УДК 514.764

К. М. Зубрілін

p-ГЕОДЕЗИЧНІ ДИФЕОМОРФІЗМИ ДОТИЧНИХ РОЗШАРУВАНЬ ІЗ ЗВ'ЯЗНІСТЮ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ЛІФТА, ІНДУКОВАНІ ГЕОДЕЗИЧНИМИ (ПРОЕКТИВНИМИ) ДИФЕОМОРФІЗМАМИ БАЗ

З погляду теорії p-геодезичних відображень досліджено дифеоморфізми дотичних розшарувань першого та другого порядків із зв'язністю повного ліфта, індуковані геодезичними (проективними) дифеоморфізмами базисних многовидів. Вивчено сплощуючі властивості дифеоморфізмів дотичних розшарувань першого порядку із зв'язностями горизонтального ліфта, індуковані геодезичними (проективними) дифеоморфізмами базисних многовидів.

Вступ. Вивченню сплощуючих властивостей диференційовних відображень присвячено декілька робіт. У роботі [1] з погляду теорії p-геодезичних відображень досліджено дифеоморфізми дотичних розшарувань першого та другого порядків, наділені повними ліфтами афінних зв'язностей на базах, які індуковані геодезичними (проективними) дифеоморфізмами базисних многовидів. Групи Лі таких перетворень розглянуто в роботі [2].

У роботі [3] вивчено сплощуючі властивості перетворень дотичного розшарування, наділеного повним ліфтом афінної зв'язності (псевдо)ріманового простору, що є базою, які індуковані конциркулярними перетвореннями базисного многовиду. Тут же виявлено певні геометричні особливості груп Лі таких перетворень у рамках теорії p-геодезичних відображень.

Сплощуючі властивості перетинів дотичного розшарування першого порядку щодо зв'язності повного ліфта виявлено в роботі [4].

Природним чином виникає задача вивчення сплощуючих властивостей дифеоморфізмів дотичних розшарувань першого порядку, наділених зв'язністю горизонтального ліфта. Це завдання ускладнюється тим, що горизонтальний ліфт афінної зв'язності без кручень є афінною зв'язністю на дотичному розшаруванні з нетривіальним крученням.

Ця робота присвячена вивченню сплощуючих властивостей дифеоморфізмів дотичних розшарувань першого порядку, наділених зв'язністю горизонтального ліфта, які індуковані геодезичними (проективними) дифеоморфізмами базисних многовидів.

Основні означення першого пункту (**п. 1)** узято з [2] і [3]. Теорема цього пункту показує, що вивчення сплощуючих властивостей дифеоморфізмів зводиться до вивчення сплощуючих властивостей довільною геодезичною кривою щодо спеціальної зв'язності – захвата афінної зв'язності.

Другий пункт (**п. 2**) присвячений ліфтам. Означення і властивості вертикального, повного й горизонтального ліфтів тензорних величин узяті з [7]. Крім того, в цьому пункті вводиться поняття E-ліфта тензорного поля типу $(1, 1)$ і розглядаються його властивості, які використовуються надалі.

Третій пункт (**п. 3**) є ключовим. Тут наводиться допоміжна лема, яка використовується для знаходження кривин довільної геодезичної кривої щодо захвата афінної зв'язності. Звідси вже випливає основна теорема про сплощуючі властивості дифеоморфізмів дотичних розшарувань зі зв'язністю горизонтального ліфта, які індуковані геодезичними (проективними) дифеоморфізмами баз.

1. *p*-геодезичні дифеоморфізми. Наведемо відомості з теорії p-геодезичних відображень, необхідні для подальшого викладу.

Візьмемо в n-вимірному диференційовному многовиді M з афінною зв'язністю ∇ гладку криву $\mathscr{C}$, яка в карті $(U; u^h)$, $h = 1, 2, \ldots, n$, описується параметричними рівняннями $u^h = x^h(t)$. Розглянемо векторні поля кривин уздовж кривої $\mathscr{C}$, які визначаються таким чином. Нехай ξ − поле дотичних векторів уздовж кривої $\mathscr{C}$. Очевидно, поле ξ у карті $(U; u^h)$ має компоненти $\xi^h = \dfrac{dx^h}{dt}$. Поле ξ_1 векторів першої кривини кривої $\mathscr{C}$ визначається як коваріантна похідна поля дотичних векторів уздовж кривої $\mathscr{C}$, тобто $\xi_1 = \nabla_t \xi$. Якщо поле ξ_{q-1} $(q-1)$-ї кривини кривої $\mathscr{C}$ вже визначено, то поле ξ_q векторів q-ї кривини − це коваріантна похідна від поля векторів $(q-1)$-ї кривини уздовж кривої $\mathscr{C}$, тобто $\xi_q = \nabla_t \xi_{q-1}$.

Означення 1. Говорять, що крива $\mathscr{C}$ у точці x має *сплощення* q*-го порядку,* якщо в точці x вектори $\xi, \xi_1, \ldots, \xi_{q-1}$ лінійно незалежні, а вектори $\xi, \xi_1, \ldots, \xi_{q-1}, \xi_q$ є лінійно залежними.

Крива, яка в кожній своїй точці має сплощення p-го порядку, називається *p-геодезичною* кривою.

Означення 2. Дифеоморфізм $\mu : M \to \bar{M}$ двох афінно зв'язних просторів (M, ∇) і $(\bar{M}, \bar{\nabla})$ називається *p-геодезичним,* якщо при цьому дифеоморфізмі всі геодезичні криві першого простору переходять у криві другого простору, в точках якого найбільший з порядків сплощення дорівнює p.

p-геодезичний дифеоморфізм $\rho : M \to M$ афінно зв'язного простору (M, ∇) на себе називається *p-геодезичним перетворенням* афінно зв'язного простору (M, ∇).

Як видно, вивчення сплощуючих властивостей дифеоморфізму μ зводиться до вивчення поведінки порядку сплощення точок кривої-образу $\bar{\mathscr{C}}$ при довільній зміні геодезичної кривої $\mathscr{C}$. Дослідження порядків сплощення точок кривої-образу $\bar{\mathscr{C}}$ в $\bar{M}$ можна звести до вивчення порядків сплощення відповідних точок геодезичної кривої $\mathscr{C}$ щодо спеціальної зв'язності на многовиді M − захвата афінної зв'язності $\bar{\nabla}$ дифеоморфізмом μ^{-1}.

Легко перевірити, що відображення $\tilde{\nabla} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, означуване правилом $\tilde{\nabla}_X Y = (\mu^{-1})_* \big(\bar{\nabla}_{(\mu_* X)} (\mu_* Y)\big)$ для довільних векторних полів $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, є афінною зв'язністю на M. Вона називається *захватом* афінної зв'язності $\bar{\nabla}$ дифеоморфізмом μ^{-1} [5, розд. 3, с. 189, §30].

Безпосередньо з означення 1 і правил диференціювання отримаємо таку лему.

Лема 1. *Нехай* $\gamma : (a, b) \to M$ − *параметризація кривої* $\mathscr{C}$ *у многовиді* M, $\mu : M \to \bar{M}$ − *дифеоморфізм многовидів,* $\bar{\nabla}$ − *афінна зв'язність на многовиді* $\bar{M}$, $\tilde{\nabla}$ − *захват* $\bar{\nabla}$ *дифеоморфізмом* μ^{-1} *і* $\bar{\gamma} = \mu \circ \gamma$ − *параметризація кривої-образу* $\bar{\mathscr{C}} = \mu(\mathscr{C})$. *Тоді векторне поле* $\bar{\xi}_q$ q*-ї кривини кривої-образу* $\bar{\mathscr{C}} = \mu(\mathscr{C})$ *відносно зв'язності* $\bar{\nabla}$ *співпадає з перенесенням векторного поля* ξ_q q*-ї кривини кривої* $\mathscr{C}$ *відносно захвата* $\tilde{\nabla}$, *тобто*

$$\bar{\xi}_q = \mu_* \xi_q, \qquad q = 1, 2, \ldots .$$

Звідси і з властивостей дифеоморфізмів отримуємо таку теорему.

Теорема 1. *Нехай* $\mu : M \to \bar{M}$ − *дифеоморфізм многовидів,* $\bar{\nabla}$ − *афінна зв'язність на* $\bar{M}$, $\tilde{\nabla}$ − *захват* $\bar{\nabla}$ *дифеоморфізмом* μ^{-1}, $\mathscr{C}$ − *гладка крива у многовиді* M, $\bar{\mathscr{C}} = \mu(\mathscr{C})$ − *крива-образ на* $\bar{M}$.

Для того щоб у точці $\mu(p) \in \mathscr{C}$, $p \in \mathscr{C}$, *крива-образ* $\bar{\mathscr{C}}$ *мала сплощення* k*-го порядку відносно зв'язності* $\bar{\nabla}$, *необхідно й достатньо, щоб у точці* $p \in \mathscr{C}$ *крива* $\mathscr{C}$ *мала сплощення* k*-го порядку відносно захвата* $\tilde{\nabla}$.

Легко перевірити, що правило $P(X,Y) = \tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$ визначає тензорне поле $P \in \mathfrak{T}_2^1(M)$, де X і Y − довільні гладкі векторні поля на M. Тензорне поле P тісно пов'язане з поняттям тензора афінної деформації H дифеоморфізму $\mu : M \to \bar{M}$ афінно зв'язних просторів [5, с. 153, *приклад* 6]. Саме для довільних векторних полів X і Y на многовиді M є правильною рівність $\mu_*(P(X,Y)) = H(X,Y)$ (яку неважко довести). Тому тензорне поле P так само називатимемо *тензором афінної деформації дифеоморфізму* μ. Нехай уздовж кривої $\mathscr{C}$ задано векторне поле χ. Тоді вираз для коваріантної похідної $\tilde{\nabla}_\gamma \chi$ набуде вигляду

$$\tilde{\nabla}_\gamma \chi = \nabla_\gamma \chi + P(\xi, \chi). \tag{1}$$

Звідси вже можна знаходити вектори $\tilde{\xi}_q$ кривин уздовж кривої $\mathscr{C}$ відносно зв'язності $\tilde{\nabla}$.

2. Ліфти. Наведемо відомості з теорії ліфтів, необхідні для подальшого викладу. Нехай M − диференційовний многовид, $T(M)$ − його дотичне розшарування.

Означення 3. *Вертикальним ліфтом функції* $f : M \to \mathbb{R}$ називається функція $f^V : T(M) \to \mathbb{R}$, яка визначається рівністю

$$f^V = f \circ \pi,$$

де $\pi : T(M) \to M$ − природна проекція дотичного розшарування $T(M)$ на базисний многовид M.

Означення 4. *Повним ліфтом функції* $f : M \to \mathbb{R}$ називається функція $f^C : T(M) \to \mathbb{R}$, яка визначається рівністю

$$f^C = \iota(df),$$

де відображення $\iota : \mathfrak{X}^*(M) \to \mathfrak{F}(T(M))$ кожному ковекторному полю $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$ зіставляє функцію $\iota\omega$ за правилом: якщо $\omega = \omega_j du^j$ − локалізація ω у карті $(U; u^h)$, то $\iota\omega = \omega_j y^j$ в індукованій карті $(\pi^{-1}(U); u^h, y^h)$.

Отже, в індукованій карті $f^C = y^i \dfrac{\partial f}{\partial u^i} \overset{\text{def}}{=} \partial f$.

Пропозиція 1. *Нехай* $\tilde{X}$ *і* $\tilde{Y}$ − *такі векторні поля на* $T(M)$, *що для будь-якої функції* $f \in \mathfrak{F}(M)$ *виконується рівність* $\tilde{X} f^C = \tilde{Y} f^C$. *Тоді* $\tilde{X} = \tilde{Y}$.

Означення 5. *Вертикальним ліфтом векторного поля* $X \in \mathfrak{X}(M)$ називається векторне поле $X^V \in \mathfrak{X}(T(M))$, яке визначається рівністю

$$X^V f^C = (Xf)^V$$

для будь-якої функції $f \in \mathfrak{F}(M)$.

Означення 6. *Векторне поле* $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(T(M))$ називається *вертикальним,* якщо для будь-якої функції $f \in \mathfrak{F}(M)$ виконується рівність $\tilde{X} f^V = 0$.

Нехай в індукованій карті векторне поле $\tilde{X}$ має компоненти $\begin{pmatrix} \tilde{X}^h \\ \tilde{X}^{\bar{h}} \end{pmatrix}$. Для того щоб $\tilde{X}$ було вертикальним, необхідно та достатньо, щоб $\tilde{X}^h = 0$.

Неважко показати, що для будь-якої функції $f \in \mathfrak{F}(M)$ справджується рівність

$$X^V f^V = 0\,,$$

тобто вертикальний ліфт є вертикальним векторним полем.

Означення 7. *Повним ліфтом векторного поля* $X \in \mathfrak{X}(M)$ називається векторне поле $X^C \in \mathfrak{X}(T(M))$, яке визначається рівністю

$$X^C f^C = (Xf)^C$$

для будь-якої функції $f \in \mathfrak{F}(M)$.

Якщо в карті $(U; u^h)$ векторне поле X має компоненти X^h, то в індукованій карті $(\pi^{-1}(U); u^h, y^h)$ вертикальний ліфт X^V має компоненти $\begin{pmatrix} 0 \\ X^h \end{pmatrix}$, а повний ліфт X^C має компоненти $\begin{pmatrix} X^h \\ \partial X^h \end{pmatrix}$, де $\partial X^h = y^j \dfrac{\partial X^h}{\partial u^j}$.

Пропозиція 2. *Нехай* $\tilde{S}$ *і* $\tilde{T}$ *− такі тензорні поля типу* $(0,s)$ *або* $(1,s)$ *на* $T(M)$, *де* $s > 0$, *що для будь-яких векторних полів* $X_1,\ldots,X_s \in \mathfrak{X}(M)$ *правильною є рівність* $\tilde{S}(X_1^C,\ldots,X_s^C) = \tilde{T}(X_1^C,\ldots,X_s^C)$. *Тоді* $\tilde{S} = \tilde{T}$.

Означення 8. *Вертикальним ліфтом ковекторного поля* ω *на* M називається ковекторне поле $\omega^V \in \mathfrak{X}^*(T(M))$, яке визначається рівністю

$$\omega^V X^C = (\omega(X))^V$$

для будь-якого векторного поля $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Означення 9. *Повним ліфтом ковекторного поля* $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$ називається ковекторне поле $\omega^C \in \mathfrak{X}^*(T(M))$, яке визначається рівністю

$$\omega^C(X^C) = (\omega(X))^C$$

для будь-якого векторного поля $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Якщо ковекторне поле ω у карті $(U; u^h)$ має компоненти ω_j, то в індукованій карті $(\pi^{-1}(U); u^h, y^h)$ вертикальний ліфт ω^V має компоненти $(\omega_j, 0)$, а повний ліфт ω^C має компоненти $(\partial\omega_j, \omega_j)$, де $\partial\omega_j = y^i \dfrac{\partial \omega_j}{\partial u^i}$.

Означення 10. *Вертикальним ліфтом довільного тензорного поля* $P \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ називається таке тензорне поле $P^V \in \mathfrak{T}_s^r(T(M))$, що відображення $P \to P^V$ є продовженням відображень $f \to f^V$, $X \to X^V$ і $\omega \to \omega^V$ на алгебру $\mathfrak{T}(M)$ тензорних полів, яке задовольняє умову

$$(P \otimes Q)^V = P^V \otimes Q^V.$$

Означення 11. *Повним ліфтом довільного тензорного поля* P *типу* (r,s) *на* M називається таке тензорне поле $P^C \in \mathfrak{T}_s^r(T(M))$, що відображення $P \to P^C$ є продовженням відображень $f \to f^C$, $X \to X^C$ і $\omega \to \omega^C$ на алгебру $T(M)$ тензорних полів, яке задовольняє умову

$$(P \otimes Q)^C = P^C \otimes Q^V + P^V \otimes Q^C.$$

Для тензорного поля S типу $(0,s)$ або $(1,s)$ і довільних векторних полів $X_1,\ldots,X_s \in \mathfrak{X}(M)$ і $\tilde{X}_1,\ldots,\tilde{X}_s \in \mathfrak{X}(T(M))$ виконуються рівності

$$S^V(\tilde{X}_1,\ldots,\tilde{X}_{i-1}, X_i^V, \tilde{X}_{i+1},\ldots,\tilde{X}_s) = 0\,,$$

$$S^V(X_1^C,\ldots,X_s^C) = (S(X_1,\ldots,X_s))^V\,,$$

$$S^C(X_1^V,\ldots,X_s^V) = (S(X_1,\ldots,X_s))^V\,,$$

$$S^C(X_1^C,\ldots,X_s^C) = (S(X_1,\ldots,X_s))^C. \qquad (2)$$

Для тензорних полів $F, G \in \mathfrak{T}_1^1(M)$ виконуються рівності

$$F^V \circ G^V = 0, \qquad F^V \circ G^C = (F \circ G)^V,$$
$$F^C \circ G^V = (F \circ G)^V, \qquad F^C \circ G^C = (F \circ G)^C.$$

Якщо δ – одиничний афінор на M, то δ^C є одиничним афінором на $T(M)$.

Нехай

$$S = S_{\ell j_1 \ldots j_s}{}^{i_1 \ldots i_r} \frac{\partial}{\partial u^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial u^{i_r}} \otimes du^\ell \otimes du^{j_1} \otimes \ldots \otimes du^{j_s}$$

– локалізація тензорного поля $S \in \mathfrak{T}_{s+1}^r(M)$ у карті $(U; u^h)$. Означимо в індукованій карті $(\pi^{-1}(U); u^h, y^h)$ тензорне поле γS правилом

$$\gamma S = y^\ell S_{\ell j_1 \ldots j_s}{}^{i_1 \ldots i_r} \frac{\partial}{\partial y^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial y^{i_r}} \otimes du^{j_1} \otimes \ldots \otimes du^{j_s}. \tag{3}$$

Ці локальні тензорні поля визначають глобальне тензорне поле $\gamma S \in \mathfrak{T}_{s-1}^r(T(M))$.

Для векторних полів $X_2, \ldots, X_s \in \mathfrak{X}(M)$ і тензорного поля $P \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ виконується рівність (доведення її через обмеження обсягу статті не наводимо)

$$\gamma\{P(\cdot, X_2, \ldots, X_s)\} = \gamma P(X_2^C, \ldots, X_s^C). \tag{4}$$

Для довільних тензорних полів P і Q правильною є рівність

$$\gamma\{P \otimes Q\} = \gamma P \otimes Q^V. \tag{5}$$

Нехай тепер M – диференційовний многовид із афінною зв'язністю ∇.

Означення 12. *Горизонтальним ліфтом тензорного поля P типу (r, s) на M* називається тензорне поле $P^H \in \mathfrak{T}_s^r(T(M))$, яке визначається рівністю

$$P^H = P^C - \nabla_\gamma P,$$

де $\nabla_\gamma P = \gamma\{\nabla_. P\}$.

Для функції $f \in \mathfrak{F}(M)$

$$f^H = 0.$$

Нехай у карті $(U; u^h)$ афінна зв'язність ∇ має компоненти $\Gamma_{j\,i}^{\,h}$.

Якщо векторне поле X у карті $(U; u^h)$ має компоненти X^h, то горизонтальний ліфт X^H в індукованій карті $(\pi^{-1}(U); u^h, y^h)$ має компоненти $\begin{pmatrix} X^h \\ -\Gamma_i^h X^i \end{pmatrix}$, де $\Gamma_i^h = y^j \Gamma_{j\,i}^{\,h}$.

Якщо ковекторне поле ω у карті $(U; u^h)$ має компоненти ω_j, то горизонтальний ліфт ω^H в індукованій карті $(\pi^{-1}(U); u^h, y^h)$ має компоненти $(\Gamma_j^i \omega_i, \omega_j)$.

Для довільних тензорних полів P і Q виконується рівність

$$(P \otimes Q)^H = P^H \otimes Q^V + P^V \otimes Q^H. \tag{6}$$

Для тензорних полів $S \in \mathfrak{T}_s^0(M)$ або $S \in \mathfrak{T}_s^1(M)$ і векторних полів $X_1, \ldots, X_s \in \mathfrak{X}(M)$ виконуються рівності

$$S^V(X_1^H, \ldots, X_s^H) = (S(X_1, \ldots, X_s))^V,$$
$$S^H(X_1^V, \ldots, X_s^V) = 0,$$
$$S^H(X_1^H, \ldots, X_{i-1}^H, X_i^V, X_{i+1}^H \ldots, X_s^H) = (S(X_1, \ldots, X_s))^V,$$
$$S^H(X_1^H, \ldots, X_s^H) = (S(X_1, \ldots, X_s))^H.$$

Пропозиція 3. *Нехай* $\tilde S$ *і* $\tilde T$ *– тензорні поля типу* (r,s) *на* $T(M)$ *такі, що виконується рівність* $\tilde S(\tilde X_1,\ldots,\tilde X_s)=\tilde T(\tilde X_1,\ldots,\tilde X_s)$ *для всіх векторних полів* $\tilde X_i$, $i=1,\ldots,s$, *вигляду* X^V *або* X^H, *де* $X\in\mathfrak{X}(M)$. *Тоді* $\tilde S=\tilde T$.

Для будь-яких $X\in\mathfrak{X}(M)$ і $F\in\mathfrak{T}_1^1(M)$ виконуються рівності

$$F^H(X^V)=(F(X))^V,$$
$$F^H(X^C)=(F(X))^H+F^H(\nabla_\gamma X)=(F(X))^H+F^C(\nabla_\gamma X),$$
$$F^H(X^H)=(F(X))^H. \tag{7}$$

Для довільних $X\in\mathfrak{X}(M)$ і $\omega\in\mathfrak{X}^*(M)$ виконуються рівності

$$\omega^H(X^V)=(\omega(X))^V,\qquad \omega^H(X^C)=\omega^C(\nabla_\gamma X),\qquad \omega^H(X^H)=0.$$

Для довільних $F,G\in\mathfrak{T}_1^1(M)$ виконується рівність

$$(F\circ G)^H=F^H\circ G^H.$$

Якщо δ – одиничний афінор на M, то δ^H є одиничним афінором на $T(M)$.

Означення 13. *Горизонтальним ліфтом афінної зв'язності* ∇ *на* M називається така афінна зв'язність ∇^H на $T(M)$, яка визначається рівністю

$$\nabla^H_{X^C}Y^C=(\nabla_X Y)^C-\gamma\{R(\cdot,X)Y\},$$

де X,Y – векторні поля на M, R – тензор кривини афінної зв'язності ∇.

В індукованій карті $(\pi^{-1}(U);u^h,y^h)$ афінна зв'язність горизонтального ліфта ∇^H має компоненти $\tilde\Gamma_{JI}^{\ K}$, означувані рівностями

$$\tilde\Gamma_{ij}^{k}=\Gamma_{ij}^{k},\qquad \tilde\Gamma_{i\bar j}^{k}=0,\qquad \tilde\Gamma_{\bar i j}^{k}=0,\qquad \tilde\Gamma_{\bar i\bar j}^{k}=0,$$
$$\tilde\Gamma_{ij}^{\bar k}=\partial\Gamma_{ij}^{k}-y^sR_{sij}^{k},\qquad \tilde\Gamma_{i\bar j}^{\bar k}=\Gamma_{ij}^{k},\qquad \tilde\Gamma_{\bar i j}^{\bar k}=\Gamma_{ij}^{k},\qquad \tilde\Gamma_{\bar i\bar j}^{\bar k}=0. \tag{8}$$

Для довільного векторного поля $X\in\mathfrak{X}(M)$ і довільного тензорного поля K на M виконуються рівності

$$\nabla^H_{X^C}K^V=(\nabla_X K)^V,\qquad \nabla^H_{X^C}K^H=(\nabla_X K)^H,$$
$$\nabla^H_{X^V}K^V=0,\qquad \nabla^H_{X^V}K^H=0.$$

Нехай $\mu:M\to\bar M$ – дифеоморфізм многовидів, $\mu_*:T(M)\to T(\bar M)$ – індукований дифеоморфізм.

Захватом векторного поля $X\in\mathfrak{X}(M)$ дифеоморфізмом μ називається векторне поле $\mu_*X\in\mathfrak{X}(\bar M)$, яке визначається правилом

$$(\mu_*X)_{\mu(p)}=(\mu_*)_p(X_p),\qquad p\in M,$$

де $(\mu_*)_p:T_p(M)\to T_{\mu(p)}(\bar M)$ – диференціал (дотичне відображення) відображення μ у точці p [5, розд. 2, с. 112, §17].

Для будь-якого векторного поля $X\in\mathfrak{X}(M)$ виконуються рівності

$$(\mu_*)_*(X^V)=(\mu_*X)^V,\qquad (\mu_*)_*(X^C)=(\mu_*X)^C.$$

Антизахватом тензорного поля $B\in\mathfrak{T}_s^1(\bar M)$ дифеоморфізмом μ називається тензорне поле $\mu^*B\in\mathfrak{T}_s^1(M)$, означуване правилом

$$(\mu^*B)(X_1,\ldots,X_s)=(\mu^{-1})_*(B(\mu_*X_1,\ldots,\mu_*X_s))$$

для будь-яких векторних полів $X_1,\ldots,X_s\in\mathfrak{X}(M)$ [5, розд. 2, с. 112, §17].

Безпосередньо з властивостей дифеоморфізмів і поведінки тензорних полів під їх дією випливають наступні твердження.

Твердження 1. *Нехай* $\mu : M \to \bar{M}$ *– дифеоморфізм многовидів і тензорне поле* $\tilde{F} \in \mathfrak{T}_1^1(M)$ *є антизахватом тензорного поля* $\bar{F} \in \mathfrak{T}_1^1(\bar{M})$ *дифеоморфізмом* μ, *тобто* $\tilde{F} = \mu^* \bar{F}$. *Тоді векторне поле* $\gamma\tilde{F}$ *є захватом векторного поля* $\gamma\bar{F}$, *індукованим дифеоморфізмом* $(\mu_*)^{-1}$.

Твердження 2. *Нехай* $\mu : M \to \bar{M}$ *– дифеоморфізм многовида* M *на многовид* $\bar{M}$ *з афінною зв'язністю* $\bar{\nabla}$. *Якщо* $\tilde{\nabla}$ *– захват зв'язності* $\bar{\nabla}$ *дифеоморфізмом* μ^{-1}, *тобто* $\tilde{\nabla} = (\mu^{-1})_* \bar{\nabla}$, *то горизонтальний ліфт* $\tilde{\nabla}^H$ *є захватом горизонтального ліфта* $\bar{\nabla}^H$, *індукованим дифеоморфізмом* $(\mu_*)^{-1}$, *тобто* $\tilde{\nabla}^H = ((\mu_*)^{-1})_* (\bar{\nabla}^H)$.

Твердження 3. *Нехай* P *– тензор афінної деформації дифеоморфізму* $\mu : M \to \bar{M}$ *афінно зв'язних просторів* (M, ∇) *і* $(\bar{M}, \bar{\nabla})$ *без кручень. Тоді тензор афінної деформації* $\tilde{P}$ *індукованого дифеоморфізму* $\mu_* : T(M) \to T(\bar{M})$ *дотичних розшарувань із зв'язностями горизонтальних ліфтів відповідно* ∇^H *і* $\bar{\nabla}^H$ *для довільних векторних полів* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ *має вигляд*

$$\tilde{P}(X^C, Y^C) = P^H(X^C, Y^C) + \gamma\{(\nabla_X P(\cdot, Y))\} - \gamma\{P(\cdot, P(X, Y)) - P(X, P(\cdot, Y))\}.$$

Д о в е д е н н я. Нехай R – тензор кривини афінної зв'язності ∇ і $\tilde{R}$ – тензор кривини захвата $\tilde{\nabla}$. Тоді згідно з означенням 13, тензор афінної деформації $\tilde{P}$ індукованого дифеоморфізму μ_* набуває вигляду

$$\begin{aligned} \tilde{P}(X^C, Y^C) &= \widetilde{\bar{\nabla}^H_{X^C}} Y^C - \nabla^H_{X^C} Y^C = \\ &= (\tilde{\nabla}_X Y)^C - \gamma\{\tilde{R}(\cdot, X)Y\} - (\nabla_X Y)^C + \gamma\{R(\cdot, X)Y\} = \\ &= (P(X, Y))^C - \gamma\{\tilde{R}(\cdot, X)Y - R(\cdot, X)Y\} \end{aligned}$$

для будь-яких $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Враховуючи (4), знаходимо

$$\begin{aligned} \gamma\{\tilde{R}(\cdot, X)Y - R(\cdot, X)Y\} &= \gamma\{\nabla.\, P\}(X^C, Y^C) - \gamma\{(\nabla_X P)(\cdot, Y) + \\ &+ \{P(\cdot, P(X, Y)) - P(X, P(\cdot, Y))\}. \end{aligned}$$

З цієї рівності та властивостей повних ліфтів (2) на підставі означення 12 горизонтального ліфта тензорного поля знаходимо

$$\begin{aligned} \tilde{P}(X^C, Y^C) &= P^H(X^C, Y^C) + \gamma\{(\nabla_X P)(\cdot, Y)\} - \\ &- \gamma\{P(\cdot, P(X, Y)) - P(X, P(\cdot, Y))\}, \end{aligned}$$

що й потрібно було довести. ◊

Уведемо в розгляд поняття E-ліфта тензорного поля типу $(1, 1)$, яким користуватимемося надалі.

Означення 14. Нехай F – тензорне поле типу $(1, 1)$ на M. *Тензорне поле* $F^E \in \mathfrak{T}_1^1(T(M))$ визначається рівністю

$$F^E(X^C) = F^H(X^C) - F(X)^H$$

для будь-якого векторного поля $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Враховуючи другу з рівностей (7), знаходимо

$$F^E(X^C) = F^H(\nabla_\gamma X), \qquad F^E(X^C) = F^C(\nabla_\gamma X). \tag{9}$$

Із першої з рівностей (9) з урахуванням того, що $\delta^H = \tilde{\delta}$ – одиничний афінор на $T(M)$, безпосередньо випливає рівність

$$\nabla_\gamma X = \delta^E(X^C).$$

Лема 2. *Нехай тензорне поле* F *у карті* $(U; u^h)$ *має компоненти* F_i^k. *Тоді в індукованій карті* $(\pi^{-1}(U); u^h, y^h)$ *тензорне поле* F^E *має такі компоненти*: $F^E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F_s^k \Gamma_i^s & F_i^k \end{pmatrix}$.

Твердження 4. *Справджуються такі твердження:*

1°. Для довільного тензорного поля $F \in \mathfrak{T}_1^1(M)$ і будь-якого вертикального векторного поля $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(T(M))$ виконується рівність

$$F^E(\tilde{X}) = F^H(\tilde{X}).$$

2°. Для довільних тензорних полів $F, G \in \mathfrak{T}_1^1(M)$ виконується рівність

$$F^E(\gamma G) = \gamma(F \circ G).$$

3°. Для довільних тензорного поля $F \in \mathfrak{T}_1^1(M)$ і векторного поля $X \in \mathfrak{X}(M)$ виконуються рівності

$$F^E(X^V) = F(X)^V, \qquad F^E(X^H) = 0.$$

4°. Для довільних тензорних полів $F, G \in \mathfrak{T}_1^1(M)$ виконуються рівності

$$F^E \circ G^V = (F \circ G)^V, \qquad G^V \circ F^E = 0,$$

$$F^H \circ G^E = (F \circ G)^E, \qquad F^E \circ G^H = (F \circ G)^E.$$

5°. Для довільного ковекторного поля β на M і будь-якого тензорного поля $F \in \mathfrak{T}_1^1(M)$ виконуються рівності

$$\beta^C \circ F^E = (\beta \circ F)^H, \qquad \beta^V \circ F^E = 0, \qquad \beta^H \circ F^E = (\beta \circ F)^H.$$

Доведення отримуємо прямими обчисленнями на підставі властивостей ліфтів. ◊

Твердження 5. *Для будь-якого тензорного поля $F \in \mathfrak{T}_1^1(M)$ і довільного векторного поля $X \in \mathfrak{X}(M)$ виконується рівність*

$$\nabla^H_{X^C} F^E = (\nabla_X F)^E.$$

Доведення випливає з означень і властивостей ліфтів застосуванням правил диференціювання. ◊

Лема 3. *Для довільного тензорного поля $F \in \mathfrak{T}_1^1(M)$ і будь-якого векторного поля $X \in \mathfrak{X}(M)$ виконується рівність*

$$\nabla^H_{X^C} \gamma F = \gamma(\nabla_X F) + F^E(X^C).$$

Доведення. Візьмемо на M довільну карту $(U; u^k)$ і покажемо, що в індукованій карті $(\pi^{-1}(U); u^h, y^h)$ ця рівність виконується. Звідси випливатиме її справедливість на всьому $T(M)$.

Згідно з рівністю 3 для тензорного поля F маємо $\gamma F^i = 0$ і $\gamma F^{\bar{i}} = y^t F_t^i$. Враховуючи вирази (8) для коефіцієнтів $\tilde{\Gamma}^K_{IJ}$ горизонтального ліфта ∇^H в індукованій карті $(\pi^{-1}(U); u^h, y^h)$, матимемо

$$(\nabla^H_{X^C} \gamma F)^k = \frac{\partial \gamma F^k}{\partial \tilde{u}^i} X^i + \frac{\partial \gamma F^k}{\partial \tilde{u}^{\bar{i}}} y^s \partial_s X^i + \tilde{\Gamma}^k_{i\bar{j}} X^i y^s F^j_s =$$

$$= 0 \cdot X^i + 0 \cdot X^i + 0 \cdot X^i y^s F_s^j = 0 = \gamma(\nabla_X F)^k + F^E(X^C)^k,$$

$$(\nabla^H_{X^C} \gamma F)^{\bar{k}} = y^s (\nabla_X F_s^k) + y^s \Gamma^j_{is} X^i F^k_j + F^k_i \partial X^i =$$

$$= \gamma(\nabla_X F)^{\bar{k}} + (\Gamma^j_i F^k_j X^i + F^k_i \partial X^i) = \gamma(\nabla_X F)^{\bar{k}} + F^E(X^C)^{\bar{k}}.$$

Отримані вирази доводять потрібне. ◊

3. Дифеоморфізми дотичних розшарувань, індуковані геодезичними (проективними) дифеоморфізмами баз.

Означення 15. *Дифеоморфізм $\mu : M \to \bar{M}$ двох афінно зв'язних просторів (M, ∇) і $(\bar{M}, \bar{\nabla})$* називається *геодезичним* (*проективним*), якщо для будь-якої геодезичної кривої першого простору її образом є геодезична крива другого простору.

Пропозиція 4. *Тензор афінної деформації P геодезичного дифеоморфізму афінно зв'язних просторів без кручень у довільній системі координат виражається рівністю Леві-Чівіта*

$$P_{ij}^{\;k} = \beta_i \delta_j^k + \beta_j \delta_i^k ,$$

де δ − одиничний афінор, β − деяке ковекторне поле на M. В інваріантній формі ця рівність набуває вигляду

$$P(X,Y) = \beta(X)\delta(Y) + \beta(Y)\delta(X) ,$$

де X, Y − довільні векторні поля на M.

Усюди далі розглядатимемо геодезичний (проективний) дифеоморфізм $\mu : M \to \bar{M}$ афінно зв'язних просторів (M, ∇) і $(\bar{M}, \bar{\nabla})$ без кручень.

Будемо припускати, що дотичне розшарування $T(M)$ наділено горизонтальним ліфтом ∇^H, а дотичне розшарування $T(\bar{M})$ наділено горизонтальним ліфтом $\bar{\nabla}^H$. Доведемо таку допоміжну лему.

Лема 4. *Нехай уздовж геодезичної кривої $\mathscr{C}$, віднесеної до канонічного параметра t і яка лежить у дотичному розшаруванні $T(M)$, довільною лінійною комбінацією векторних полів $\tilde{\delta}(\xi)$, $\delta^V(\xi)$, $\delta^E(\xi)$, $\gamma\delta$ (точніше, їх звужень на криву $\mathscr{C}$) задано векторне поле χ :*

$$\chi = a\tilde{\delta}(\xi) + b\delta^V(\xi) + c\delta^E(\xi) + d\gamma\delta ,$$

де ξ − поле дотичних векторів уздовж кривої $\mathscr{C}$; a, b, c, d − деякі гладкі функції, задані уздовж кривої $\mathscr{C}$; δ − одиничний афінор на M і $\tilde{\delta}$ − одиничний афінор на дотичному розшаруванні $T(M)$.

Тоді коваріантна похідна $\tilde{\nabla}_t^H \chi$ цього векторного поля має такий самий вигляд:

$$\tilde{\nabla}_t^H \chi = a'\tilde{\delta}(\xi) + b'\delta^V(\xi) + c'\delta^E(\xi) + d'\gamma\delta ,$$

де функції a', b', c', d' визначаються співвідношеннями

$$a' = \nabla_t^H a + 2a\beta^V(\xi) ,$$

$$b' = \nabla_t^H b + 2a\beta^H(\xi) + 2b\beta^V(\xi) + a\gamma(\nabla\beta)(\xi) + a\gamma\beta\beta^V(\xi) + c\beta^H(\xi) + d\gamma\beta ,$$

$$c' = \nabla_t^H c + d + c\beta^V(\xi), \qquad d' = \nabla_t^H d + d\beta^V(\xi) + a(\nabla\beta - \beta\otimes\beta)^V(\xi,\xi) ,$$

а β − ковекторне поле з пропозиції 4.

Д о в е д е н н я. Використовуючи рівність (1), вираз для коваріантної похідної $\tilde{\nabla}_t^H \chi$ запишемо у вигляді

$$\tilde{\nabla}_t^H \chi = \nabla_t^H \chi + \tilde{P}(\xi, \chi) , \tag{10}$$

оскільки ліфт $\tilde{\nabla}^H$ захвата є захватом ліфта $\bar{\nabla}^H$.

Знайдемо вираз для тензора $\tilde{P}$ афінної деформації індукованого дифеоморфізму μ_*, скориставшись твердженням 3. Враховуючи властивості горизонтальних ліфтів (6) і рівність $\delta^H = \tilde{\delta}$, отримаємо

$$P^H(X^C, Y^C) = \beta^H(X^C)\delta^V(Y^C) + \beta^V(X^C)\tilde{\delta}(Y^C) + \\ + \tilde{\delta}(X^C)\beta^V(Y^C) + \delta^V(X^C)\beta^H(Y^C).$$

Враховуючи правила диференціювання, а також (4) і (5), знаходимо

$$\gamma\{(\nabla_X P)(\cdot, Y)\} = \gamma(\nabla\beta)(X^C)\,\delta^V(Y^C) + \gamma\delta\,(\nabla\beta)^V(Y^C, X^C) .$$

Неважко перевірити рівність

$$P(\cdot, P(X,Y)) - P(X, P(\cdot, Y)) = \beta(X)\beta(Y)\delta(\cdot) - \beta(\cdot)\beta(Y)\delta(X) .$$

Звідси, знову враховуючи (4) і (5), матимемо

$$\gamma\{P(\cdot, P(X,Y)) - P(X, P(\cdot, Y))\} = \beta^V(X^C)\beta^V(Y^C)\,\gamma\delta - \gamma\beta\,\beta^V(Y^C)\delta^V(X^C) .$$

На підставі твердження 3 отримаємо

$$\tilde{P}(X^C, Y^C) = \beta^H(X^C)\delta^V(Y^C) + \beta^V(X^C)\tilde{\delta}(Y^C) + \tilde{\delta}(X^C)\beta^V(Y^C) +$$
$$+ \delta^V(X^C)\beta^H(Y^C) + \gamma(\nabla\beta)(X^C)\,\delta^V(Y^C) + \gamma\delta\,(\nabla\beta)^V(Y^C, X^C) -$$
$$- \beta^V(X^C)\beta^V(Y^C)\,\gamma\delta + \gamma\beta\,\beta^V(Y^C)\delta^V(X^C).$$

Для одиничного тензорного поля δ типу (1,1) на M з огляду на твердження 4, 5 і лему 3 знайдемо рівності

$$\delta^E(\gamma\delta) = \gamma\delta, \qquad \delta^E \circ \delta^V = \delta^V, \qquad \nabla^H\delta^E = 0, \qquad \nabla^H\gamma\delta = \delta^E.$$

Використовуючи цей результат, отримаємо

$$\tilde{P}(\xi,\chi) = \beta^H(\xi)\delta^V(\chi) + \beta^V(\xi)\tilde{\delta}(\chi) + \tilde{\delta}(\xi)\beta^V(\chi) + \delta^V(\xi)\beta^H(\chi) +$$
$$+ \gamma(\nabla\beta)(\xi)\,\delta^V(\chi) + \gamma\delta\,(\nabla\beta)^V(\chi,\xi) - \beta^V(\xi)\beta^V(\chi)\,\gamma\delta + \gamma\beta\,\beta^V(\chi)\delta^V(\xi).$$

Безпосереднім обчисленням, з урахуванням властивостей ліфтів і твердження 5, матимемо

$$\tilde{P}(\xi,\chi) = \left(a\beta^V(\xi) + a\beta^V(\xi)\right)\tilde{\delta}(\xi) + \left(a\beta^H(\xi) + b\beta^V(\xi) + a\beta^H(\xi) + b\beta^V(\xi) + c\beta^H(\xi) +\right.$$
$$+ d\gamma\beta + a\gamma(\nabla\beta)(\xi) + a\gamma\beta\beta^V(\xi))\delta^V(\xi) + (c\beta^V(\xi))\delta^E(\xi) +$$
$$+ \left(d\beta^V(\xi) + a(\nabla\beta)^V(\xi,\xi) - a\beta^V(\xi)\beta^V(\xi)\right)\gamma\delta. \tag{11}$$

Тепер знайдемо $\nabla_t^H\chi$:

$$\nabla_t^H\chi = \nabla_t^H a\ \tilde{\delta}(\xi) + \nabla_t^H b\ \delta^V(\xi) + \nabla_t^H c\ \delta^E(\xi) + \nabla_t^H d\ \gamma\delta + d\delta^E(\xi). \tag{12}$$

Використовуючи рівності (10), (11) і (12), матимемо

$$\tilde{\nabla}_t^H\chi = \left(\nabla_t^H a + 2a\beta^V(\xi)\right)\tilde{\delta}(\xi) + \left(\nabla_t^H b + 2a\beta^H(\xi) + 2b\beta^V(\xi) + c\beta^H(\xi) + d\gamma\beta +\right.$$
$$+ a\gamma(\nabla\beta)(\xi) + a\gamma\beta\beta^V(\xi))\delta^V(\xi) + \left(\nabla_t^H c + d + c\beta^V(\xi)\right)\delta^E(\xi) +$$
$$+ \left(\nabla_t^H d + d\beta^V(\xi) + a(\nabla\beta)^V(\xi,\xi) - a\beta^V(\xi)\beta^V(\xi)\right)\gamma\delta.$$

Покладаючи

$$a' = \nabla_t^H a + 2a\beta^V(\xi),$$
$$b' = \nabla_t^H b + 2a\beta^H(\xi) + 2b\beta^V(\xi) + a\gamma(\nabla\beta)(\xi) + a\gamma\beta\beta^V(\xi) + c\beta^H(\xi) + d\gamma\beta,$$
$$c' = \nabla_t^H c + d + c\beta^V(\xi),$$
$$d' = \nabla_t^H d + d\beta^V(\xi) + a(\nabla\beta - \beta\otimes\beta)^V(\xi,\xi),$$

отримаємо потрібне. Лему доведено. ◊

Теорема 1. *Нехай $\mu : M \to \bar{M}$ – геодезичний (проективний) дифеоморфізм афінно зв'язних просторів (M,∇) і $(\bar{M},\bar{\nabla})$ без кручень. Тоді індукований дифеоморфізм $\mu_* : T(M) \to T(\bar{M})$ у загальному випадку є 4-геодезичним дифеоморфізмом дотичних розшарувань, що розглядаються як афінно зв'язні простори зі зв'язностями горизонтальних ліфтів.*

Доведення. Використовуємо лему 4 для знаходження кривин геодезичної кривої $\mathscr{C}$ відносно ліфта $\tilde{\nabla}^H$. Означимо тензорне поле ω правилом $\omega = \nabla\beta - \beta\otimes\beta$. Очевидним чином поле дотичних векторів ξ подамо у вигляді, вказаному у лемі 4 :

$$\xi = a_0\tilde{\delta}(\xi) + b_0\delta^V(\xi) + c_0\delta^E(\xi) + d_0\gamma\delta,$$

де $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, $c_0 = 0$ і $d_0 = 0$. Тоді згідно з лемою 4 перша кривина $\tilde{\xi}_1$ матиме вигляд

$$\tilde{\xi}_1 = \tilde{\nabla}_t^H\xi = a_1\tilde{\delta}(\xi) + b_1\delta^V(\xi) + c_1\delta^E(\xi) + d_1\gamma\delta,$$

де функції a_1, b_1, c_1, d_1 визначаються за правилом

$$a_1 = \nabla_t^H a_0 + 2a_0\beta^V(\xi) = 2\beta^V(\xi),$$
$$b_1 = \nabla_t^H b_0 + 2a_0\beta^H(\xi) + 2b_0\beta^V(\xi) + a_0\gamma(\nabla\beta)(\xi) + a_0\gamma\beta\beta^V(\xi) + c_0\beta^H(\xi) + d_0\gamma\beta =$$
$$= 2\beta^H(\xi) + \gamma(\nabla\beta)(\xi) + \gamma\beta\beta^V(\xi),$$

$$c_1 = \nabla_t^H c_0 + d_0 + c_0\beta^V(\xi) = 0\,,$$
$$d_1 = \nabla_t^H d_0 + d_0\beta^V(\xi) + a_0\omega^V(\xi,\xi) = \omega^V(\xi,\xi)\,.$$

Застосовуючи лему 4 до векторного поля першої кривини $\tilde{\xi}_1$, знайдемо другу кривину $\tilde{\xi}_2$:

$$\tilde{\xi}_2 = \tilde{\nabla}_t^H \tilde{\xi}_1 = a_2\tilde{\delta}(\xi) + b_2\delta^V(\xi) + c_2\delta^E(\xi) + d_2\gamma\delta\,,$$

де функції a_2, b_2, c_2, d_2 визначаються за правилом

$$a_2 = \nabla_t^H a_1 + 2a_1\beta^V(\xi) = 2(\nabla\beta)^V(\xi,\xi) + 4\beta^V(\xi)\beta^V(\xi)\,,$$
$$b_2 = \nabla_t^H b_1 + 2a_1\beta^H(\xi) + 2b_1\beta^V(\xi) + a_1\gamma(\nabla\beta)(\xi) + a_1\gamma\beta\beta^V(\xi) + c_1\beta^H(\xi) + d_1\gamma\beta =$$
$$= \nabla_t^H b_1 + 2a_1\beta^H(\xi) + 2b_1\beta^V(\xi) + a_1\gamma(\nabla\beta)(\xi) + a_1\gamma\beta\beta^V(\xi) + d_1\gamma\beta\,,$$
$$c_2 = \nabla_t^H c_1 + d_1 + c_1\beta^V(\xi) = d_1\,,$$
$$d_2 = \nabla_t^H d_1 + d_1\beta^V(\xi) + a_1\omega^V(\xi,\xi) =$$
$$= (\nabla\omega)^V(\xi,\xi) + \omega^V(\xi,\xi)\beta^V(\xi) + 2\beta^V(\xi)\omega^V(\xi,\xi)\,.$$

Застосовуючи лему 4 до векторного поля другої кривини $\tilde{\xi}_2$, знайдемо третю кривину $\tilde{\xi}_3$:

$$\tilde{\xi}_3 = \tilde{\nabla}_t^H \tilde{\xi}_2 = a_3\tilde{\delta}(\xi) + b_3\delta^V(\xi) + c_3\delta^E(\xi) + d_3\gamma\delta\,.$$

Ще раз застосовуючи лему 4 (до векторного поля третьої кривини $\tilde{\xi}_3$), знайдемо четверту кривину $\tilde{\xi}_4$:

$$\tilde{\xi}_4 = \tilde{\nabla}_t^H \tilde{\xi}_3 = a_4\tilde{\delta}(\xi) + b_4\delta^V(\xi) + c_4\delta^E(\xi) + d_4\gamma\delta\,.$$

Звідси негайно отримуємо рівність

$$\tilde{\xi} \wedge \tilde{\xi}_1 \wedge \tilde{\xi}_2 \wedge \tilde{\xi}_3 \wedge \tilde{\xi}_4 = 0\,,$$

яке завершує доведення теореми. ◊

У роботі [1] доведено, що нетривіальні геодезичні дифеоморфізми баз індукують неканонічні 2-геодезичні дифеоморфізми першого лінійного типу на дотичних розшаруваннях першого порядку щодо зв'язності повного ліфта. Співставляючи цей результат із доведеною теоремою, бачимо, яким чином змінюються сплощуючі властивості індукованого дифеоморфізму при заміні зв'язності повного ліфта на зв'язність горизонтального ліфта.

Природним чином виникає завдання знайти умови, при яких знижується порядок сплощення індукованого дифеоморфізму. Ці умови сформульовано в наступній теоремі.

Теорема 2. *Нехай* $\mu : M \to \bar{M}$ *− геодезичний (проективний) дифеоморфізм афінно зв'язних просторів* (M,∇) *і* $(\bar{M},\bar{\nabla})$ *без кручень (див. пропозицію 4). Тоді індукований дифеоморфізм* μ_* *дотичних розшарувань відносно горизонтальних ліфтів* ∇^H *і* $\bar{\nabla}^H$ *має такі сплощуючі властивості:*

1°. μ_* *є геодезичним (проективним) дифеоморфізмом дотичних розшарувань тоді й тільки тоді, коли дифеоморфізм* μ *буде афінним. При цьому* μ_* *є афінним дифеоморфізмом.*

2°. μ_* *є 2-геодезичним дифеоморфізмом дотичних розшарувань тоді й тільки тоді, коли (в позначеннях леми 4) дифеоморфізм* μ *не є афінним і при цьому ковекторне поле* β *задовольняє умову*

$$\nabla\beta - \beta\otimes\beta = 0\,.$$

3°. μ_* *є 3-геодезичним дифеоморфізмом дотичних розшарувань тоді й тільки тоді, коли виконуються умови*

$$\beta \neq 0, \quad \nabla\beta - \beta\otimes\beta \neq 0, \quad b_1d_1d_3 - b_1d_2c_3 + d_1b_2c_3 - d_1^2b_3 = 0\,.$$

Д о в е д е н н я. Очевидно, що умова

$$\xi \wedge \tilde{\xi}_1 = 0 \tag{13}$$

рівносильна умовам

$$b_1 = 0, \qquad d_1 = 0 .$$

Вибиратимемо геодезичну криву $\mathscr{C}$ у дотичному розшаруванні $T(M)$ довільним чином. Тоді остання рівність повинна виконуватися для довільного ξ, що рівносильно тензорній рівності

$$2\beta^H + \gamma(\nabla\beta) + \gamma\beta\beta^V = 0 ,$$

$$\omega^V = 0 . \tag{13′}$$

Враховуючи вирази для компонентів ліфтів в індукованому координатному околі, з першої з рівностей (13′) отримаємо $\beta = 0$, що, у свою чергу, тягтиме другу рівність. Навпаки, рівність $\beta = 0$ потягне рівність (13′). Таким чином, рівність (13) рівносильна умові

$$\beta = 0 . \tag{13″}$$

Умова (13″) показує, що індукований дифеоморфізм μ_* буде геодезичним (проективним) лише у тому випадку, коли дифеоморфізм μ буде афінним. При цьому сам індукований дифеоморфізм μ_* так само буде афінним.

Очевидно, умова

$$\xi \wedge \tilde{\xi}_1 \wedge \tilde{\xi}_2 = 0 \tag{14}$$

рівносильна умовам

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix} = 0 ,$$

тобто

$$\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ b_2 & \omega^V(\xi,\xi) \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & \omega^V(\xi,\xi) \\ \omega^V(\xi,\xi) & d_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} b_1 & \omega^V(\xi,\xi) \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix} = 0 . \tag{14′}$$

Друга рівність з умов (14′) рівносильна рівності $\omega^V(\xi,\xi)^2 = 0$. Оскільки геодезична крива $\mathscr{C}$ у дотичному розшаруванні $T(M)$ вибирається довільно, то ця рівність виконується для будь-якого ξ, що є рівнозначним тензорній рівності $\omega^V = 0$, яка, у свою чергу, рівнозначна до рівності

$$\omega = \nabla\beta - \beta \otimes \beta = 0 . \tag{14″}$$

З іншого боку, рівність (14″) забезпечує виконання усіх рівностей умови (14′). Таким чином, умова (14) рівносильна з умовою (14″). Це показує, що індукований дифеоморфізм μ_* буде 2-геодезичним лише у тому випадку, коли ковекторне поле β задовольняє умову (14″).

Очевидно, що умова

$$\xi \wedge \tilde{\xi}_1 \wedge \tilde{\xi}_2 \wedge \tilde{\xi}_3 = 0 \tag{15}$$

рівносильна з умовою

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = 0 , \tag{15′}$$

тобто

$$b_1 d_1 d_3 - b_1 d_2 c_3 + d_1 b_2 c_3 - d_1^2 b_3 = 0 . \tag{15″}$$

Це показує, що індукований дифеоморфізм μ_* буде 3-геодезичним лише в тому випадку, якщо виконується умова (15″).

Теорему доведено. ◊

З теорем 1 і 2, а також другої теореми Лі [6, розд 1, п. 15, с. 68] випливає наступна

Теорема 3. *Якщо* $\mathcal{G}_r$ *– локальна r-членна група Лі нетривіальних геодезичних (проективних) перетворень многовиду* M *з афінною зв'язністю* ∇ *без кручення і яка відповідає операторам* X_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, *то в дотичному розшаруванні* $T(M)$ *зі зв'язністю горизонтального ліфта* ∇^H *повні ліфти* X_i^C *породжують r-членну групу Лі* $\mathcal{G}_r^H$ *p-геодезичних перетворень, де* p *може набувати значень* $p = 2, 3, 4$.

1. *Лейко С. Г.* Линейные p-геодезические диффеоморфизмы касательных расслоений высших порядков и высших степеней // Тр. геометр. семинара (Казань). – 1982. – Вып. 14. – С. 34–46.
2. *Лейко С. Г.* p-геодезические преобразования и их группы в касательных расслоениях, индуцированные геодезическими преобразованиями базисного многообразия // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 2. – С. 62–71.
3. *Лейко С. Г.* p-геодезические преобразования и их группы в касательных расслоениях, индуцированные конциркулярными преобразованиями базисного многообразия // Изв. вузов. Математика. – 1998. – № 6. – С. 35–45.
4. *Лейко С. Г.* p-геодезические сечения касательного расслоения // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 3. – С. 32–42.
5. *Лейко С. Г.* Ріманова геометрія: Навч. посібн. – Одеса: Астропринт, 2000. – 212 с.
6. *Эйзенхарт Л. П.* Непрерывные группы преобразований. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1947. – 360 с.
7. *Yano K., Ishihara S.* Tangent and cotangent bundles: Differential geometry. – New York: Marcel Dekker, 1973. – 434 p.

_p_-ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ДИФФЕОМОРФИЗМЫ КАСАТЕЛЬНЫХ РАССЛОЕНИЙ СО СВЯЗНОСТЬЮ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ЛИФТА, ИНДУЦИРОВАННЫЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИМИ (ПРОЕКТИВНЫМИ) ДИФФЕОМОРФИЗМАМИ БАЗ

С точки зрения теории p-геодезических отображений исследованы диффеоморфизмы касательных расслоений первого и второго порядков со связностью полного лифта, индуцированные геодезическими (проективными) диффеоморфизмами базисных многообразий. Изучены уплощающие свойства диффеоморфизмов касательных расслоений первого порядка со связностью горизонтального лифта, индуцированные геодезическими (проективными) диффеоморфизмами базисных многообразий.

_p_-GEODESIC DIFFEOMORPHISMS OF TANGENT BUNDLES WITH CONNECTIONS OF THE HORIZONTAL LIFT, INDUCED GEODESIC (PROJECTIVE) DIFFEOMORPHISMS OF BASIS

From the point of view of the theory p-geodesic mappings, diffeomorphisms of tangent bundles of the first and second orders with connections of the complete lift are investigated. They are induced by geodesic (projective) diffeomorphisms of basic manifolds. In the given job the flattening properties of diffeomorphisms of tangent bundles of order one with connections of the horizontal lift are studied. They are induced by geodesic (projective) diffeomorphisms of basic manifolds.

Одеський нац. ун-т ім. І. І. Мечникова,
Ін-т математики, економіки і механіки, Одеса

Одержано
17.12.07