УДК 539.3

О. П. Сушко

РОЗПОДІЛ ТЕМПЕРАТУРИ В ТІЛІ ПРИ ТЕПЛОВИДІЛЕННІ ПО ЕЛІПТИЧНІЙ ОБЛАСТІ

Сингулярним інтегральним рівнянням з полярним ядром описано температурне поле в тілі, зумовлене тепловиділенням по еліптичній області. Наведено точний розв'язок цього рівняння, якщо його права частина є поліномом, і аналітично-чисельний – для довільної правої частини. Досліджено вплив зміни ексцентриситету еліпса на розподіл температури в тілі.

Матеріали, які широко використовуються в техніці, містять чужорідні включення, тріщини та інші неоднорідності структури, які не вдається усунути навіть сучасними технологічними процесами їх виготовлення. Наявність таких дефектів різних геометричних форм суттєво впливає на міцність і руйнування реальних тіл, що знаходяться в умовах нерівномірного нагріву, оскільки температура або теплові потоки, задані на включеннях та тріщинах, зумовлюють виникнення напружень стиску або розтягу, які призводять до гальмування або росту тріщин [10, 14]. Тому важливе значення має дослідження напруженого стану тіла з теплоактивними тріщинами [4, 5, 8, 9] або з тепловиділювальними включеннями [2, 3, 7, 13], у якому проміжним етапом є визначення температурного поля.

У роботі [7] при дослідженні термопружного стану тіла з тепловиділювальною круговою областю показано, що нормальні напруження на місці розташування тепловиділення пропорційні до температури. Метою цієї роботи є визначення температурного поля в тілі при тепловиділенні по еліптичній області.

Постановка задачі. Розглянемо пружне ізотропне тіло, в якому по еліптичній області S задана температура або тепловий потік. Надалі таку область будемо називати тепловиділювальним включенням.

З областю S зв'яжемо систему декартових координат $Ox_1x_2x_3$ таким чином, що з її півосями a і b збігаються відповідно координатні осі Ox_1 та Ox_2, а сама область S лежить у площині $x_3 = 0$.

Зумовлену тепловиділенням стаціонарну температуру подамо через ньютонівський потенціал простого шару у вигляді [11]

$$T(x^*) = \frac{1}{4\pi\lambda} \iint_S \frac{w(\xi)}{R(x^*,\xi)} d_\xi S, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2), \quad x^* = x^*(x_1, x_2, x_3), \tag{1}$$

де λ – коефіцієнт теплопровідності, $w(\xi)$ – інтенсивність теплових джерел в області S, $R(x^*,\xi) = \sqrt{(x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2 + x_3^2}$. Задаючи різні вирази для функцій $w(\xi)$, за формулою (1) визначаємо температуру в довільній точці тіла.

В області S ($x_3 = 0$) температурне поле описується так:

$$\frac{1}{4\pi\lambda} \iint_S \frac{w(\xi)}{R(x,\xi)} d_\xi S = T(x), \qquad R(x,\xi) = R(x^*,\xi)\Big|_{x_3=0}. \tag{2}$$

Зауважимо, що інтегральне рівняння вигляду (2) зустрічається також в контактних задачах теорії пружності при дії гладкого штампа на пружний півпростір. Тоді воно має вигляд [12]

$$\frac{1-\nu^2}{\pi E} \iint_S \frac{P(\xi)}{R(x,\xi)} d_\xi S = f(x),$$

ISSN 1810-3022. Прикл. проблеми мех. і мат. – 2008. – Вип. 6. – С. 187–192.

де E − модуль пружності, ν − коефіцієнт Пуассона, $P(x)$ − контактний тиск між штампом і півпростором, а функція $f(x)$ визначається геометрією основи штампа та його переміщенням.

Інтеграл у виразі (2) в області S є слабкосингулярним, тому його необхідно визначати аналітично, а поза нею − регулярним, тому його можна знаходити чисельно.

Метод розв'язування. Інтегральне рівняння першого роду типу ньютонівського потенціалу (2) при довільній правій частині має єдиний розв'язок в класі функцій, які перетворюються в нескінченність порядку кореня квадратного на контурі області S [15], тобто, коли $w(\xi)$ можна записати у вигляді

$$w(\xi) = \frac{\varphi(\xi)}{L(\xi)}, \qquad L(\xi) = \sqrt{1 - \frac{\xi_1^2}{a^2} - \frac{\xi_2^2}{b^2}}. \tag{3}$$

Якщо ж права частина рівняння (2) є поліномом деякого степеня, то функція $\varphi(\xi)$ також є поліномом того ж степеня.

Нехай $T(x)$ має вигляд

$$T(x) = t_{00} + t_{10}x_1 + t_{01}x_2 + t_{11}x_1x_2 + t_{20}x_1^2 + t_{02}x_2^2, \tag{4}$$

тоді

$$\varphi(\xi) = c_{00} + c_{10}\xi_1 + c_{01}\xi_2 + c_{11}\xi_1\xi_2 + c_{20}\xi_1^2 + c_{02}\xi_2^2. \tag{5}$$

Підставивши (4) і (5) в (2) і обчисливши інтеграли [12, 15], одержимо формули для знаходження коефіцієнтів t_{ij} за відомими c_{ij} ($i, j = 1, 2$):

$$t_{00} = 2\pi b F(k) c_{00} + \frac{\pi a^2 b}{k^2}\left[E(k) - k'^2 F(k)\right] c_{20} + \frac{\pi b^3}{k^2}\left[F(k) - E(k)\right] c_{02},$$

$$t_{10} = \frac{2\pi b}{k^2}\left[F(k) - E(k)\right] c_{10}, \qquad t_{01} = \frac{2\pi b}{k^2}\left[E(k) - k'^2 F(k)\right] c_{01},$$

$$t_{11} = \frac{2\pi b}{k^4}\left[(2 - k^2)E(k) - 2k'^2 F(k)\right] c_{11},$$

$$t_{20} = \frac{\pi b}{k^4}\left[2F(k) - (2 + k^2)E(k)\right] c_{20} + \frac{\pi b k'^2}{k^4}\left[2E(k) - (2 - k^2)F(k)\right] c_{02},$$

$$t_{02} = \frac{\pi b}{k^4}\left[2E(k) - (2 - k^2)F(k)\right] c_{20} + \frac{\pi b}{k^4}\left[2k'^2 F(k) - (2 - 3k^2)E(k)\right] c_{02}, \tag{6}$$

де $k^2 = 1 - \dfrac{b^2}{a^2}$, $k' = \dfrac{b}{a}$, $F(k)$ та $E(k)$ − повні еліптичні інтеграли відповідно 1-го і 2-го роду.

Якщо ж в області S задана температура, тобто відомі коефіцієнти t_{ij}, то c_{ij} знаходимо за формулами

$$c_{00} = \frac{t_{00}}{2\pi b F(k)} - \frac{c_{20} a^2}{2k^2 F(k)}\left[E(k) - k'^2 F(k)\right] - \frac{c_{02} b^2}{2k^2 F(k)}\left[F(k) - E(k)\right],$$

$$c_{10} = \frac{k^2 t_{10}}{2\pi b\left[F(k) - E(k)\right]}, \qquad c_{01} = \frac{k^2 t_{01}}{2\pi b\left[E(k) - k'^2 F(k)\right]},$$

$$c_{11} = \frac{k^4 t_{11}}{2\pi b\left[(2-k^2)E(k) - 2k'^2 F(k)\right]},$$

$$c_{20} = \frac{k^4 t_{20}}{\pi b\left[2F(k) - (2+k^2)E(k)\right]} - c_{02}k'^2 \frac{2E(k) - (2-k^2)F(k)}{\left[2F(k) - (2+k^2)E(k)\right]},$$

$$c_{02} = \frac{k^4 t_{02}}{\pi b A} - t_{20}\frac{k^4}{\pi b A}\frac{2E(k) - (2-k^2)F(k)}{\left[2F(k) - (2+k^2)E(k)\right]},$$

$$A = 2k'^2 F(k) - (2-3k^2)E(k) - k'^2 \frac{\left[2E(k) - (2-k^2)F(k)\right]^2}{\left[2F(k) - (2+k^2)E(k)\right]}.$$

Інтегральне рівняння (2) можна також розв'язувати аналітично-чисельним методом, попередньо взаємно однозначно відобразивши область S на круг одиничного радіуса [6].

Для еліптичної області з півосями a і b в заданій системі координат таке відображення визначається так:

$$\begin{cases} x_1 = a y_1, \\ x_2 = b y_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} \xi_1 = a\eta_1, \\ \xi_2 = b\eta_2, \end{cases} \tag{7}$$

де y_1, y_2 – декартові координати точок одиничного круга в системі координат Oy_1y_2 з початком O в його центрі.

Підставляючи (7) у (3) і (2), одержуємо

$$\frac{1}{4\pi\lambda}\iint_{S_1} \frac{\psi(\eta)}{\sqrt{1-\eta_1^2-\eta_2^2}\,R(y,\eta)}\,d_\eta S = T(y), \tag{8}$$

$$R(y,\eta) = \sqrt{a^2(y_1-\eta_1) + b^2(y_2-\eta_2)},$$

де S_1 – круг одиничного радіуса, $\psi(\eta) = ab\varphi(\xi)$.

Інтегральне рівняння (8), крім полярної особливості в точці джерела, має ще й кореневу особливість на контурі області інтегрування. Для їх усунення використаємо метод регуляризації, який у першому випадку передбачає таку інтерпретацію слабкосингулярного інтеграла в рівнянні (8):

$$\iint_{S_1} \frac{\psi(\eta)}{\sqrt{1-\eta_1^2-\eta_2^2}\,R(y,\eta)}\,d_\eta S = 2\pi F(k)\psi(y) + \iint_{S_{10}} \frac{\psi(\eta)-\psi(y)}{\sqrt{1-\eta_1^2-\eta_2^2}\,R(y,\eta)}\,d_\eta S, \tag{9}$$

де $F(k)$ – повний еліптичний інтеграл першого роду, S_{10} – двозв'язна область, отримана з кругової області одиничного радіуса S_1 видаленням з неї малого околу з центром у точці $\eta = y$. Зауважимо, що в поданні (9) використано точне значення інтеграла

$$\iint_{S_1} \frac{d_\eta S}{\sqrt{1-\eta_1^2-\eta_2^2}\,R(y,\eta)} = 2\pi F(k).$$

Кореневу особливість усуваємо заміною змінних

$$\begin{cases} y_1 = \cos z_1 \cos z_2, \\ y_2 = \cos z_1 \sin z_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} \eta_1 = \cos\zeta_1 \cos\zeta_2, \\ \eta_2 = \cos\zeta_1 \sin\zeta_2, \end{cases} \tag{10}$$

де нові змінні $z(z_1, z_2)$ і $\zeta(\zeta_1, \zeta_2)$ визначені у прямокутній області S_1^*: $\{0 \le z_1,$ $\zeta_1 \le \pi/2,\ 0 \le z_2,\ \zeta_2 \le 2\pi\}$.

Підставивши (9) і (10) у (8), отримаємо регулярний аналог інтегрального рівняння для визначення функції $\psi(\zeta)$:

$$\psi(z)\left[2\pi F(k) - I_0(z)\right] + \iint\limits_{S_{10}^*} \frac{\psi(\zeta)\, d_\zeta S}{L(\zeta)\, R(\zeta, z)} = 4\pi\lambda T(z),$$

$$I_0(z) = \iint\limits_{S_{10}^*} \frac{d_\zeta S}{L(\zeta)\, R(\zeta, z)},$$

де область S_{10}^* отримується з S_1^* видаленням з неї малого околу з центром в точці $\zeta = z$.

Результати обчислень. Нехай в тілі по еліптичній області S інтенсивність теплових джерел $w(\xi)$ в області S має вигляд

$$w(\xi) = \frac{c_{00} + c_{20}\xi_1^2 + c_{02}\xi_2^2}{L(\xi)}.$$

Тоді, використовуючи формулу (4), температуру всередині області тепловиділення запишемо у вигляді

$$T(x) = t_{00} + t_{20}x_1^2 + t_{02}x_2^2. \tag{11}$$

Якщо вибрати

$$c_{00} = q, \qquad c_{20} = -\frac{q}{a^2}, \qquad c_{02} = -\frac{q}{b^2}, \tag{12}$$

де q − стала кількість тепла з одиниці площі області S, тоді $w(\xi) = L(\xi)$.

Підставивши (12) послідовно в (6), а потім в (11), одержимо вираз для температури всередині області S:

$$T(x) = \frac{bq}{4\lambda}\left\{F(k) - \frac{x_1^2}{a^2k^2}\left[F(k) - E(k)\right] - \frac{x_2^2}{b^2k^2}\left[E(k) - (1-k^2)F(k)\right]\right\}. \tag{13}$$

Зауважимо, що формула (13) співпадає з наведеною в роботі [1].

Температуру поза областю S знаходимо за формулою

$$T(x) = \frac{q}{4\pi\lambda}\iint\limits_S \frac{L(\xi)}{R(x,\xi)}\, d_\xi S.$$

На рис. 1 та рис. 2 зображено зведені значення температури $\bar{T} = \dfrac{8\lambda T}{\pi bq}$, обчислені в площині $x_3 = 0$ відповідно в залежності від $\bar{x}_1 = \dfrac{x_1}{a}$ (рис. 1) або від $\bar{x}_2 = \dfrac{x_2}{b}$ (рис. 2) для значень $\dfrac{b}{a} = 0.1,\ 0.3,\ 0.5,\ 0.7$. Маркована крива описує температуру по круговій області, тобто, коли $a = b$.

Із аналізу наведених графіків випливає, що при видовженні еліпса температура вздовж меншої його півосі зростає швидше, ніж уздовж більшої.

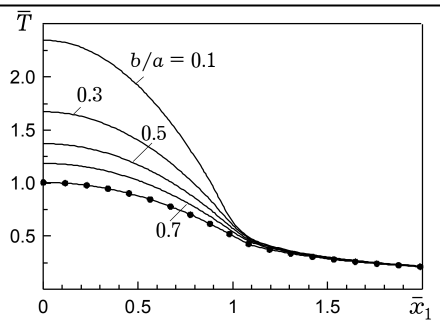

Рис. 1

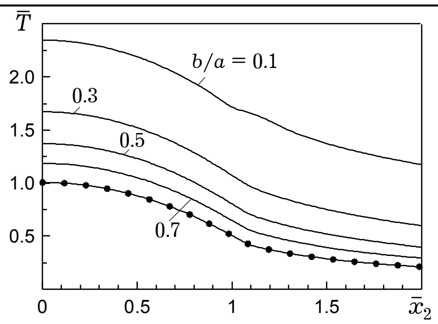

Рис. 2

Висновки. Наведеними в роботі виразами для температури описується також температурне поле $T(x^*)$ у півбезмежному тілі $x_3 \ge 0$, коли його межа $x_3 = 0$ термоізольована усюди, крім області S, на якій задана температура або тепловий потік.

Інтегральне рівняння для визначення теплових джерел при заданій в області S температурі можна використати також в контактних задачах теорії пружності для знаходження контактного тиску під еліптичним гладким штампом, що діє на півпростір.

1. *Александров В. М., Чебаков М. И.* Введение в механику контактных взаимодействий. – Ростов-на-Дону: Изд-во ООО «ЦВВР», 2005. – 108 с.
2. *Власов Н. М., Федик И. И.* Тепловыделяющие элементы ядерных ракетных двигателей. – Москва: ЦНИИатоминформ, 2001. – 208 с.
3. *Зашкильняк И. М., Кит Г. С., Колесов В. С., Федик И. И.* Напряженное состояние диска с круговыми тепловыделяющими включениями // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1979. – Вып. 9. – С. 76–81.
4. *Кит Г. С., Сушко О. П.* Термоупругое состояние полупространства с параллельной к его границе теплоактивной трещиной // Прикл. механика. – 2007. – **43**, № 4. – С. 46–54.
5. *Кит Г. С., Сушко О. П.* Термоупругое состояние тела с двумя компланарными или параллельными теплоактивными трещинами // Теорет. и прикл. механика. – 2005. – Вип. 40. – С. 3–8.
6. *Кит Г. С., Хай М. В.* Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1989. – 283 с.
7. *Кіт Г. С.* Задачі стаціонарної теплопровідності та термопружності для тіла з тепловиділенням на круговій області (тріщині) // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51,** № 4. – С. 120–128.
8. *Кіт Г. С., Сушко О. П.* Термопружний стан півпростору з перпендикулярною до його краю теплоактивною круговою тріщиною // Фіз.-хім. мех. матеріалів. – 2005. – **41**, № 2. – С. 16–22.
9. *Кіт Г. С., Сушко О. П.* Термопружний стан півпростору з перпендикулярною до його межі теплоактивною еліптичною тріщиною // Фіз.-хім. мех. матеріалів. – 2006. – **42**, № 2. – С. 45–52.
10. *Мирсалимов В., Кадиев Р.* Закрытие трещины со связями между берегами в листовом элементе при воздействии наведенного температурного поля // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій / Під заг. ред. В. В. Панасюка. – Львів: Фіз.-мех. ін-т ім. Г. В. Карпенка НАН України, 2004. – С. 51–56.
11. *Новацкий В.* Вопросы термоупругости. – Москва: Изд-во АН СССР, 1962. – 364 с.
12. *Партон В. З. Перлин П. И.* Методы математической теории упругости. – Москва: Наука, 1981. – 688 с.
13. *Федик И. И., Колесов В. С., Михайлов В. Н.* Температурные поля и термонапряжения в ядерных реакторах. – Москва: Энергоатомиздат, 1985. – 280 с.
14. *Финкель В. М.* Физические основы торможения разрушения. – Москва: Металлургия, 1977. – 360 с.
15. *Хай М. В.* Двумерные интегральные уравнения типа ньютоновского потенциала и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1993. – 253 с.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ В ТЕЛЕ ПРИ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИИ ПО ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

Сингулярным интегральным уравнением с полярным ядром описано температурное поле в теле, вызванное тепловыделением по эллиптической области. Приведено точное решение этого уравнения, когда его правая часть является полиномом, и аналитически-численное решение для произвольной правой части. Исследовано влияние изменения эксцентриситета эллипса на распределение температуры в теле.

DISTRIBUTION OF THE TEMPERATURE IN A BODY UNDER HEAT EMISSION IN AN ELLIPTICAL DOMAIN

Temperature field in a body, caused by heat emission in a elliptical domain, has been determined. The influence of change of domain on the temperature distribution has been studied. It has been defined that stresses are compressible in the vicinity of heat emission domain and tensile near the body surface.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
28.07.08