$. Матриця $A(x)$ називається регулярною, якщо $\det A_k \neq 0$, та унітальною, якщо $A_k = E$ – одинична матриця. Будемо говорити, що матриця $A(x)$ регуляризується справа, якщо існує така оборотна матриця $U(x)$, що

$$A(x)U(x) = Ex^s + D_{s-1}x^{s-1} + \cdots + D_0 = A_1(x).$$

Матриці $A(x)$ та $A_1(x)$ називаються асоційовними справа. Для матриці $A(x)$ існують такі оборотні матриці $P(x)$ та $Q(x)$, що

$$P(x)A(x)Q(x) = \operatorname{diag}\left(\varepsilon_1(x), \ldots, \varepsilon_n(x)\right) = \Psi(x),$$

$$\varepsilon_i(x) \mid \varepsilon_{i+1}(x), \qquad i = 1, \ldots, n-1.$$

При цьому матриця $\Psi(x)$ називається канонічною діагональною формою (к. д. ф.) або ж формою Сміта матриці $A(x)$. Відомо [10], що матриця $A(x)$ має дільник з к. д. ф. $\Phi(x) = \operatorname{diag}(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$ тоді й тільки тоді, коли $\Phi(x)$ є дільником $\Psi(x)$. Отже, задача опису дільників матриці $A(x)$ зводиться до послідовного знаходження її дільників з наперед заданими канонічними діагональними формами.

З огляду на прикладний аспект задачі факторизації матриць в теорії систем диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, теорії операторних пучків, оптимального керування та ін., особливе місце серед дільників многочленних матриць займають унітальні дільники. У колективній монографії [9] (1982 р.) у випадку, коли $F = \mathbb{C}$ було встановлено взаємно однозначний зв'язок між унітальними дільниками та базами певних інваріантних підпросторів лінійного простору $\mathbb{C}^n$. Проте пріоритет розв'язання проблеми виділення регулярного множника належить П. С. Казімірському [2, 3], який у 1980 р. за умови, що поле F є алгебраїчно замкнене характеристики нуль запропонував критерій існування регулярного (унітального) дільника та вказав конструктивний метод його побудови. Цей критерій базується на специфічних властивостях поля F, а тому в оригінальному вигляді не може бути узагальненим. У роботі [1] цей критерій було переформульовано таким чином.

Розглянемо нижню унітрикутну матрицю

$$V(\Psi,\Phi) = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \dfrac{\varphi_2}{(\varphi_2, \varepsilon_1)}k_{21} & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\varphi_n}{(\varphi_n, \varepsilon_1)}k_{n1} & \dfrac{\varphi_n}{(\varphi_n, \varepsilon_2)}k_{n2} & \ldots & \dfrac{\varphi_n}{(\varphi_n, \varepsilon_{n-1})}k_{n,n-1} & 1 \end{matrix} \right\|,$$

ISSN 1810-3022. Прикл. проблеми мех. і мат. – 2008. – Вип. 6. – С. 72–79.

де

$$k_{ij} \equiv \begin{cases} 0, & \dfrac{(\varphi_i, \varepsilon_j)}{\varphi_j} = 1, \\ k_{ij0} + k_{ij1}x + \ldots + k_{ijh_{ij}} x^{h_{ij}}, & \dfrac{(\varphi_i, \varepsilon_j)}{\varphi_j} \neq 1, \qquad h_{ij} = \deg \dfrac{(\varphi_i, \varepsilon_j)}{\varphi_j}, \end{cases}$$

тут $k_{ij\ell}$ – параметри, $i = 2, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n-1$, $i > j$. Позначимо через $F(k)$ трансцедентне розширення поля F за рахунок приєднання всіх $k_{ij\ell}$.

Теорема 1. *Для того щоб із матричного многочленна $A(x)$ можна було виділити лівий унітальний дільник з к.д.ф. $\Phi(x)$, $\deg \det \Phi(x) = nr$, необхідно та достатньо, щоб матриця $(V(\Psi,\Phi)P(x))^{-1}\Phi(x)$ регуляризувалася справа над $F(k)[x]$.*

Зауважимо, що умова $\deg \det \Phi(x) = nr$ є необхідною умовою існування унітального дільника степеня r. З методами регуляризації многочленних матриць можна ознайомитись в роботах [1, 2, 6].

Позначимо через $\mathbf{V}(\Psi,\Phi)$ множину нижніх унітрикутних матриць, які отримуються із матриці $V(\Psi,\Phi)$, коли параметри $k_{ij\ell}$ незалежно один від одного пробігають усі значення із поля F. Також позначимо через $(\mathbf{V}(\Psi,\Phi)P(x))^{-1}\Phi(x)$ множину всіх матриць вигляду $(V(x)P(x))^{-1}\Phi(x)$, де $V(x) \in \mathbf{V}(\Psi,\Phi)$. Тоді теорему 1 можна сформулювати ще так.

Теорема 2. *Для того щоб із матричного многочленна $A(x)$ можна було виділити лівий унітальний дільник з к.д.ф. $\Phi(x)$, $\deg \det \Phi(x) = nr$, необхідно та достатньо, щоб у множині $(\mathbf{V}(\Psi,\Phi)P(x))^{-1}\Phi(x)$ існувала матриця, що регуляризується справа над $F[x]$.*

У цій роботі показано, що теореми 1 та 2 за певних обмежень виконуються і у випадку довільного нескінченного поля.

Інший підхід до пошуку унітальних дільників матриці $A(x)$ базується на тому факті, що асоційовні між собою унітальні дільники збігаються. Отже, вони містяться у множині всіх неасоційовних дільників матриці $A(x)$. Звідси випливає, що для опису унітальних дільників матриці $A(x)$ з к.д.ф. $\Phi(x)$ достатньо знайти множину неасоційовних дільників цієї матриці зі вказаною к.д.ф. та вибрати з неї ті дільники, які регуляризуються.

Згідно з результатами роботи [8] множина $(\mathbf{V}(\Psi,\Phi)P(x))^{-1}\Phi(x)$ є множиною усіх лівих неасоційовних справа дільників матриці $A(x)$ з к.д.ф. $\Phi(x)$ тоді й тільки тоді, коли степінь всіх простих дільників, які входять в розклад многочлена $\dfrac{\varphi_i(x)}{\varphi_{i-1}(x)}$ на множники, є більшим від степенів відповідних дільників елемента $\dfrac{\varepsilon_{i-1}(x)}{\varphi_{i-1}(x)}$, $i = 2, \ldots, n$. В іншому випадку множина $(\mathbf{V}(\Psi,\Phi)P(x))^{-1}\Phi(x)$ є власною підмножиною множини всіх лівих неасоційовних справа дільників матриці $A(x)$ з к.д.ф. $\Phi(x)$. Отже, задача полягає в тому, щоб розширити множину $\mathbf{V}(\Psi,\Phi)$ так, щоб отримана на її основі множина дільників матриці $A(x)$ містила всі ліві неасоційовні справа дільники з к.д.ф. $\Phi(x)$. Для цього розглянемо верхню унітрикутну матрицю S вигляду

$$S = \left\| \begin{matrix} 1 & s_{12} & \dots & s_{1,n-1} & s_{1n} \\ 0 & 1 & & s_{2,n-1} & s_{2n} \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & s_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{matrix} \right\|,$$

де s_{pq} − параметри, $p = 1,\dots,n-1$, $q = 2,\dots,n$, $p < q$. Розглянемо добуток матриць $V(\Psi,\Phi)S$. Надамо параметрам $k_{ij\ell}$, s_{pq}, що фігурують в матриці $V(\Psi,\Phi)S$, усіх значень із поля F. Отриману множину многочленних матриць позначимо через $\mathbf{LD}(\Psi,\Phi)$.

Теорема 3. *Множина* $(\mathbf{LD}(\Psi,\Phi)P(x))^{-1}\Phi(x)$ *є множиною лівих дільників матриці* $A(x)$, *яка містить у собі всі ліві неасоційовні справа дільники матриці* $A(x)$ *з к. д. ф.* $\Phi(x)$.

Перед доведенням цієї теореми встановимо допоміжне твердження.
Розглянемо такі множини матриць:

$$\mathbf{G}_\Phi = \{H(x) \in GL_n(F[x]) \mid H(x)\Phi(x) = \Phi(x)H_1(x) \text{ для деякої матриці } H_1(x) \in GL_n(F[x])\},$$

$$\mathbf{L}(\Psi,\Phi) = \{L(x) \in GL_n(F[x]) \mid L(x)\Psi(x) = \Phi(x)L_1(x) \text{ для деякої матриці } L_1(x) \in M_n(F[x])\},$$

які згідно з результатами роботи [8] складаються з оборотних матриць вигляду

$$\left\| \begin{matrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1,n-1} & h_{1n} \\ \frac{\varphi_2}{\varphi_1}h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2,n-1} & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varphi_n}{\varphi_1}h_{n1} & \frac{\varphi_n}{\varphi_2}h_{n2} & \dots & \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}h_{n,n-1} & h_{nn} \end{matrix} \right\|,$$

$$\left\| \begin{matrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1,n-1} & g_{1n} \\ \frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\varepsilon_1)}g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2,n-1} & g_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_1)}g_{n1} & \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_2)}g_{n2} & \dots & \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_{n-1})}g_{n,n-1} & g_{nn} \end{matrix} \right\| \tag{1}$$

відповідно. При цьому множина $\mathbf{G}_\Phi$ є мультиплікативною групою, яка задовольняє умову $\mathbf{G}_\Phi\mathbf{L}(\Psi,\Phi) = \mathbf{L}(\Psi,\Phi)$.

Лема. $GU_n(F)$ − *група верхніх унітрикутних матриць над полем* F *задавольняє рівність*

$$\mathbf{L}(\Psi,\Phi)\, GU_n(F) = \mathbf{L}(\Psi,\Phi).$$

Доведення. Нехай $L(x) \in \mathbf{L}(\Psi,\Phi)$, тобто $L(x)\Psi(x) = \Phi(x)L_1(x)$, де $L_1(x) \in M_n(F[x])$. Нехай також $R \in GU_n(F)$. Із вигляду цієї матриці випливає, що $R \in \mathbf{G}_\Psi$. Тобто $R\Psi(x) = \Psi(x)R_1(x)$, де $R_1(x) \in GL_n(F[x])$. Тоді

$$L(x)R\Psi(x) = L(x)\Psi(x)R_1(x) = \Phi(x)L_1(x)R_1(x),$$

тобто $L(x)R \in \mathbf{L}(\Psi,\Phi)$. Отже, $\mathbf{L}(\Psi,\Phi)GU_n(F) \subseteq \mathbf{L}(\Psi,\Phi)$.

Оскільки $E \in GU_n(F)$, то $\mathbf{L}(\Psi,\Phi)E = \mathbf{L}(\Psi,\Phi)$. Таким чином, $\mathbf{L}(\Psi,\Phi) \subseteq \subseteq \mathbf{L}(\Psi,\Phi)GU_n(F)$. Отже, $\mathbf{L}(\Psi,\Phi)GU_n(F) = \mathbf{L}(\Psi,\Phi)$. Лему доведено. ◊

Доведення **теореми 3**. На підставі твердження із [8] множина $(\mathbf{L}(\Psi,\Phi)P(x))^{-1}\Phi(x)K(x)$, де $K(x) \in GL_n(F[x])$, є множиною всіх лівих дільників матриці $A(x)$ з к.д.ф. $\Phi(x)$. Оскільки $\mathbf{L}(\Psi,\Phi)GU_n(F) = \mathbf{L}(\Psi,\Phi)$, то кожна матриця вигляду $(L(x)RP(x))^{-1}\Phi(x)$, де $L(x) \in \mathbf{L}(\Psi,\Phi)$, $R \in GU_n(F)$, буде дільником матриці $A(x)$. Тобто множина $(\mathbf{LD}(\Psi,\Phi)P(x))^{-1}\Phi(x)$ є множиною лівих дільників матриці $A(x)$.

Позначимо через $\mathbf{W}(\Psi, \Phi)$ множину представників лівих класів суміжності множини $\mathbf{L}(\Psi,\Phi)$ по групі $\mathbf{G}_\Phi$. Тоді згідно з теоремою 2 з [8] множина $(\mathbf{W}(\Psi,\Phi)P(x))^{-1}\Phi(x)$ є множиною всіх лівих неасоційовних справа дільників матриці $A(x)$ з к.д.ф. $\Phi(x)$. Таким чином, для доведення теореми достатньо показати, що для кожної матриці із $(\mathbf{W}(\Psi,\Phi)P(x))^{-1}\Phi(x)$ у множині $(\mathbf{LD}(\Psi, \Phi)P(x))^{-1}\Phi(x)$ існує асоційовна справа до неї матриця.

Нехай $B(x) = (W(x)P(x))^{-1}\Phi(x)$, де $W(x) \in \mathbf{W}(\Psi,\Phi)$. Із наслідку 1 з [8] випливає, що матриця $B(x)$ асоційовна справа до матриці $B_1(x) = (U(x)P(x))^{-1}\Phi(x)$, де $U(x) \in \mathbf{LD}(\Psi,\Phi)$, тоді й тільки тоді, коли $U(x) = H(x)W(x)$, де $H(x) \in \mathbf{G}_\Phi$. Отже, потрібно показати, що для кожної матриці $W(x) \in \mathbf{W}(\Psi,\Phi)$ існують $H(x) \in \mathbf{G}_\Phi$ і $R \in GU_n(F)$ такі, що $H(x)W(x)R = V(x)$, де $V(x) \in \mathbf{V}(\Psi,\Phi)$, оскільки в цьому випадку матриця $(W(x)P(x))^{-1}\Phi(x)$ буде асоційовна справа до матриці $(V(x)R^{-1}P(x))^{-1}\Phi(x)$, причому $V(x)R^{-1} \in \mathbf{LD}(\Psi,\Phi)$.

Для доведення використаємо метод математичної індукції. Нехай матриця $H(x)$ має вигляд (1) і $W(x) = \left\| \ell_{ij} \right\|_1^n$.

Покладемо $n = 2$. Розглянемо випадок

1′) $\left(\dfrac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}\ell_{12}(x), \ell_{22}(x)\right) = 1$.

Тоді існують такі $h_{21}(x)$ та $h_{22}(x)$, що

$$\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}h_{21}(x)\ell_{12}(x) + h_{22}(x)\ell_{22}(x) = 1.$$

Отже, матриця

$$\begin{Vmatrix} \ell_{22}(x) & -\ell_{12}(x) \\ \dfrac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}h_{21}(x) & h_{22}(x) \end{Vmatrix} = H_1(x)$$

належить групі $\mathbf{G}_\Phi$. Тоді

$$H_1(x)W(x) = \begin{Vmatrix} g_{11}(x) & 0 \\ g_{21}(x) & 1 \end{Vmatrix}.$$

Оскільки отримана матриця є оборотною, то $g_{11}(x) = g_{11}$ – відмінний від нуля елемент поля F. Тому

$$\begin{Vmatrix} g_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} g_{11} & 0 \\ g_{21}(x) & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ g_{21}(x) & 1 \end{Vmatrix} = H_2(x)H_1(x)W(x).$$

На підставі леми 3 із [7] у групі $\mathbf{G}_\Phi$ існує така матриця $H_3(x)$, що

$$H_3(x)H_2(x)H_1(x)W(x) \in \mathbf{V}(\Psi, \Phi).$$

Нехай тепер

1″) $$\left(\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}\ell_{12}(x), \ell_{22}(x)\right) = \alpha(x) \neq \text{const}.$$

З оборотності матриці $W(x)$ випливає, що $(\ell_{21}(x), \ell_{22}(x)) = 1$, а, отже,

$$\left(\ell_{12}(x), \ell_{22}(x), \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}\right) = 1.$$

Згідно з лемою 1 із [5] існує такий елемент $r \in F$, що

$$\left(\ell_{12}(x)r + \ell_{22}(x), \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}\right) = 1.$$

Тоді в матриці

$$W(x)\begin{Vmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = W(x)R = W_1(x) = \left\| \ell'_{ij}(x) \right\|_1^2$$

елемент $\ell'_{22}(x)$ задовольняє умови

$$\left(\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}, \ell'_{22}(x)\right) = 1, \qquad (\ell'_{21}(x), \ell'_{22}(x)) = 1.$$

Отже,

$$\left(\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}\ell'_{12}(x), \ell'_{22}(x)\right) = 1.$$

Тобто повернулись до *випадку* **1′**). Тому в групі $\mathbf{G}_\Phi$ існує така матриця $H(x)$, що $H(x)W_1(x) = H(x)W(x)R \in \mathbf{V}(\Psi, \Phi)$. Тобто твердження є правильним для матриць порядку 2.

Припустимо що твердження справджується для матриць порядку $n-1$. Нехай

2′) $$\left(\frac{\varphi_n(x)}{\varphi_1(x)}\ell_{1n}(x), \frac{\varphi_n(x)}{\varphi_2(x)}\ell_{2n}(x), \ldots, \frac{\varphi_n(x)}{\varphi_{n-1}(x)}\ell_{n-1,n}(x), \ell_{nn}(x)\right) = 1.$$

Тоді існують такі $h_{n1}(x), h_{n2}(x), \ldots, h_{n,n-1}(x), h_{nn}(x)$, що

$$\frac{\varphi_n(x)}{\varphi_1(x)}h_{n1}(x)\ell_{1n}(x) + \frac{\varphi_n(x)}{\varphi_2(x)}h_{n2}(x)\ell_{2n}(x) + \ldots + h_{nn}(x)\ell_{nn}(x) = 1.$$

Звідси випливає, що

$$\left(\frac{\varphi_n(x)}{\varphi_1(x)}h_{n1}(x), \frac{\varphi_n(x)}{\varphi_2(x)}h_{n2}(x), \ldots, \frac{\varphi_n(x)}{\varphi_{n-1}(x)}h_{n,n-1}(x), h_{nn}(x)\right) = 1.$$

На підставі теореми з [10, с. 13] рядок

$$\begin{Vmatrix} \frac{\varphi_n(x)}{\varphi_1(x)}h_{n1}(x) & \frac{\varphi_n(x)}{\varphi_2(x)}h_{n2}(x) & \ldots & \frac{\varphi_n(x)}{\varphi_{n-1}(x)}h_{n,n-1}(x) & h_{nn}(x) \end{Vmatrix}$$

можна доповнити до матриці із групи $\mathbf{G}_\Phi$ вигляду

$$H_1(x) = \begin{Vmatrix} * & * & \ldots & * & * \\ 0 & * & & * & * \\ \ldots & & \ddots & & \ldots \\ 0 & 0 & & * & * \\ \frac{\varphi_n(x)}{\varphi_1(x)}h_{n1}(x) & \frac{\varphi_n(x)}{\varphi_2(x)}h_{n2}(x) & \ldots & \frac{\varphi_n(x)}{\varphi_{n-1}(x)}h_{n,n-1}(x) & h_{nn}(x) \end{Vmatrix}.$$

Тоді

$$H_1(x)W(x) = \left\| \begin{matrix} g_{11}(x) & \dots & g_{1,n-1}(x) & g_{1n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n-1,1}(x) & \dots & g_{n-1,n-1}(x) & g_{n-1,n}(x) \\ g_{n1}(x) & \dots & g_{n,n-1}(x) & 1 \end{matrix} \right\| = W_1(x).$$

Отже,

$$\left\| \begin{matrix} 1 & & 0 & -g_{1n}(x) \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & -g_{n-1,n}(x) \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{matrix} \right\| W_1(x) = H_2(x)W_1(x) =$$

$$= \left\| \begin{array}{ccc:c} c_{11}(x) & \dots & c_{1,n-1}(x) & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1,1}(x) & \dots & c_{n-1,n-1}(x) & 0 \\ \hdashline g_{n1}(x) & \dots & g_{n,n-1}(x) & 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{matrix} C(x) & 0 \\ g(x) & 1 \end{matrix} \right\| = W_2(x).$$

Оскільки $\det W_2(x) = \det C(x)$, то $C(x)$ − оборотна матриця. Згідно з припущенням індукції в групі $\mathbf{G}_\Phi$ існує така матриця $H_3(x) \in \mathbf{G}_{\mathrm{diag}(\varphi_1(x),\dots,\varphi_{n-1}(x))}$ та числова матриця R_3, що $H_3(x)C(x)R_3$ є нижньою унітрикутною матрицею. Тоді

$$\left\| \begin{matrix} H_3(x) & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} C(x) & 0 \\ g(x) & 1 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} H_3(x)C(x)R & 0 \\ g(x)R & 1 \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} 1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 0 \\ * & & & 1 \end{matrix} \right\| = W_3(x).$$

При цьому $\left\| \begin{matrix} H_3(x) & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\| \in \mathbf{G}_\Phi$. На підставі леми 3 із [7] в групі $\mathbf{G}_\Phi$ існує така матриця $H_4(x)$, що $H_4(x)W_3(x) \in \mathbf{V}(\Psi, \Phi)$.

Нехай тепер

2″) $$\left(\frac{\varphi_n(x)}{\varphi_1(x)} \ell_{1n}(x), \frac{\varphi_n(x)}{\varphi_2(x)} \ell_{2n}(x), \dots, \frac{\varphi_n(x)}{\varphi_{n-1}(x)} \ell_{n-1,n}(x), \ell_{nn}(x) \right) = \alpha(x) \neq \mathrm{const}.$$

Із оборотності матриці $W(x)$ випливає, що $(\ell_{n1}(x), \ell_{n2}(x), \dots, \ell_{nn}(x)) = 1$. Отже,

$$\left(\ell_{n1}(x), \ell_{n2}(x), \dots, \ell_{nn}(x), \frac{\varphi_n(x)}{\varphi_1(x)} \right) = 1.$$

Згідно з лемою 1 із [5] в полі F існують такі елементи $r_1, \dots, r_{n-1}$, що

$$\left(\ell_{n1}(x)r_1 + \ell_{n2}(x)r_2 + \dots + \ell_{n-1,n-1}(x)r_{n-1} + \ell_{nn}(x), \frac{\varphi_n(x)}{\varphi_1(x)} \right) = 1.$$

Тоді в матриці

$$W(x) \cdot \left\| \begin{matrix} 1 & & 0 & r_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & r_{n-1} \\ 0 & & & 1 \end{matrix} \right\| = W(x)R = \left\| \ell'_{ij}(x) \right\|_1^n$$

елемент $\ell'_{nn}(x)$ задовольняє умову

$$\left(\frac{\varphi_n(x)}{\varphi_1(x)}, \ell'_{nn}(x)\right) = 1.$$

Використавши властивість 4 із [11], отримаємо

$$\left(\frac{\varphi_n(x)}{\varphi_1(x)}\ell'_{1n}(x), \frac{\varphi_n(x)}{\varphi_2(x)}\ell'_{2n}(x), \ldots, \frac{\varphi_n(x)}{\varphi_{n-1}(x)}\ell'_{n-1,n}(x), \ell'_{nn}(x)\right) =$$

$$= \left(\frac{\varphi_n(x)}{\varphi_1(x)}, \frac{\varphi_n(x)}{\varphi_2(x)}\ell'_{2n}(x), \ldots, \frac{\varphi_n(x)}{\varphi_{n-1}(x)}\ell'_{n-1,n}(x), \ell'_{nn}(x)\right) =$$

$$= \left(\left(\frac{\varphi_n(x)}{\varphi_1(x)}, \ell'_{nn}(x)\right), \frac{\varphi_n(x)}{\varphi_2(x)}\ell'_{2n}(x), \ldots, \frac{\varphi_n(x)}{\varphi_{n-1}(x)}\ell'_{n-1,n}(x)\right) =$$

$$= \left(1, \frac{\varphi_n(x)}{\varphi_2(x)}\ell'_{2n}(x), \ldots, \frac{\varphi_n(x)}{\varphi_{n-1}(x)}\ell'_{n-1,n}(x)\right) = 1.$$

Тобто повернулися до випадку ***2′***). Теорему доведено. ◊

Позначимо через $F(k,s)$ трансцедентне розширення поля F за рахунок приєднання всіх $k_{ij\ell}$, s_{pq}.

Наслідок. *Для того щоб із матричного многочленна* $A(x)$ *можна було виділити унітальний дільник з к.д.ф.* $\Phi(x)$, $\deg\det\Phi(x) = nr$, *необхідно та достатньо, щоб матриця* $(V(\Psi,\Phi)SP(x))^{-1}\Phi(x)$ *регуляризувалася справа над* $F(k,s)$.

Теорема 4. *Нехай* $A(x)$ − *матричний многочлен, який може бути зведений до к.д.ф. лише правосторонніми перетвореннями, тобто* $A(x)Q(x) = \Psi(x)$. *Тоді для того щоб із матричного многочленна* $A(x)$ *можна було виділити унітальний дільник з к.д.ф.* $\Phi(x)$, $\deg\det\Phi(x) = nr$, *необхідно та достатньо, щоб матриця* $V^{-1}(\Psi,\Phi)\Phi(x)$ *регуляризувалася справа над* $F(k,s)$.

Доведення. Нехай матричний многочлен $A(x)$ регуляризується справа, тобто для нього існує така оборотна матриця $U(x)$, що

$$A(x)U(x) = A_r x^r + A_{r-1}x^{r-1} + \cdots + A_0.$$

І нехай $A_1(x) = CA(x)V(x)$, де $C \in GL_n(F)$, $V(x) \in GL_n(F[x])$ − напівскалярно еквівалентна до неї матриця. Тоді

$$A_1(x)\left(V^{-1}(x)U(x)C^{-1}\right) = CA(x)V(x)\left(V^{-1}(x)U(x)C^{-1}\right) = CA(x)U(x)C^{-1} =$$

$$= C(Ex^r + B_{r-1}x^{r-1} + \ldots + B_0)C^{-1} =$$

$$= CEx^rC^{-1} + CB_{r-1}x^{r-1}C^{-1} + \ldots + CB_0C^{-1} =$$

$$= Ex^r + D_{r-1}x^{r-1} + \ldots + D_0,$$

де $D_i = CB_iC^{-1}$, $i = 0,\ldots,r-1$.

Таким чином, якщо матриця $A(x)$ регуляризується, то регуляризуються і всі матриці, напівскалярно еквівалентні до неї.

Розіб'ємо множину всіх дільників матриці $A(x)$ з к.д.ф. $\Phi(x)$ на класи напівскалярно еквівалентних між собою матриць. Згідно з теоремою із [4] клас напівскалярно еквівалентних між собою матриць має вигляд

$$(\mathbf{G}_\Phi L(x)GL_n(P))^{-1}\Phi(x)K(x),$$

де $L(x) \in \mathbf{L}(\Psi,\Phi)$, $K(x) \in GL_n(F[x])$. Із доведення теореми 3 випливає, що в множині $\mathbf{G}_\Phi L(x) GL_n(F)$ існує матриця $V(x) \in \mathbf{V}(\Psi, \Phi)$. Тобто кожний клас напівскалярно еквівалентних між собою матриць містить матрицю вигляду $V^{-1}(x)\Phi(x)$. Отже, для перевірки існування унітальних дільників матриці $A(x)$ достатньо перевірити регуляризовність справа матриць із множини $\mathbf{V}^{-1}(\Psi,\Phi)\Phi(x)$. Теорему доведено. ◊

1. *Зеліско В. Р., Щедрик В. П.* Матриця значень на системі коренів діагональних елементів матриці та її застосування // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – **48,** № 4. – С. 20–29.
2. *Казимирский П. С.* Решение проблемы выделения регулярного множителя из матричного многочлена // Укр. мат. журн. – 1980. – **32**, № 4. – С. 483–498.
3. *Казімірський П. С.* Розклад матричних многочленів на множники // Київ: Наук. думка, 1981. – 224 с.
4. *Мельник О. М.* Об инвариантах преобразующих матриц // Методы исследования дифференциальных и интегральных операторов. – Киев: Наук. думка. – 1989. – С. 160–164.
5. *Петричкович В. М.* О полускалярной эквивалентности и нормальной форме Смита многочленных матриц // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1987. – Вып. 26. – С. 13–16.
6. *Прокип В. М.* О делимости и односторонней эквивалентности матричных многочленов // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 9. – С. 1213–1219.
7. *Щедрик В. П.* Один клас дільників матриць над комутативною областю елементарних дільників // Мат. студії. – 2002. – **17**, № 1. – С. 23–28.
8. *Щедрик В. П.* Структура та властивості дільників матриць над комутативною областю елементарних дільників // Мат. студії. – 1998. – **10**, № 2. – С. 115–120.
9. *Gohberg I., Lancaster P., Rodman L.* Matrix polynomials. – New York: Acad. Press, 1982. – 409 p.
10. *Newman M.* Integral matrices. – New York: Acad. Press, 1972. – 224 p.
11. *Shchedryk V. P.* Some determinant properties of primitive matrices over Bezout B-domain // Algebra and Discrete Mathematics. – 2005. – No. 2. – P. 46–57.

О НЕАССОЦИИРУЕМЫХ И УНИТАЛЬНЫХ ДЕЛИТЕЛЯХ МНОГОЧЛЕННЫХ МАТРИЦ

Для неособенной многочленной матрицы $A(x)$ над бесконечным полем построено некоторое множество ее делителей, которое содержит все неассоциируемые делители с наперед заданной канонической диагональной формой. При некоторых ограничениях на матрицу $A(x)$ указан критерий существования унитального множителя этой матрицы.

ON NONASSOCIATED AND MONIC DIVISORS OF POLYNOMIAL MATRICES

For a nonsingular polynomial matrix $A(x)$ over an infinite field we have constructed some set of its divisors containing all nonassociated divisors with prescribed canonical diagonal form. With some restrictions on matrix $A(x)$ the existence criterion of monic multiplier of this matrix has been suggested.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
04.11.08