УДК 517.95

Н. П. Процах

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ ЗА ЧАСОМ

Досліджено розв'язність задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь із запізненням у класах неперервних та обмежених функцій. Такі рівняння є узагальненнями рівняння Колмогорова дифузії з інерцією у певних напрямках. Розглянуто випадки, коли запізнення є сталим або кусково-сталим на одиничних інтервалах, рівняння може бути лінійним або ж містити нелінійності ліпшицевого чи степеневого типу.

Багато явищ, у яких відбувається процес передачі маси, енергії чи інформації, супроводжуються запізненням. Це запізнення може бути зумовлене різними причинами − обмеженістю швидкості поширення взаємозв'язку, наявністю інертності деяких елементів, обмеженістю швидкості протікання технологічних процесів. Такі явища можна описати за допомогою задач для диференціальних рівнянь із частинними похідними та з запізненням в одному з аргументів (див. [11, 15]).

Властивості фундаментального розв'язку задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь без запізнення вивчалися у працях А. М. Колмогорова [12], А. М. Ільїна [4], І. М. Соніна [8], Я. І. Шатиро [7], С. Д. Ейдельмана [3, 8, 9], С. Д. Івасишена [2, 3, 10], Г. П. Малицької [8, 9], С. Полідоро [13, 14], М. М. Лаврентьєва [5] та ін.

У цій праці дослідимо розв'язність задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь із запізненням у класах неперервних та обмежених функцій. Якщо рівняння є лінійним, запізнення відсутнє, тоді це рівняння є узагальненням рівняння Колмогорова дифузії з інерцією у певних напрямках, і задачу Коші для такого рівняння вивчено у працях [1, 2], де знайдено фундаментальний розв'язок задачі та встановлено оцінки його похідних. Розглянуто випадки, коли запізнення є сталим, або кусково-сталим на одиничних інтервалах, рівняння може бути лінійним, або ж містити нелінійності ліпшицевого чи степеневого типу. Зауважимо, що такі рівняння поєднують властивості диференціальних і різницевих рівнянь і містять як часткові випадки певні навантажені та імпульсні рівняння.

Нехай T − задане додатне число; n_1, n_2, n_3 − задані натуральні числа такі, що $1 \le n_3 \le n_2 \le n_1$.

Позначимо $N = n_1 + n_2 + n_3$; $N_1 = n_1 + 3n_2 + 5n_3$; $X = (x_1, x_2, x_3)$; $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$; $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, $x_3 \in \mathbb{R}^{n_3}$. Тоді $X \in \mathbb{R}^N$ ($x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in_i})$, $\xi_i = (\xi_{i1}, \xi_{i2}, \dots, \xi_{in_i})$, $i = 1,2,3$); $\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$, $\bar{x}_i = (\bar{x}_{i1}, \bar{x}_{i2}, \dots, \bar{x}_{in_i}) \in \mathbb{R}^{n_i}$,

$\bar{x}_{1j} = x_{1j}, \quad 1 \le j \le n_1, \quad \bar{x}_{2j} = x_{2j} + (t-\tau)x_{1j}, \quad 1 \le j \le n_2,$

$\bar{x}_{3j} = x_{3j} + (t-\tau)x_{2j} + \frac{1}{2}(t-\tau)^2 x_{1j}, \quad 1 \le j \le n_3.$

Нехай $\Pi_T = (0,T) \times \mathbb{R}^N$.

1. В області Π_T розглянемо задачу Коші

$$(Lu)(X,t) \equiv u_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j} u_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j} u_{x_{3j}} - \sum_{j=1}^{n_1} u_{x_{1j}x_{1j}} - c(X,t)u(X,[t]) = f(X,t), \tag{1}$$

$$u(X,0) = \varphi(X), \qquad X \in \mathbb{R}^N, \tag{2}$$

де $[t]$ − ціла частина від аргументу t.

У цьому випадку запізнення є сталим на одиничних інтервалах і має стрибки на їх кінцях. На кожному з цих інтервалів рівняння описується ультрапараболічним рівнянням без запізнення. Неперервність розв'язку на кінцях двох послідовних інтервалів приводить до різницевого рівняння цілого аргументу для значень розв'язку на кінцях. Тому рівняння з кусково-сталим запізненням поєднують властивості диференціальних і різницевих рівнянь. Вони містять, наприклад, випадки навантажених та імпульсних рівнянь теорії контролю.

Дослідимо обмежені розв'язки задачі (1), (2).

Означення 1. Функцію $u(X,t)$ назвемо розв'язком задачі (1), (2), якщо виконуються умови

(***i***) $u(X,t)$ – неперервна в Π_T;

(***ii***) $u_{x_{1i}}, u_{x_{1i}x_{1i}}$, $i=1,\dots,n_1$, $u_{x_{2i}}$, $i=1,\dots,n_2$, $u_{x_{3i}}$, $i=1,\dots,n_3$, – неперервні в Π_T, за можливим винятком точок $(X,[t])$, де існують односторонні похідні;

(***iii***) $u(X,t)$ задовольняє рівняння (1) в Π_T, за можливим винятком точок $(X,[t])$, та початкову умову (2).

Доведемо існування та єдиність розв'язку задачі (1), (2).

У праці [2] доведено, що фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння

$$(L_1u)(X,t) \equiv u_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}u_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}u_{x_{3j}} - \sum_{j=1}^{n_1} u_{x_{1j}x_{1j}} = F(X,t) \tag{3}$$

з початковою умовою (2) задається формулою

$$\begin{aligned} Z(X,t;\xi,\tau) &= 12^{n_2/2}\cdot 720^{n_3/2}\times \\ &\times (4\pi)^{-N/2}(t-\tau)^{-N_1/2}\exp\left\{-\frac{1}{4}(t-\tau)\sum_{j=1}^{n_1}(x_{1j}-\xi_{1j})^2 - \right.\\ &-\frac{3}{(t-\tau)^2}\sum_{j=1}^{n_2}\left(x_{2j}-\xi_{2j}+\frac{1}{2}(t-\tau)(x_{1j}+\xi_{1j})\right)^2 - \\ &\left.-\frac{180}{(t-\tau)^5}\sum_{j=1}^{n_3}\left(x_{3j}-\xi_{3j}+\frac{1}{12}(t-\tau)^2(x_{1j}-\xi_{1j})\right)^2\right\}, \\ &\tau<t, \qquad \{X,\xi\}\subset\mathbb{R}^N. \end{aligned} \tag{4}$$

Позначимо

$$\begin{aligned} \rho(X,t;\xi,t-\tau) &= (t-\tau)^{-1}\sum_{j=1}^{n_1}(\bar{x}_{1j}-\xi_{1j})^2 + \\ &+(t-\tau)^{-3}\sum_{j=1}^{n_2}(\bar{x}_{2j}-\xi_{2j})^2 + (t-\tau)^{-5}\sum_{j=1}^{n_3}(\bar{x}_{3j}-\xi_{3j})^2. \end{aligned}$$

У праці [1] наведено такі властивості:

$$\int_{\mathbb{R}^N} t^{-N_1/2}\exp\{-\delta\rho(X,\xi,t)\}\,d\xi = (\pi\delta)^{N/2},$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} Z(X,t;\xi,\tau)\,d\xi = 1, \qquad 0\le\tau<t, \qquad X\subset\mathbb{R}^N.$$

Аналогічно до теореми 3.10 [10, с. 197] можна отримати таке

Твердження. *Нехай функція* u *є розв'язком задачі* (3), (2) *в області* Π_T, F *– обмежена і неперервна в* Π_T *функція,* $\varphi, \varphi_{x_{1j}x_{1j}}$, $j\in\{1,\dots,n_1\}$, $\varphi_{x_{ij}}$, $i\in\{1,2,3\}$, $j\in\{1,\dots,n_i\}$, *належать до простору* $C(\mathbb{R}^N)$ *та є обмеже-*

ними в $\mathbb{R}^N$. *Тоді виконується формула*

$$u(X,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} Z(X,t;\xi,0)\varphi(\xi)\,d\xi + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} Z(X,t;\xi,\tau)F(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau, \qquad (X,t)\in\Pi_T .$$

Теорема 1. *Нехай* $\varphi,\ \varphi_{x_{1j}x_{1j}}$, $j\in\{1,\ldots,n_1\}$, $\varphi_{x_{ij}}$, $i\in\{1,2,3\}$, $j\in\{1,\ldots,n_i\}$, *належать до простору* $C(\mathbb{R}^N)$ *та є обмеженими в* $\mathbb{R}^N$, *функції* c, f *є неперервними та обмеженими в* Π_T *і мають обмежений носій. Тоді існує розв'язок задачі* (1), (2), *обмежений в* Π_T.

Д о в е д е н н я. Метод доведення теореми базується на зведенні задачі (1), (2) до інтегрального рівняння і використання методу послідовних наближень.

Позначимо $f_1(X,t,u) = c(X,t)u(X,[t]) + f(X,t)$. Тоді для розв'язку задачі (1), (2) виконується подання

$$u(X,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} Z(X,t;\xi,0)\varphi(\xi)\,d\xi + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} Z(X,t;\xi,\tau)f_1(\xi,\tau,u)\,d\xi\,d\tau, \qquad (X,t)\in\Pi_T. \tag{5}$$

На інтервалі $0\le t<1$ функція $f_1(X,t,u) = c(X,t)\varphi(X) + f(X,t)$. Оскільки на Π_T маємо оцінки $|\varphi(X)|\le M$, $|c(X,t)||\varphi(X)| + |f(X,t)| \le \bar{M}$ (де $M, \bar{M}$ – сталі), то

$$|u(X,t)| \le M\int\limits_{\mathbb{R}^N} Z(X,t;\xi,0)\,d\xi + \int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^N} Z(X,t;\xi,\tau)\left|c(\xi,\tau)\varphi(\xi) + f(\xi,\tau)\right|d\xi\,d\tau \le$$

$$\le M + \bar{M}\int\limits_0^t d\tau = M + \bar{M}t, \quad 0\le t<1 .$$

На інтервалі $1\le t<2$ позначимо $\varphi_1(X) = u(X,1)$. Тоді для всіх $X\in\mathbb{R}^N$ $|\varphi_1(X)| \le M_1 = M + \bar{M}$, а також зауважимо, що на цьому проміжку $0\le t-1<$ <1. Тоді, замінивши t на $t-1$, отримуємо

$$|u(X,t)| \le M\int\limits_{\mathbb{R}^N} Z(X,t-1;\xi,0)\varphi_1(\xi)\,d\xi + \int\limits_0^{t-1}\int\limits_{\mathbb{R}^N} Z(X,t-1;\xi,\tau)\big(c(\xi,\tau)\varphi_1(\xi) +$$

$$+ f(\xi,\tau)\big)\,d\xi\,d\tau \le M_1\cdot 1 + \bar{M}_1\int\limits_0^{t-1} d\tau = M_1 + \bar{M}_1(t-1),$$

$$1\le t<2, \qquad X\in\mathbb{R}^N .$$

Йдучи далі, $|u(X,t)| \le M_n + \bar{M}_n(t-n)$, $n\le t<n+1$, де сталі $M_n, \bar{M}_n$ – обмежені. Отже, $|u(X,t)| \le M_T + \bar{M}_T$ для всіх $(X,t)\in\Pi_T$. Так побудований розв'язок задачі (1), (2) є обмеженим. ◊

Зауваження 1. *Якщо в умовах теореми* 1 *запізнення є сталим і дорівнює* h, *то*

$$(L_1u)(X,t) = c(X,t)u(X,t-h) + f(X,t), \tag{6}$$

та виконується початкова умова

$$u(X,t) = \varphi(X) \qquad \text{для} \qquad -h\le t\le 0, \qquad X\in\mathbb{R}^N . \tag{7}$$

Тоді існує обмежений розв'язок задачі (6), (7).

Д о в е д е н н я. Доведемо існування обмеженого розв'язку задачі (6), (7). На інтервалі $0 \le t < h$ права частина рівняння (6) є такою $f_1(X,t,u) = c(X,t)\varphi(X) + f(X,t)$. Оскільки $|\varphi(X)| \le M$, $|c(X,t)||\varphi(X)| + |f(X,t)| \le \bar{M}$, то

$$|u(X,t)| \le M \int_{\mathbb{R}^N} Z(X,t;\xi,0)\,d\xi + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} Z(X,t;\xi,\tau)\big(c(\xi,\tau)\varphi(\xi) +$$

$$+ f(\xi,\tau)\big)\,d\xi\,d\tau \le M + \bar{M}\int_0^t d\tau = M + \bar{M}t \equiv M_1, \quad 0 \le t < h.$$

На інтервалі $h \le t < 2h$ маємо, що $0 \le t - h < h$. Тоді, замінивши t на $t - h$, отримуємо

$$|u(X,t)| \le M_1 + \bar{M}_1(t-h), \qquad h \le t < 2h.$$

Йдучи далі, $|u(X,t)| \le M_n + \bar{M}_n(t - nh)$, $nh \le t < (n+1)h$, де сталі $M_n, \bar{M}_n$ – обмежені. Таку саму оцінку отримуємо для всіх $(X,t) \in \Pi_{(0,T]}$. Так побудований розв'язок задачі (6), (7) є обмеженим. ◊

Розглянемо слабко нелінійні випадки. Нехай права частина рівняння (1) може містити нелінійності.

2. В області Π_T розглянемо задачу Коші

$$(Lu)(X,t) \equiv u_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j} u_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j} u_{x_{3j}} -$$

$$- \sum_{j=1}^{n_1} u_{x_{1j}x_{1j}} - c(X,t)u(X,[t]) = f\big(X,t,u(X,t)\big) \tag{8}$$

з початковою умовою (2), де знову $[t]$ – ціла частина від аргументу t.

Теорема 2. *Нехай* $\varphi, \varphi_{x_{1j}x_{1j}}$, $j \in \{1,\dots,n_1\}$, $\varphi_{x_{ij}}$, $i \in \{1,2,3\}$, $j \in \{1,\dots,n_i\}$, *належать до простору* $C(\mathbb{R}^N)$ *та є обмеженими в* $\mathbb{R}^N$, *функції* c, f *є неперервними та обмеженими в* Π_T *і мають обмежений носій, крім того, функція* f *задовольняє умову Ліпшиця рівномірно за* X, t, *тобто для всіх* $X \in \mathbb{R}^N$, $t \in [0,T]$ *існує така стала* L, *що для всіх* $\xi, \eta \in \mathbb{R}^1$ *виконується оцінка* $|f(X,t,\xi) - f(X,t,\eta)| \le L|\xi - \eta|$. *Тоді існує розв'язок задачі* (8), (2), *який є обмеженим в* Π_T.

Д о в е д е н н я. Оскільки $|\varphi(X)| \le M$, $|c(X,t)||\varphi(X)| + |f(X,t)| \le \bar{M}$ для всіх $(X,t) \in \Pi_T$, то згідно з методом послідовних наближень

$$|u_0(X,t)| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} Z(X,t;\xi,0)\varphi(\xi)\,d\xi \right| \le M \qquad \text{для всіх} \quad X \in \mathbb{R}^N.$$

На інтервалі $0 \le t < 1$ функція $f_1(X,t,u) = c(X,t)\varphi(X) + f(X,t)$. Тоді для всіх $X \in \mathbb{R}^N$

$$|u_1 - u_0| = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} Z(X,t;\xi,\tau)\big(c(\xi,\tau)\varphi(\xi) + f(\xi,\tau,u_0)\big)\,d\xi\,d\tau \le$$

$$\le \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} Z(X,t;\xi,\tau)\big(|c(\xi,\tau)||\varphi(\xi)| + M|u_0|\big)\,d\xi\,d\tau \le M_1 \cdot t,$$

$$|u_2 - u_1| = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} Z(X,t;\xi,\tau)\big(c(X,t)\varphi(X) + f(X,t,u_1) - c(X,t)\varphi(X) -$$

$$- f(X,t,u_0)\big)\,d\xi\,d\tau \le L\int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} Z(X,t;\xi,\tau)|u_1 - u_0|\,d\xi\,d\tau \le$$

$$\le LM_1\int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} Z(X,t;\xi,\tau)\tau\,d\xi\,d\tau = LM_1\frac{t^2}{2},$$

$$|u_3 - u_2| = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} Z(X,t;\xi,\tau)\big(c(\xi,\tau)\varphi(\xi) + f(\xi,\tau,u_2) - c(\xi,\tau)\varphi(\xi) -$$

$$- f(\xi,\tau,u_1)\big)\,d\xi\,d\tau \le L\int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} Z(X,t;\xi,\tau)|u_2 - u_1|\,d\xi\,d\tau \le$$

$$\le L\frac{M_1}{2}\int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} Z(X,t;\xi,\tau)\tau^2\,d\xi\,d\tau = L^2\frac{M_1}{2}\frac{t^3}{3} = L^2 M_1\frac{t^3}{3!},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$|u_n - u_{n-1}| \le \frac{M_1}{L}\frac{(Lt)^n}{n!}.$$

Оскільки

$$u(X,t) = u_0(X,t) + \sum_{i=1}^{\infty}\big(u_i(X,t) - u_{i-1}(X,t)\big),$$

то

$$|u(X,t)| \le M + \sum_{i=1}^{\infty}|u_i(X,t) - u_{i-1}(X,t)| = M + \bar{M}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(Lt)^i}{i!} = M + \bar{M}e^{Lt},$$

$$0 \le t < 1.$$

На інтервалі $2 \le t < 3$ зауваживши, що $0 \le t-1 < 1$ та виконавши заміну t на $t-1$, отримуємо

$$|u(X,t)| \le M_1 + \bar{M}_1 e^{L(t-1)}, \qquad 1 \le t < 2, \qquad X \in \mathbb{R}^N.$$

Йдучи далі,

$$|u(X,t)| \le M_n + \bar{M}_n e^{L(t-n)}, \qquad n \le t < n+1, \qquad X \in \mathbb{R}^N,$$

де сталі M_n, $\bar{M}_n$ – обмежені.

Оцінки продовжуємо до досягнення $n+1 \ge T$.

Так побудований розв'язок задачі (8), (2) з нелінійністю ліпшицевого типу в правій частині рівняння (8) є обмеженим. ◊

Зауваження 2. Теорема 2 виконується також для випадку, коли запізнення є сталим.

3. В області Π_T розглянемо задачу Коші для рівняння

$$(L_2 u)(X,t) \equiv u_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}u_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}u_{x_{3j}} - \sum_{j=1}^{n_1} u_{x_{1j}x_{1j}} =$$

$$= f\big(X,t,u(X,t),u(X,[t])\big) \tag{9}$$

з початковими умовами (2), де $[t]$ – ціла частина від аргументу t.

Теорема 3. *Нехай* $\varphi, \varphi_{x_{1j}x_{1j}}$, $j \in \{1,\dots,n_1\}$, $\varphi_{x_{ij}}$, $i \in \{1,2,3\}$, $j \in \{1,\dots,n_i\}$, *належать до простору* $C(\mathbb{R}^N)$ *та є обмеженими в* $\mathbb{R}^N$, *функція* f *є неперервною та обмеженою в* Π_T *і має обмежений носій, крім того,* $f(X,t,\zeta,\eta)$ *задовольняє умову Ліпшиця рівномірно за* X, t, η, *тобто існує така стала* L, *що для всіх* $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{R}^1$ *виконується оцінка*

$$|f(X,t,\zeta_1,\eta) - f(X,t,\zeta_2,\eta)| \le L|\zeta_1 - \zeta_2|.$$

Тоді існує розв'язок задачі (9), (2), *обмежений в* Π_T.

Д о в е д е н н я. Згідно з методом послідовних наближень, оскільки $|\varphi(X)| \le M$, $|f| \le \bar{M}$ для всіх $(X,t) \in \Pi_T$, то

$$|u_0(X,t)| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} Z(X,t;\xi,0)\varphi(\xi)\,d\xi \right| \le M \qquad \text{для всіх} \qquad X \in \mathbb{R}^N.$$

На інтервалі $0 \le t < 1$ функція

$$f\big(X,t,u(X,t),u(X,[t])\big) = f\big(X,t,u(X,t),\varphi(X)\big).$$

Тоді для всіх $X \in \mathbb{R}^N$

$$|u_1 - u_0| = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} Z(X,t;\xi,\tau) f\big(X,t,u_0,\varphi(X)\big)\,d\xi\,d\tau \le$$

$$\le \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} Z(X,t;\xi,\tau) M |u_0|\,d\xi\,d\tau \le M_1 \cdot t,$$

$$|u_2 - u_1| = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} Z(X,t;\xi,\tau)\big(f(X,t,u_1,\varphi(X)) - f(X,t,u_0,\varphi(X))\big)\,d\xi\,d\tau \le$$

$$\le L \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} Z(X,t;\xi,\tau)|u_1 - u_0|\,d\xi\,d\tau \le$$

$$\le LM_1 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} Z(X,t;\xi,\tau)\tau\,d\xi\,d\tau = LM_1 \frac{t^2}{2},$$

$$|u_3 - u_2| = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} Z(X,t;\xi,\tau)\big(f(\xi,\tau,u_2,\varphi(X)) - f(\xi,\tau,u_1,\varphi(X))\big)\,d\xi\,d\tau \le$$

$$\le L \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} Z(X,t;\xi,\tau)|u_2 - u_1|\,d\xi\,d\tau \le$$

$$\le L^2 \frac{M_1}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} Z(X,t;\xi,\tau)\tau^2\,d\xi\,d\tau = \frac{L^2 M_1}{2}\frac{t^3}{3} = M_1 L^2 \frac{t^3}{3!},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$|u_n - u_{n-1}| \le \frac{M_1}{L}\frac{(Lt)^n}{n!}.$$

Оскільки

$$u(X,t) = u_0(X,t) + \sum_{i=1}^{\infty}\big(u_i(X,t) - u_{i-1}(X,t)\big),$$

то

$$|u(X,t)| \le M + \sum_{i=1}^{\infty}|u_i(X,t) - u_{i-1}(X,t)| =$$

$$= M + \bar{M}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(Lt)^i}{i!} = M + \bar{M}e^{Lt}, \qquad 0 \le t < 1.$$

На інтервалі $2 \le t < 3$ зауваживши, що $0 \le t-1 < 1$ та виконавши заміну t на $t-1$, отримуємо

$$|u(X,t)| \le M_1 + \bar{M}_1 e^{L(t-1)}, \qquad 1 \le t < 2, \qquad X \in \mathbb{R}^N .$$

Йдучи далі,

$$|u(X,t)| \le M_n + \bar{M}_n e^{L(t-n)}, \qquad n \le t < n+1, \qquad X \in \mathbb{R}^N ,$$

де сталі M_n, $\bar{M}_n$ – обмежені. Продовжуємо оцінки до досягнення $n+1 \ge T$. Так побудований розв'язок задачі (9), (2) є обмеженим. ◊

Зауваження 3. Теорема 3 виконується також для випадку, коли запізнення є сталим.

4. В області Π_T розглянемо задачу Коші для рівняння

$$(L_2 u)(X,t) \equiv u_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j} u_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j} u_{x_{3j}} - \sum_{j=1}^{n_1} u_{x_{1j}x_{1j}} =$$
$$= f(X,t,u(X,t),u(X,[t]),\nabla u_{x_1}(X,[t])) \tag{10}$$

з початковою умовою (2), де $[t]$ – ціла частина від аргументу t.

Теорема 4. *Нехай* φ, $\varphi_{x_{1j}x_{1j}}$, $j \in \{1,\dots,n_1\}$, $\varphi_{x_{ij}}$, $i \in \{1,2,3\}$, $j \in \{1,\dots,n_i\}$, *належать до простору* $C(\mathbb{R}^N)$ *і є обмеженими в* $\mathbb{R}^N$, *функція* f *є неперервною та обмеженою в* Π_T *і має обмежений носій, крім того,* $f(X,t,\zeta,\eta,\theta)$ *задовольняє умову Ліпшиця рівномірно за* X,t,η,θ, *тобто існує така стала* L, *що для всіх* $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{R}^1$ *виконується оцінка*

$$|f(X,t,\zeta_1,\eta,\theta) - f(X,t,\zeta_2,\eta,\theta)| \le L|\zeta_1 - \zeta_2| .$$

Тоді існує розв'язок задачі (10), (2), *який є обмеженим в* Π_T.

Д о в е д е н н я цієї теореми повторює доведення теореми 3. ◊

5. Розглянемо випадок, коли права частина рівняння (8) містить нелінійності степеневого вигляду, тобто функція f задовольняє умову

(F) існує така стала f^0, що для всіх $\xi, \eta \in \mathbb{R}^1$ виконується оцінка

$$|f(X,t,\xi) - f(X,t,\eta)| \le f^0 |\xi - \eta|^{p-1} \quad \text{для майже всіх} \quad (X,t) \in \Pi_T .$$

Зауважимо, що прикладом функції f може бути функція

$$f(X,t,u) \equiv f_0(X,t) + g(X,t)|u|^{p-2} u , \qquad \text{де} \qquad 1 < p < 2 .$$

Теорема 5. *Нехай* φ, $\varphi_{x_{1j}x_{1j}}$, $j \in \{1,\dots,n_1\}$, $\varphi_{x_{ij}}$, $i \in \{1,2,3\}$, $j \in \{1,\dots,n_i\}$, *належать до простору* $C(\mathbb{R}^N)$ *та є обмеженими в* $\mathbb{R}^N$, *функція* f *є неперервною та обмеженою в* Π_T, *має обмежений носій та задовольняє умову* **(F)**. *Тоді існує розв'язок задачі* (8), (2), *який є обмеженим в* Π_T.

Д о в е д е н н я. Оскільки

$$|\varphi(X)| \le M, \qquad |c(X,t)||\varphi(X)| + |f(X,t)| \le \bar{M} ,$$

то згідно з методом послідовних наближень

$$|u_0(X,t)| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} Z(X,t;\xi,0)\varphi(X)\,d\xi \right| \le M .$$

На інтервалі $0 \le t < 1$ права частина рівняння (8)

$$f_1(X,t,u) = c(X,t)\varphi(X) + f(X,t) .$$

Тоді

$$|u_1 - u_0| = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} Z(X,t;\xi,\tau)\big(c(\xi,\tau)\varphi(\xi) + f(\xi,\tau,u_0)\big)\,d\xi\,d\tau \le$$

$$\le \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} Z(X,t;\xi,\tau)\big(|c(\xi,\tau)||\varphi(\xi)| + M|u_0|^{p-1}\big)\,d\xi\,d\tau \le M_1 \cdot t\,,$$

$$|u_2 - u_1| = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} Z(X,t;\xi,\tau)\big(c(\xi,\tau)\varphi(\xi) + f(\xi,\tau,u_1) - c(\xi,\tau)\varphi(\xi) -$$

$$- f(\xi,\tau,u_0)\big)\,d\xi\,d\tau \le f^0 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} Z(X,t;\xi,\tau)|u_1 - u_0|^{p-1}\,d\xi\,d\tau \le$$

$$\le f^0 M_1^{p-1} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} Z(X,t;\xi,\tau)\tau^{p-1}d\xi\,d\tau = M_2\,\frac{t^{(p-1)+1}}{(p-1)+1}\,,$$

$$|u_3 - u_2| = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} Z(X,t;\xi,\tau)\big(c(\xi,\tau)\varphi(\xi) + f(\xi,\tau,u_2) - c(\xi,\tau)\varphi(\xi) -$$

$$- f(\xi,\tau,u_1)\big)\,d\xi\,d\tau \le f^0 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} Z(X,t;\xi,\tau)|u_2 - u_1|^{p-1}\,d\xi\,d\tau \le$$

$$\le f^0 (M_2)^p \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} Z(X,t;\xi,\tau)\left(\frac{\tau^{(p-1)+1}}{(p-1)+1}\right)^{p-1} d\xi\,d\tau \le$$

$$\le M_3 t^{(p-1)^2+(p-1)+1}\Big[\big((p-1)+1\big)^{p-1}\big((p-1)^2 + (p-1) + 1\big)\Big]^{-1},$$

$$|u_4 - u_3| = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} Z(X,t;\xi,\tau)\big(c(\xi,\tau)\varphi(\xi) + f(\xi,\tau,u_2) -$$

$$- c(\xi,\tau)\varphi(\xi) - f(\xi,\tau,u_1)\big)\,d\xi\,d\tau \le$$

$$\le M_3 t^{(p-1)^3+(p-1)^2+(p-1)+1}\Big[\big((p-1)+1\big)^{(p-1)^2}\big((p-1)^2 +$$

$$+ (p-1) + 1\big)^{p-1}\big((p-1)^3 + (p-1)^2 + (p-1) + 1\big)\Big]^{-1},$$

....

Звідси для $k \ge 2$ отримуємо мажоранту

$$|u_k - u_{k-1}| \le M_k\,\frac{t^{(p-1)^{k-1}+(p-1)^{k-2}+\ldots+(p-1)+1}}{\prod_{i=2}^{k}\big(1 + (p-1) + \ldots + (p-1)^{i-1}\big)^{(p-1)^{k-i}}}\,.$$

Оскільки $u(X,t) = u_0(X,t) + \sum_{i=1}^{\infty}\big(u_i(X,t) - u_{i-1}(X,t)\big)$, то

$$|u(X,t)| = M + \sum_{i=1}^{\infty}|u_i(X,t) - u_{i-1}(X,t)| =$$

$$= M + M_1 t + \bar{M}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{t^{(p-1)^{k-1}+(p-1)^{k-2}+\ldots+(p-1)+1}}{\prod_{i=2}^{k}\big(1 + (p-1) + \ldots + (p-1)^{i-1}\big)^{(p-1)^{k-i}}}\,,$$

$$0 \le t < 1\,.$$

Перевіримо, чи є збіжним ряд $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^{(p-1)^{k-1}+(p-1)^{k-2}+\ldots+(p-1)+1}}{\prod_{i=2}^{k}\left(1+(p-1)+\ldots+(p-1)^{i-1}\right)^{(p-1)^{k-i}}}$.

За ознакою Даламбера

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{t^{(p-1)^k+(p-1)^{k-1}+\ldots+(p-1)+1}}{\prod_{i=2}^{k+1}\left(1+(p-1)+\ldots+(p-1)^{i-1}\right)^{(p-1)^{k-i+1}}} \times$$

$$\times \left(\frac{\prod_{i=2}^{k}\left(1+(p-1)+\ldots+(p-1)^{i-1}\right)^{(p-1)^{k-i}}}{t^{(p-1)^{k-1}+(p-1)^{k-2}+\ldots+(p-1)+1}} \right) =$$

$$= \frac{t^{(p-1)^k}}{\prod_{i=2}^{k+1}\left(1+(p-1)+\ldots+(p-1)^{i-1}\right)^{(p-1)^{k-i}(p-2)}} \sim$$

$$\sim \frac{t^{(p-1)^k}}{(p-1)^{\frac{p-1}{p-2}[(p-1)^{k-1}-1]-(k-1)}} .$$

Якщо $1 < p < 2$, то при $k \to \infty$ цей вираз прямує до 0, отже, ряд збіжний.

На проміжку $n < t < n+1$ маємо оцінку

$$|u(X,t)| =$$

$$= M + M_1(t-n) + \bar{M}\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(t-n)^{(p-1)^{k-1}+(p-1)^{k-2}+\ldots+(p-1)+1}}{\prod_{i=2}^{k}\left(1+(p-1)+\ldots+(p-1)^{i-1}\right)^{(p-1)^{k-i}}} . \ \Diamond$$

Доведемо єдиність розв'язку розглянутих задач.

Теорема 6. *Обмежені розв'язки задач* (1), (2); (6), (7); (8), (2); (9), (2); (10), (2) *є єдиними.*

Д о в е д е н н я. Нехай існує два розв'язки задачі (8), (2) u^1 та u^2. Їх різниця $u = u^1 - u^2$ є розв'язком задачі

$$(Lu)(X,t) \equiv u_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j} u_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j} u_{x_{3j}} - \sum_{j=1}^{n_1} u_{x_{1j}x_{1j}} =$$

$$= f(X,t,u^2) - f(X,t,u^1) + c(X,t)u(X,[t]), \tag{11}$$

$$u(X,0) = 0, \qquad X \in \mathbb{R}^N . \tag{12}$$

Розглянемо такі випадки.

1°. $f(X,t,u) = f(X,t)$ − *задача* (1), (2).

Розв'язок задаємо як

$$u(X,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} Z(X,t;\xi,\tau)c(\xi,\tau)u(\xi,[\tau])\,d\xi\,d\tau, \qquad X \in \mathbb{R}^N, \quad t \in (0,T]. \tag{13}$$

Оскільки функція $u(X,t)$ є обмеженою, то існує стала M така, що для всіх $(X,t) \in \Pi_T$ функція $|u(X,t)| \le M$. Позначимо через C сталу, яка обмежує зверху функцію $|c(X,t)|$. Тоді

$$|u(X,t)| \le MC\int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} Z(X,t;\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau = M \cdot C \cdot t .$$

Підставимо отриману оцінку в (13). Тоді

$$|u(X,t)| \le MC^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} Z(X,t;\xi,\tau)\,\tau\, d\xi\, d\tau = \frac{MC^2 t^2}{2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$|u(X,t)| \le \frac{MC^k t^k}{k!} \qquad \text{для всіх} \qquad X \in \mathbb{R}^N.$$

Якщо $u(X,t)$ не є тотожним нулем, тоді існує таке (X_0,t_0), при якому $u(X_0,t_0) \ne 0$. При великих k для довільного $\varepsilon > 0$ виконується

$$|u(X_0,t_0)| \le \frac{MC^k t^k}{k!} < \varepsilon.$$

Тоді $|u(X_0,t_0)| \le \varepsilon$, де ε – як завгодно мале число. Вибравши $0 < \varepsilon < \dfrac{u(X_0,t_0)}{2}$, отримаємо суперечність. Отже, $u(X,t) \equiv 0$, тобто розв'язок задачі (1), (2) єдиний. Аналогічно проводимо доведення теореми для задачі (6), (7).

2°. $f(X,t,u)$ є ліпшицевою функцією (*задача* (8), (2)). Тоді

$$|u(X,t)| = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} Z(X,t;\xi,\tau)\big[f(\xi,\tau,u^1) - f(\xi,\tau,u^2) +$$

$$+ c(\xi,\tau)u(\xi,[\tau])\big]\,d\xi\, d\tau \le \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} Z(X,t;\xi,\tau)\big[L\,|u^1 - u^2| +$$

$$+ |c(\xi,\tau)u(\xi,[\tau])|\big]\,d\xi\, d\tau \le (L + C)\cdot M \cdot t.$$

Підставимо отриману оцінку в (13). Тоді

$$|u(X,t)| \le \frac{(L+C)^2 M t^2}{2}.$$

На k-му кроці

$$|u(X,t)| \le \frac{(L+C)^k M t^k}{k!}.$$

Доведення завершуємо, як у попередньому випадку.

3°. Подібно доводимо єдиність розв'язку *задач* (9), (2) і (10), (2), а також у випадку степеневих нелінійностей. ◊

Дослідження частково підтримані ґрантом Президента України для підтримки наукових досліджень молодих учених (номер держреєстрації 0108U009507).

1. *Дронь В. С.* Про коректну розв'язність у вагових просторах Гельдера задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2000. – Вип. 76. – С. 32–41.
2. *Дронь В. С., Івасишен С. Д.* Про властивості об'ємного потенціалу та коректну розв'язність задачі Коші для одного модельного ультрапараболічного рівняння // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 1999. – Вип. 46. – С. 36–43.
3. *Ивасишен С. Д., Эйдельман С. Д.* О задаче Коши для вырожденных уравнений типа Колмогорова с $2\vec{b}$-параболической частью по основной группе переменных // Дифференц. уравнения. – 2000. – **36**, № 4. – С. 527–536.
4. *Ильин А. М.* Об одном классе ультрапараболических уравнений // Докл. АН СССР. – 1964. – **159**, № 6. – С. 1214–1217.
5. *Лаврентьев М. М. (мл.), Спиглер Р., Ахметов Д. Р.* Регуляризация нелинейного интегропараболического уравнения Фоккера – Планка с пространственно-периодическими решениями. Существование сильных решений // Сиб. мат. журн. – 2001. – **42**, № 4. – С. 825–848.

6. *Сонин И. М.* Об одном классе вирождающихся диффузионных процессов // Теория вероятностей и ее применение. – 1967. – **12**, № 3. – С. 540–547.
7. *Шатыро Я. И.* О гладкости решений некоторых вырожденных уравнений второго порядка // Мат. заметки. – 1971. – **10**, № 1. – С. 101–111.
8. *Эйдельман С. Д., Малицкая А. П.* Об уравнениях диффузии с инерцией и растущими коэффициентами // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1974. – № 2. – С. 106–110.
9. *Эйдельман С. Д., Малицкая А. П.* О фундаментальных решениях и стабилизации решения задачи Коши для одного класса вырождающихся параболических уравнений // Дифференц. уравнения. – 1975. – **11**, № 7. – С. 1316–1330.
10. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. – Basel: Birkhäuser, 2004. – 390 p. – (Ser. Operator Theory: Adv. and Appl. – Vol. 152.)
11. *Farkas G., Simon P. L.* Stability properties of positive solutions to partial differential equations with delay // Electr. J. Different. Equat. – 2001. – No. 64. – P. 1–8.
12. *Kolmogorov A. N.* Zufällige Bewegungen (Zur Theorie der Brownschen Bewegung) // Ann. Math. – 1934. – **35**. – P. 116–117.
13. *Polidoro S.* A global lower bound for the fundamental solution of Kolmogorov – Fokker – Planck equations // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1997. – **137**. – P. 321–340.
14. *Polidoro S.* On a class of ultraparabolic operators of Kolmogorov – Fokker – Planck type // Le Matematiche. – 1994. – **49**. – P. 53–105.
15. *Poorkarimi H., Wiener J.* Bounded solutions of nonlinear parabolic equations with time delay // Electr. J. Different. Equat. – 1999. – No. 2. – P. 87–91.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УЛЬТРАПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПО ВРЕМЕНИ

Исследована разрешимость задачи Коши для ультрапараболических уравнений с запаздыванием в классах непрерывных и ограниченных функций. Такие уравнения обобщают уравнения Колмогорова диффузии с инерцией. Рассмотрены случаи, когда запаздывание является постоянным или кусочно-постоянным на единичных интервалах, уравнения могут быть линейными или содержать степенные нелинейности или нелинейности типа Липшица.

CAUCHY PROBLEM FOR ULTRAPARABOLIC EQUATIONS WITH TIME DELAY

The solvability of the Cauchy problem for ultraparabolic equations with delay is investigated in the classes of continuous and bounded functions. Such types of equations generalize the Kolmogorov equation of the difussion with inertia. The cases of constant or piecewise continuous time delay when the equations are linear or can have nonlinearities of the Lipschitz or power type are considered.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
31.01.08