УДК 514.75

Ю. С. Федченко

ГЕОДЕЗИЧНІ ДЕФОРМАЦІЇ ПОВЕРХОНЬ, ЩО ЗБЕРІГАЮТЬ ҐРАСМАНІВ ОБРАЗ

Досліджуються геодезичні деформації поверхонь, що зберігають ґрасманів образ. Знайдено основну систему рівнянь таких деформацій, вивчено випадок афінних деформацій. Показано, що поверхні обертання допускають лише афінні деформації.

Серед багатьох відомих видів інфінітезимальних деформацій, таких як згинання [2], конформні [7], ареальні [1], поворотні [3], нормальні, тангенціальні [6] та інших, велику роль відіграють геодезичні деформації. Такі деформації були введені в свій час М. С. Синюковим і М. Л. Гаврильченком [5]. Деталі можна знайти в монографії [4], але загалом названа задача ще мало досліджена. В останні роки В. Т. Фоменко [8] та інші вивчають деформації, що зберігають ґрасманів образ. Саме геодезичні деформації поверхонь, які зберігають ґрасманів образ, дослідимо в цій статті.

У **п. 1.1** виведено основні рівняння для геодезичних деформацій, що зберігають ґрасманів образ, у **п. 1.2** проводяться дослідження основних рівнянь, які використовуються надалі. У **п. 2** розглядаються афінні геодезичні деформації, що зберігають ґрасманів образ, у **п. 3** − геодезичні деформації поверхонь, що зберігають ґрасманів образ для поверхонь сталої ґауссової кривини та для поверхонь обертання.

Розглянемо поверхню S в евклідовому просторі E^3 з векторно-параметричним рівнянням $\bar r = \bar r(x^1, x^2)$ і її деформацію S_ε: $\bar r_\varepsilon = \bar r(x^1, x^2) + \varepsilon \bar U(x^1, x^2)$, де $\bar U(x^1, x^2) = u^i \bar r_i + \overset{0}{u}\,\bar n$ − вектор зміщення, ε − малий параметр, а $u^i(x^1, x^2)$, $\overset{0}{u}(x^1, x^2)$ − відповідно дотичні та нормальна компоненти вектора зміщення.

1.1. Основні рівняння для геодезичних деформації, що зберігають ґрасманів образ.

Означення 1 [**5**]. Деформації поверхні S, при яких кожна її геодезична крива переходить, в головному (включаючи доданки, не вище першого степеня відносно ε), в геодезичну криву поверхні S_ε, називають *геодезичними або проективними* (*P-деформації*)**.**

Такі деформації допускають лише поверхні Ліувілля [4, с. 75].

Означення 2 [**8**]. Деформація зберігає *ґрасманів образ,* якщо у кожній точці поверхні зберігається напрям орта нормалі (*G-деформації*).

Теорема 1. *Для того щоб поверхня S допускала локальні PG-деформації, необхідно та достатньо, щоб компоненти вектора зміщення $\bar U$ задовольняли систему рівнянь*

$$\begin{aligned}
&b_i^a u_{aj} = b_j^a u_{ai}\,,\\
&\nabla_i u_k = u_{ki}\,,\\
&\nabla_j u_{ki} = \overset{0}{u}\,\nabla_i b_{jk} - u_a b_j^a b_{ik} + \psi_i g_{jk} + \psi_j g_{ik}\,,\\
&\overset{0}{u}_i = -\,b_i^a u_a\,, \qquad\qquad i, j, k, a = 1,2\,.
\end{aligned} \tag{1}$$

(*Тут b_{ij} − коефіцієнти другої квадратичної форми, g^{ij} − тензор, взаємний з метричним, поверхні S, $b_i^k = g^{kj} b_{ij}$, ∇_i − коваріантна похідна, ψ_i − ґрадієнтний вектор.*)

ISSN 1810-3022. Прикл. проблеми мех. і мат. − 2008. − Вип. 6. − С. 66−71.

Д о в е д е н н я. На основі дериваційних рівнянь поверхні $\bar{r}_{ij} = \Gamma^k_{ij}\bar{r}_k + b_{ij}\bar{n}$, $\bar{n}_i = -\,b^\alpha_i\,\bar{r}_\alpha$ матимемо

$$\bar{U}_i = P^k_i \bar{r}_k + P_i \bar{n}\,, \tag{2}$$

де

$$P^k_i = \nabla_i u^k - b^k_i \overset{0}{u}\,, \tag{3}$$

$$P_i = \partial_i \overset{0}{u} + b_{ik}u^k\,. \tag{4}$$

Умови інтегровності рівнянь (2) дають наступні співвідношення:

$$\nabla_j P^h_i - \nabla_i P^h_j = P_i b^h_j - P_j b^h_i\,, \tag{5}$$

$$\nabla_j P_i - \nabla_i P_j = P^\alpha_j b_{\alpha i} - P^\alpha_i b_{\alpha j}\,. \tag{6}$$

Варіації метрики і зв'язності відповідно мають вигляд

$$\delta g_{ij} \equiv 2\varepsilon_{ij} = \nabla_j u_i + \nabla_i u_j - 2\overset{0}{u}\,b_{ij}\,, \tag{7}$$

$$\delta\Gamma^h_{ij} \equiv P^h_{ij} = g^{ah}(\nabla_j \varepsilon_{ia} + \nabla_i \varepsilon_{ja} - \nabla_a \varepsilon_{ij})\,. \tag{8}$$

Умовою того, що деформація зберігає ґрасманів образ, є

$$P_i = 0\,, \tag{9}$$

а умовою того, що деформація геодезична, є

$$P^h_{ij} = \psi_i \delta^h_j + \psi_j \delta^h_i\,. \tag{10}$$

З рівнянь (8) і (10) отримуємо

$$\nabla_j \varepsilon_{ik} + \nabla_i \varepsilon_{ka} - \nabla_k \varepsilon_{ij} = \psi_i g_{kj} + \psi_j g_{ki}\,. \tag{11}$$

У свою чергу, зі співвідношень (9) і (4) маємо

$$\partial_i \overset{0}{u} + b_{ik}u^k = 0\,, \qquad \overset{0}{u}_i \equiv \partial_i \overset{0}{u} = -b^a_i u_a\,. \tag{12}$$

Продиференціюємо (7) коваріантно за k:

$$2\nabla_k \varepsilon_{ij} = \nabla_{ij} u_i + \nabla_{ir} u_j - 2\overset{0}{u}_k\, b_{ij} - 2\overset{0}{u}\,\nabla_k b_{ij}\,, \tag{13}$$

(тут $\nabla_{jk} = \nabla_k \nabla_j$).

Враховуючи (11), рівняння Ґаусса $R_{ijk\ell} = K(g_{ik}g_{j\ell} - g_{i\ell}g_{jk})$, тотожність Річчі $(\nabla_{kj} - \nabla_{jk})u_i = K(u_k g_{ij} - u_j g_{ik})$, з (13) отримаємо, що

$$\psi_i g_{kj} + \psi_j g_{ki} = \nabla_{ij} u_k + K(u_k g_{ij} - u_i g_{jk}) +$$
$$+\, \overset{0}{u}_k\, b_{ij} - \overset{0}{u}_i\, b_{jk} - \overset{0}{u}_j\, b_{ik} - \overset{0}{u}\,\nabla_i b_{jk}\,. \tag{14}$$

Розглянемо умови інтегровності (5) і (6). На основі (9), (3) рівняння (5) дає

$$K(u_i \delta^k_j - u_j \delta^k_i) = b^k_i \overset{0}{u}_j - b^k_j \overset{0}{u}_i\,. \tag{15}$$

Згорнувши (15) за k, j, матимемо

$$K u_i = b^a_i \overset{0}{u}_a - H \overset{0}{u}_i\,. \tag{16}$$

Рівняння (6) за умов (9) і (3) набуде вигляду

$$\left(\nabla_i u^a - b^a_i \overset{0}{u}\right) b_{aj} = \left(\nabla_j u^a - b^a_j \overset{0}{u}\right) b_{ai}\,. \tag{17}$$

Умови інтегровності для (12):

$$\nabla_j \overset{0}{u}_i = \nabla_{ij} \overset{0}{u} = -\,\nabla_j b^a_i u_a - b^a_i \nabla_j u_a = -\,\nabla_i b^a_j u_a - b^a_j \nabla_i u_a\,.$$

Звідси як наслідок отримаємо

$$b_i^a \nabla_j u_a = b_j^a \nabla_i u_a .$$

На основі тотожності $b_k^a b_{a\ell} - b_\ell^a b_{ak} = 0$ умови (17) набувають вигляду

$$b_{ai} \nabla_j u^a = b_{aj} \nabla_i u^a , \tag{18}$$

і вони співпадають з умовами інтегровності для рівнянь (12).

Легко показати, що (15) є наслідком (12) і (17), а умова (17) є умовою інтегровності диференціальних рівнянь (12). Отже, суттєвими умовами ґрасмановості та геодезичності деформації залишаються (12), (14), (18). Це й треба було довести. ◊

1. 2. Дослідження основних рівнянь. За умови $K \neq 0$ можна ввести тензор $d^{ij} = \frac{1}{K}(2Hg^{ij} - b^{ij})$, який має важливу властивість $d^{i\alpha} b_{j\alpha} = \delta_j^i$. Тоді на основі цієї рівності з рівняння (1_4) знайдемо вираз

$$u_s = -\overset{0}{u}_i \, d_s^i . \tag{19}$$

Підставивши вираз (19) в (1_1), після спрощення матимемо

$$\overset{0}{u}_s (\nabla_j d_\alpha^s b_i^\alpha - \nabla_i d_\alpha^s b_j^\alpha) = 0 .$$

Покажемо, що вираз у дужках є тотожним нулем.

Оскільки $d_\alpha^s = \frac{1}{K}(2H\delta_\alpha^s - b_\alpha^s)$, $b_\alpha^s b_i^\alpha = 2Hb_i^s - K\delta_i^s$, то

$$\nabla_j d_\alpha^s b_i^\alpha - \nabla_i d_\alpha^s b_j^\alpha = \left\{ -\frac{K_j}{K^2}(2H\delta_\alpha^s - b_\alpha^s) + \frac{1}{K}(2H_j \delta_\alpha^s - \nabla_j b_\alpha^s) \right\} b_i^\alpha -$$

$$- \left\{ -\frac{K_i}{K^2}(2H\delta_\alpha^s - b_\alpha^s) + \frac{1}{K}(2H_i \delta_\alpha^s - \nabla_i b_\alpha^s) \right\} b_j^\alpha =$$

$$= -\frac{K_j}{K^2}(2Hb_i^s - 2Hb_i^s + K\delta_i^s) + \frac{1}{K}(2H_j b_i^s - \nabla_j b_\alpha^s b_i^\alpha) +$$

$$+ \frac{K_i}{K^2}(2Hb_j^s - 2Hb_j^s + K\delta_j^s) - \frac{1}{K}(2H_i b_j^s - \nabla_i b_\alpha^s b_j^\alpha) =$$

$$= -\frac{K_j}{K}\delta_i^s + \frac{K_i}{K}\delta_j^s + \frac{1}{K}(2H_j b_i^s - 2H_i b_j^s - \nabla_j b_\alpha^s b_i^\alpha + \nabla_i b_\alpha^s b_j^\alpha) =$$

$$= -\frac{K_j}{K}\delta_i^s + \frac{K_i}{K}\delta_j^s + \frac{1}{K}(\nabla_\alpha b_j^\alpha b_i^s + \nabla_\alpha b_i^s b_j^\alpha - (\nabla_\alpha b_i^\alpha b_j^s + \nabla_\alpha b_j^s b_i^\alpha)) =$$

$$= -\frac{K_j}{K}\delta_i^s + \frac{K_i}{K}\delta_j^s + \frac{K_j}{K}\delta_i^s - \frac{K_i}{K}\delta_j^s = 0 .$$

Отже, рівняння (1_1) виконуються з огляду на (1_4).

Знайдемо умови інтегровності для (1_2). Продиференціюємо його коваріантно за j:

$$\nabla_{ij} u_k = \nabla_j u_{ki} ,$$

і скористаємося тотожністю Річчі

$$u_s R_{kij}^s = \nabla_j u_{ki} - \nabla_i u_{kj} ,$$

звідки

$$K(u_i g_{kj} - u_j g_{ki}) = \nabla_j u_{ki} - \nabla_i u_{kj} .$$

На основі (1_3) маємо

$$K(u_i g_{kj} - u_j g_{ki}) = u_\alpha (b_i^\alpha b_{jk} - b_j^\alpha b_{ik}) .$$

Оскільки $b_i^\alpha b_{jk} - b_j^\alpha b_{ik} = K(\delta_i^\alpha g_{jk} - \delta_j^\alpha g_{ik})$, то очевидно, що останнє рівняння виконується тотожньо. Отже, рівняння (1_2) виконуються з огляду на (1_3).

Розглянемо умови інтегровності рівняння (1_4):

$$\nabla_j \overset{0}{u}_i = \nabla_j(-b_i^\alpha u_\alpha),$$

звідки отримаємо

$$-\nabla_j b_i^\alpha u_\alpha - b_i^\alpha \nabla_j u_\alpha + \nabla_i b_j^\alpha u_\alpha + b_j^\alpha \nabla_i u_\alpha = b_j^\alpha u_{\alpha i} - b_i^\alpha u_{\alpha j} = 0.$$

Отже, умови інтегровності рівняння (1_4) виконуються на підставі (1_1).

Покажемо, що умови інтегровності (1_3) мають вигляд

$$\nabla_\ell \psi_i g_{jk} - \nabla_j \psi_i g_{\ell k} = K(u_{ji} g_{k\ell} - u_{\ell i} g_{kj} + u_{kj} g_{i\ell} - u_{k\ell} g_{ij}) - \\ - \overset{0}{u} K(b_{ji} g_{k\ell} - b_{\ell i} g_{kj} + b_{kj} g_{i\ell} - b_{k\ell} g_{ij}).$$

Дійсно, спочатку продиференціювавши (1_3) коваріантно за ℓ:

$$\nabla_{j\ell} u_{ki} = \overset{0}{u}_\ell \nabla_i b_{jk} + \overset{0}{u} \nabla_{i\ell} b_{jk} - u_{a\ell} b_j^a b_{ik} - u_a \nabla_\ell b_j^a b_{ik} - \\ - u_a b_j^a \nabla_\ell b_{ik} + \nabla_\ell \psi_i g_{jk} + \nabla_\ell \psi_j g_{ik},$$

а потім, використавши рівняння Петерсона – Кодацці та (1_1), отримаємо

$$(\nabla_{j\ell} - \nabla_{\ell j}) u_{ki} = u_{\alpha i} R^\alpha_{kj\ell} + u_{k\alpha} R^\alpha_{ij\ell} = u_{\alpha i} K(\delta_j^\alpha g_{k\ell} - \delta_\ell^\alpha g_{kj}) + \\ + u_{k\alpha} K(\delta_j^\alpha g_{i\ell} - \delta_\ell^\alpha g_{ij}) = K(u_{ji} g_{k\ell} - u_{\ell i} g_{kj} + u_{kj} g_{i\ell} - u_{k\ell} g_{ij}) = \\ = \overset{0}{u}_\ell \nabla_i b_{jk} - \overset{0}{u}_j \nabla_i b_{\ell k} + \overset{0}{u} \nabla_{i\ell} b_{jk} - \overset{0}{u} \nabla_{ij} b_{\ell k} - u_{a\ell} b_j^a b_{ik} + u_{aj} b_\ell^a b_{ik} - \\ - u_a \nabla_\ell b_j^a b_{ik} + u_a \nabla_j b_\ell^a b_{ik} - u_a b_j^a \nabla_\ell b_{ik} + u_a b_\ell^a \nabla_j b_{ik} + \nabla_\ell \psi_i g_{jk} - \nabla_j \psi_i g_{\ell k}.$$

Звідси

$$K(u_{ji} g_{k\ell} - u_{\ell i} g_{kj} + u_{kj} g_{i\ell} - u_{k\ell} g_{ij}) = \\ = \overset{0}{u}(\nabla_{j\ell} b_{ik} - \nabla_{\ell j} b_{ik}) + \nabla_\ell \psi_i g_{jk} - \nabla_j \psi_i g_{\ell k}.$$

Оскільки

$$\nabla_{j\ell} b_{ik} - \nabla_{\ell j} b_{ik} = K(b_{jk} g_{i\ell} - b_{\ell k} g_{ij} + b_{ij} g_{k\ell} - b_{i\ell} g_{kj}),$$

то

$$\nabla_\ell \psi_i g_{jk} - \nabla_j \psi_i g_{\ell k} = K(u_{ji} g_{k\ell} - u_{\ell i} g_{kj} + u_{kj} g_{i\ell} - u_{k\ell} g_{ij}) - \\ - \overset{0}{u} K(b_{jk} g_{i\ell} - b_{\ell k} g_{ij} + b_{ij} g_{k\ell} - b_{i\ell} g_{kj}). \tag{20}$$

Отже, (20) є умовами інтегровності для (1_3).

Утворимо згортку (20) з $g^{\ell k}$:

$$\nabla_j \psi_i = K\Big[(a g_{ij} - u_{ij} - u_{ji}) + \overset{0}{u}(2b_{ij} - 2H g_{ij})\Big], \quad a = u_{k\ell} g^{k\ell}. \tag{21}$$

Знайдемо умови інтегровності для (21). Спочатку коваріантно продиференціюємо (21):

$$\nabla_{jk} \psi_i = K_k(a g_{ij} - u_{ij} - u_{ji}) + K(a_k g_{ij} - \nabla_k u_{ij} - \nabla_k u_{ji}) + \\ + \overset{0}{u}_k K(2b_{ij} - 2H g_{ij}) + \overset{0}{u} K_k(2b_{ij} - 2H g_{ij}) + \overset{0}{u} K(2\nabla_k b_{ij} - 2H_k g_{ij}),$$

а потім зробимо альтернування:

$$K(\psi_j g_{ik} - \psi_k g_{ij}) = K_k(a g_{ij} - u_{ij} - u_{ji}) - K_j(a g_{ik} - u_{ik} - u_{ki}) + \\ + \overset{0}{u}_k K(2b_{ij} - 2H g_{ij}) - \overset{0}{u}_j K(2b_{ik} - 2H g_{ik}) + \overset{0}{u}\big(K_k(2b_{ij} - 2H g_{ij}) - \\ - K_j(2b_{ik} - 2H g_{ik})\big) + \overset{0}{u} K(2H_j g_{ik} - 2H_k g_{ij}) + K\bigg(a_k g_{ij} - a_j g_{ik} - \\ - \Big(\overset{0}{u} \nabla_j b_{ki} - u_\alpha b_k^\alpha b_{ji} + \psi_j g_{ki} + \psi_k g_{ij}\Big) - \Big(\overset{0}{u} \nabla_i b_{kj} - u_\alpha b_k^\alpha b_{ij} + \\ + \psi_i g_{kj} + \psi_k g_{ji}\Big) + \overset{0}{u} \nabla_k b_{ji} - u_\alpha b_j^\alpha b_{ki} + \psi_k g_{ji} + \psi_j g_{ik} + \overset{0}{u} \nabla_i b_{jk} - \\ - u_\alpha b_j^\alpha b_{ik} + \psi_i g_{jk} + \psi_j g_{ki}\bigg).$$

Зважаючи на (1_4), після спрощення матимемо

$$K_k(ag_{ij}-u_{ij}-u_{ji})-K_j(ag_{ik}-u_{ik}-u_{ki})+K(a_kg_{ij}-a_jg_{ik})-$$
$$-2KH\overset{0}{u}_k g_{ij}+2KH\overset{0}{u}_j g_{ik}+\overset{0}{u}K_k(2b_{ij}-2Hg_{ij})-\overset{0}{u}K_j(2b_{ik}-$$
$$-2Hg_{ik})+\overset{0}{u}K(2H_jg_{ik}-2H_kg_{ij})=0. \qquad (22)$$

2. Афінні деформації, що зберігають ґрасманів образ.

Теорема 2. *Поверхні, для яких $K\neq 0$, допускають лише тривіальні афінні PG-деформації.*

Д о в е д е н н я. За умови $\psi_i=0$ з (21) маємо

$$ag_{i\ell}-u_{i\ell}-u_{\ell i}+\overset{0}{u}(2b_{i\ell}-2Hg_{i\ell})=0. \qquad (23)$$

З рівняння (22) за умови (23) отримаємо

$$K\left(\overset{0}{u}_k(-2Hg_{ij})-\overset{0}{u}_j(-2Hg_{ik})+\overset{0}{u}(2H_jg_{ik}-2H_kg_{ij})+a_kg_{ij}-a_jg_{ik}\right)=0.$$

Згорнемо це рівняння з тензором g^{ij} і врахуємо, що $K\neq 0$:

$$a_k-2H\overset{0}{u}_k-2H_k\overset{0}{u}=0.$$

Проінтегрувавши цей вираз, отримаємо, що $a=2H\overset{0}{u}+C$ (де $C=\mathrm{const}$). На підставі останньої рівності рівняння (23) зводиться до рівняння

$$u_{ki}+u_{ik}=2\overset{0}{u}b_{ik}+Cg_{ik}. \qquad (24)$$

Зауважимо, що при $C=0$ маємо згинання [2, с. 318].

Тензор u_{ki} завжди можна подати як суму симетричного і кососиметричного тензорів:

$$u_{ki}=v_{ki}+\mu C_{ik}. \qquad (25)$$

Тоді на підставі (24) та (25) запишемо

$$v_{ik}=\overset{0}{u}b_{ik}+\frac{C}{2}g_{ik}. \qquad (26)$$

Підставимо (26) в (1_3):

$$\nabla_j u_{ki}=\overset{0}{u}\nabla_i b_{jk}+\overset{0}{u}_j b_{ik}=\nabla_j v_{ki}+\mu_j C_{ki}=\overset{0}{u}\nabla_i b_{jk}+\overset{0}{u}_j b_{ik}+\mu_j C_{ki}.$$

Маємо, що $\mu_j=0$, тобто $\mu=\mathrm{const}=C_1$. Отже,

$$u_{ki}=\overset{0}{u}b_{ik}+\frac{C}{2}g_{ik}+C_1C_{ik}. \qquad (27)$$

Перевіркою можна переконатися, що (27) задовольняє (20) і (16) за умов $H=0$ або $C_1=0$, а умови інтегровності (27) виконуються з огляду на (1_2) та (1_4).

Маємо змішану систему типу системи Коші, яка при певних початкових значеннях має єдиний розв'язок.

За умови $\psi_i=0$ відповідно до [5] маємо $\nabla_k\delta g_{ij}=0$, що дає $\delta g_{ij}=Cg_{ij}$, тобто отримали гомотетію. Це й потрібно було довести. ◊

3. *PG*-деформації поверхонь сталої ґауссової кривини та поверхонь обертання.

Теорема 3. *Поверхні сталої ненульової гауссової кривини допускають лише тривіальні геодезичні деформації, що зберігають ґрасманів образ, і вони є гомотетичними.*

Д о в е д е н н я. Згорнемо (1_3) з g^{ki}. Матимемо, що

$$a_j=2H\overset{0}{u}_j+2H_j\overset{0}{u}+3\psi_j, \qquad (28)$$

де $a=u_{kj}g^{kj}$. Проінтегрувавши (28), отримаємо, що $a=2H\overset{0}{u}+3\psi+C$.

Тоді для таких поверхонь з рівнянь (22) та за умов теореми на підставі (28) маємо, що $\psi_i = 0$. Що й потрібно було довести. ◊

Теорема 4. *Якщо поверхня обертання* $r = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \varphi(\rho))$ $(K \neq 0)$ *допускає геодезичну деформацію, то вона може бути лише гомотетичною деформацією.*

Д о в е д е н н я. Дослідимо систему (1) для поверхонь обертання. Для такої параметризації поверхні маємо

$$g_{12} = b_{12} = 0\,, \qquad \nabla_2 b_{11} = \nabla_1 b_{21} = \nabla_1 b_{12} = \nabla_2 b_{22} = 0\,.$$

У розгорнутому вигляді (1_1) дає одне суттєве рівняння

$$b_1^1 u_{12} = b_2^2 u_{21}\,, \tag{29}$$

а (1_4) – два рівняння:

$$\overset{0}{u}_1 = -\,b_1^1 u_1\,, \qquad \overset{0}{u}_2 = -\,b_2^2 u_2\,. \tag{30}$$

Умови інтегровності рівнянь (30) за умов (29) і $\nabla_1 b_2^2 \neq 0$ дають, що $u_2 = 0$. Тоді з (30) легко побачити, що

$$\overset{0}{u} = \overset{0}{u}(\rho)\,, \qquad u_1 = u_1(\rho)\,. \tag{31}$$

Оскільки $\nabla_k u_i = \partial_k u_i - \Gamma_{ik}^{\alpha} u_{\alpha}$, $\nabla_k u_{ij} = \partial_k u_{ij} - \Gamma_{ik}^{\alpha} u_{\alpha j} - \Gamma_{jk}^{\alpha} u_{i\alpha}$, то на підставі (31) отримуємо, що $\nabla_2 u_1 = \nabla_1 u_2 = 0$, $\nabla_1 u_{12} = \nabla_1 u_{21} = 0$, $\nabla_2 u_{12} = \nabla_2 u_{21}$.

З рівнянь (1_3) на основі попередніх рівностей маємо, що $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = 0$. Як зазначалось вище, всяка афінна деформація є гомотетичною. Це й потрібно було довести. ◊

1. *Безкоровайна Л. Л.* Ареальні нескінченно малі деформації і врівноважені стани пружної оболонки: Навч. посібн. – Одеса: Астропринт, 1999. – 168 с.
2. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. – Москва: Наука, 1988. – 509 с.
3. *Лейко С. Г.* Инфинитезимальные поворотные преобразования и деформации поверхностей евклидового пространства // Докл. РАН. – 1994. – **344**, № 2. – С. 162–164.
4. *Радулович Ж,. Микеш Й., Гаврильченко М. Л.* Геодезические отображения и деформации римановых пространств. – Одесса: Оломоуц, 1997. – 127 с.
5. *Синюков Н. С., Гаврильченко М. Л.* Бесконечно малые геодезические деформации поверхностей // III респ. конф. математиков Белоруссии, Минск, 1971.
6. *Федченко Ю. С.* Специальные аффинные деформации поверхностей // Тез. докл. Междунар. конф. «Геометрия в Одессе-2006». – С. 156–157.
7. *Фесенко Е. Д.* Бесконечно малые конформные деформации замкнутых поверхностей положительной гауссовой кривизны // Изв. вузов. Математика. – 1969. – № 3. – С. 72–77.
8. *Fomenko V. T.* ARG-deformations of a hypersurfaces // Tensor. – 1993. – **54.** – P. 28–34.

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ДЕФОРМАЦИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ, КОТОРЫЕ СОХРАНЯЮТ ГРАССМАНОВ ОБРАЗ

Исследуются геодезические деформации поверхностей, которые сохраняют грассманов образ. Найдена основная система уравнений таких деформаций, изучен случай аффинных деформаций. Показано, что поверхности вращения допускают лишь аффинные деформации.

GEODESIC DEFORMATIONS OF SURFACES WHICH SAVE GRASSMANIAN IMAGE

Geodesic deformations of surfaces which save Grassmanian image are studied. The basic system of equations for this deformations is found. The case of affine deformations is studied. It is proved that the surfaces of rotation permit affine deformations only.

Одеська нац. акад. харч. технологій, Одеса

Одержано
20.05.08