

## АНАЛІЗ ДЕФОРМУВАННЯ КУСКОВО-ОДНОРІДНОГО ТІЛА З В'ЯЗКОПРУЖНИМ ПРОМІЖНИМ ШАРОМ ЗА ДІЇ ЗСУВНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

*Проведено аналіз деформування області спряження кусково-однорідного тіла з в'язкопружним проміжним шаром, що описується моделлю Кельвіна – Фойгта, за дії змінного в часі зсувного навантаження. Як приклад розв'язано задачу про кручення складеного циліндра. Побудовано графіки часової залежності дотичних переміщень і швидкостей в області спряження для різних законів зміни зовнішнього навантаження в часі та за різних значень параметра, який є оберненою величиною до безрозмірного часу запізнення матеріалу проміжного шару.*

**Вступ.** У зв'язку з використанням у сучасних конструкціях клейових з'єднань, ущільнювачів, теплоізоляторів, вібропоглиначів та інших тонкостінних елементів, виготовлених із полімерних матеріалів, виникає потреба дослідження напружено-деформованого стану таких об'єктів з урахуванням в'язкопружних властивостей тонких проміжних шарів. Контактну взаємодію тіл з тонкими прошарками та покриттями з використанням моделі Вінклера (лінійної та нелінійної) в нормальному та дотичному напрямках досліджено в [1]. Контактні задачі для шаруватих тонкостінних елементів конструкцій за наявності тонких клейових прошарків та захисних покриттів розв'язано в [4, 5]. У праці [7] розглянуто низку задач про розрахунок на міцність адгезійних з'єднань при зсуві та нормальному відриві. В роботі [8] побудовано математичну модель функціонально-градієнтних шаруватих композитів, що складаються з тонких кусково-однорідних шарів, за наявності неперервно розподілених міжшарових мікродефектів.

Метою пропонованої статті є дослідження механічної поведінки кусково-однорідного тіла з в'язкопружним проміжним шаром, що описується моделлю Кельвіна – Фойгта [3, 6] і працює на поперечний зсув, в області спряження за дії змінних у часі зсувних навантажень для випадку плоскої деформації або плоского напруженого стану.

**Аналіз деформування області спряження кусково-однорідного тіла з в'язкопружним проміжним шаром.** Розглянемо два твердих тіла, що контактують через тонкий проміжний в'язкопружний шар завтовшки  $2h$ , який описується моделлю Кельвіна – Фойгта [3, 6]. До границь тіл прикладено змінні в часі зсувні навантаження. Задача розглядається у плоскій постановці (плоска деформація або плоский напружений стан). Як показано в [6], механічні умови спряження тіл в дотичному напрямку можуть бути записані таким чином:

$$\sigma_{\tau}^{(1)} = \sigma_{\tau}^{(2)} = \sigma_{\tau}, \quad \sigma_{\tau} = \mu_e [u_{\tau}] + \mu_v [\dot{u}_{\tau}]. \quad (1)$$

Тут  $\sigma_{\tau}^{(i)}$ ,  $u_{\tau}^{(i)}$  ( $i = 1, 2$ ) – дотичні напруження та переміщення границь тіл в області спряження;  $\mu_e = G'_0/2h$  ( $G'_0$  – трансверсальний модуль зсуву проміжного шару);  $\mu_v = \eta_0/2h$  ( $\eta_0$  – в'язкість проміжного шару). Квадратні дужки  $[\cdot]$  означають стрибок відповідних величин в області спряження; крапкою позначено диференціювання за часом.

Зауважимо, що в такій постановці поперечне зсувне деформування проміжного шару повністю описується стрибками дотичних переміщень і швидкостей границь спряжуваних тіл. Встановимо загальні закономірності цього деформування, зумовлені в'язкопружною природою матеріалу шару.

Перепишемо друге зі співвідношень (1) у вигляді

$$[\dot{u}_\tau] + \frac{[u_\tau]}{\tau_K} = \frac{\sigma_\tau(s, t)}{\mu_v}, \quad (2)$$

де  $\tau_K = \mu_v/\mu_e = \eta_0/G'_0$  – час запізнення, а  $s$  – довжина дуги серединної лінії проміжного шару. Розв'язок диференціального рівняння (2) має вигляд

$$[u_\tau] = [u_\tau]^0 e^{-t/\tau_K} + \frac{2h}{G'_0 \tau_K} \int_0^t e^{-(t-t')/\tau_K} \sigma_\tau(s, t') dt', \quad (3)$$

де  $[u_\tau]^0$  – стрибок дотичних переміщень у момент часу  $t = 0$ . Нехай  $[u_\tau]^0 = 0$ , а зовнішнє навантаження таке, що  $\sigma_\tau(s, 0) = 0$ . Інтегруючи вираз (3) частинами, отримаємо

$$[u_\tau] = \frac{2h}{G'_0} \left( \sigma_\tau(s, t) - \int_0^t e^{-(t-t')/\tau_K} \dot{\sigma}_\tau(s, t') dt' \right). \quad (4)$$

З формули (4) випливає, що

$$\lim_{\tau_K \rightarrow \infty} [u_\tau] = 0, \quad \lim_{\tau_K \rightarrow 0} [u_\tau] = \frac{2h}{G'_0} \sigma_\tau(s, t). \quad (5)$$

Нехай зовнішнє навантаження є таким, що

$$\sigma_\tau(s, t) \geq 0, \quad \dot{\sigma}_\tau(s, t) \geq 0 \quad \text{або} \quad \sigma_\tau(s, t) \leq 0, \quad \dot{\sigma}_\tau(s, t) \leq 0 \quad (t \geq 0). \quad (6)$$

Очевидною є оцінка

$$\left| \int_0^t e^{-(t-t')/\tau_K} \dot{\sigma}_\tau(s, t') dt' \right| \leq \int_0^t |\dot{\sigma}_\tau(s, t')| dt' = \pm \int_0^t \dot{\sigma}_\tau(s, t') dt' = \pm \sigma_\tau(s, t). \quad (7)$$

З формули (4) та нерівностей (6), (7) випливає, що

$$0 \leq |[u_\tau]| < \frac{2h}{G'_0} |\sigma_\tau(s, t)| \quad (t \geq 0). \quad (8)$$

Диференціюючи формулу (3) при  $[u_\tau]^0 = 0$ , знайдемо стрибок швидкостей:

$$[\dot{u}_\tau] = \frac{2h}{G'_0 \tau_K} \left( \sigma_\tau(s, t) - \frac{1}{\tau_K} \int_0^t e^{-(t-t')/\tau_K} \sigma_\tau(s, t') dt' \right).$$

Застосовуючи до останньої формули теорему про середнє, отримаємо

$$[\dot{u}_\tau] = \frac{2h}{G'_0 \tau_K} [\sigma_\tau(s, t) - \sigma_\tau(s, t^*) (1 - e^{-t/\tau_K})] \quad (0 < t^* < t),$$

звідки випливає, що стрибок переміщень також є монотонною функцією часу, причому на підставі формули (3)  $\lim_{t \rightarrow \infty} [u_\tau] = 2h\sigma_\tau(s, \infty)/G'_0$ . Таким чи-

ном, у цьому випадку в'язкопружна модель спряження твердих тіл за нульового початкового стрибка контактних переміщень є проміжною між моделлю абсолютно жорсткого на поперечний зсув проміжного шару та класичною пружною моделлю Вінклера. Якщо проміжний шар є клейовим прошарком, то, змінюючи його механічні характеристики, можна регулювати деформативність адгезійного з'єднання при зсуві. Ці висновки справедливі також і у випадку, коли  $\sigma_\tau(s, t)$  має скінченну кількість стрибків на довільному часовому інтервалі  $[0, T]$ .

Нехай тепер зовнішнє навантаження таке, що  $\sigma_\tau(s, t)$  не є монотонною функцією часу. Припустимо, що модуль дотичного напруження в області спряження зростає з часом від нуля до максимального значення, а потім спадає. Покажемо, що подібним чином веде себе і стрибок дотичних переміщень. Момент часу  $t_0$ , коли модуль цієї величини досягає максимуму, ви-

значається умовою  $[\dot{u}_\tau] = 0$  або з використанням формули (3) при  $[u_\tau]^0 = 0$ :

$$\sigma_\tau(s, t_0) - \frac{1}{\tau_K} \int_0^{t_0} e^{-(t_0-t)/\tau_K} \sigma_\tau(s, t) dt = 0.$$

З другого боку, в цей же момент часу крива (3) перетинає граничну криву  $[u_\tau] = 2h\sigma_\tau(s, t)/G'_0$ , що відповідає класичній пружній моделі Вінклера. При  $0 \leq t < t_0$  маємо  $0 \leq |[u_\tau]| < 2h|\sigma_\tau(s, t)|/G'_0$ , тобто крива (3) (у випадку  $\sigma_\tau(s, t) \geq 0$ ) знаходиться під граничною кривою, а при  $t > t_0$  —  $|[u_\tau]| > 2h|\sigma_\tau(s, t)|/G'_0$  (крива (3) знаходиться над граничною кривою). Таким чином, якісна поведінка в часі стрибка дотичних переміщень така сама, як і поведінка дотичного напруження з затримкою, яка є монотонно зростаючою функцією часу запізнення  $\tau_K$ . При цьому гладкість стрибка дотичних переміщень, як видно з формули (3), вища, ніж гладкість дотичного напруження. Зауважимо, що все вищевикладене справедливе тільки, якщо матеріал проміжного шару в області спряження описується в'язкопружною моделлю Кельвіна – Фойгта.

**Кручення складеного циліндра.** Розглянемо кусково-однорідний циліндр, що складається з суцільного внутрішнього циліндра 1 з радіусом  $r_1$  та зовнішнього порожнистого циліндра 2 з внутрішнім радіусом  $r_2$  та зовнішнім радіусом  $R$  (рис. 1). Циліндри склеєні між собою з допомогою тонкого в'язкопружного адгезійного шару. Вважатимемо внутрішній циліндр жорстким і закріпленим, а зовнішній — пружним. Задачу розглядаємо у плоскій постановці як полярно-симетричну [2], користуючись полярною системою координат  $(r, \varphi)$  з полюсом у центрі складеного циліндра. Нехай до границі  $r = R$  циліндра 2 прикладено змінні в часі дотичні напруження  $\tau(t)$ , що спричиняють кручення зовнішнього циліндра відносно внутрішнього. Рівняння рівноваги в переміщеннях циліндра 2 має вигляд

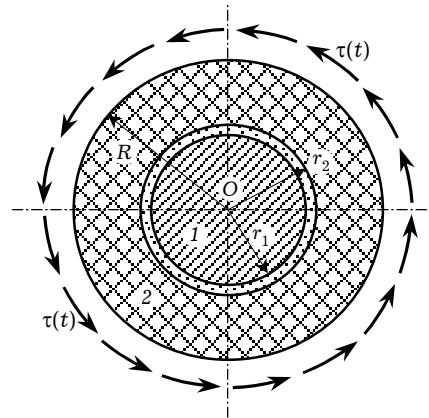


Рис. 1

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d(r u_\varphi)}{dr} \right] = 0 \quad (r_2 \leq r \leq R), \tag{9}$$

де  $u_\varphi$  — переміщення в напрямку кутової координати. Загальний розв’язок рівняння (9) записується так:

$$u_\varphi(r, t) = \frac{1}{\tilde{E}} \left[ 2(1 - \tilde{\nu})A(t)r - \frac{(1 + \tilde{\nu})B(t)}{r} \right].$$

Тут  $\tilde{E} = E/(1 - \nu^2)$ ,  $\tilde{\nu} = \nu/(1 - \nu)$  у випадку плоскої деформації;  $\tilde{E} = E$ ,  $\tilde{\nu} = \nu$  у випадку плоского напруженого стану ( $E, \nu$  — модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалу циліндра 2). Невідомі функції часу  $A(t), B(t)$  знаходимо з граничної умови

$$\tau_{r\varphi}|_{r=R} \equiv G \left( \frac{du_\varphi}{dr} \Big|_{r=R} - \frac{1}{R} u_\varphi|_{r=R} \right) = \tau(t),$$

де  $G = E/[2(1 + \nu)] = \tilde{E}/[2(1 + \tilde{\nu})]$  – модуль зсуву за умов спряження (1), які в розглядуваному випадку зводяться до наступної:

$$\dot{u}_\varphi(r_2, t) + mu_\varphi(r_2, t) = \frac{2h\tau_{r\varphi}(r_2, t)}{\eta_0}.$$

Тут  $m = \tau_K^{-1} = G'_0/\eta_0$ ;  $G'_0$  та  $\eta_0$  – поперечний модуль зсуву та в'язкість адгезійного шару. Нехай  $\tau(0) = 0$ ,  $u_\varphi(r_2, 0) = 0$ . Тоді остаточний розв'язок задачі набуде вигляду

$$u_\varphi(r, t) = \frac{R^2\tau(t)}{2G} \left( \frac{r}{r_2^2} - \frac{1}{r} \right) + \frac{2mR^2hr}{G'_0r_2^3} \int_0^t e^{-m(t-t')} \tau(t') dt',$$

$$\tau_{r\varphi}(r, t) = G \left( \frac{du_\varphi}{dr} - \frac{u_\varphi}{r} \right) = \frac{R^2\tau(t)}{r^2}.$$

В області спряження маємо

$$u_\varphi(r_2, t) = \frac{2mR^2h}{G'_0r_2^2} \int_0^t e^{-m(t-t')} \tau(t') dt',$$

$$\tau_{r\varphi}(r_2, t) = \frac{R^2\tau(t)}{r_2^2}. \quad (10)$$

Отриманий розв'язок має місце як для плоскої деформації, так і для плоского напруженого стану.

**Приклади.** Розглянемо різні за гладкістю монотонні та немонотонні в часі зовнішні навантаження.

1°. Нехай задане дотичне напруження  $\tau(t)$  стрибкоподібно зростає у початковий момент часу від 0 до  $\Gamma_0$  і далі є сталим:

$$\tau(t) = \Gamma_0 H_+(t), \quad (11)$$

де  $H_+(t)$  – функція Гевісайда. Підставляючи (11) у (10), отримуємо

$$u_\varphi(r_2, t) = \frac{2hR^2\Gamma_0(1 - e^{-mt})}{G'_0r_2^2}, \quad v_\varphi(r_2, t) = \dot{u}_\varphi(r_2, t) = \frac{2hR^2\Gamma_0 m e^{-mt}}{G'_0r_2^2},$$

$$\tau_{r\varphi}(r_2, t) = \frac{R^2\Gamma_0 H_+(t)}{r_2^2}.$$

Очевидно, що мають місце нерівність (8) та граничні співвідношення (5).

2°. Нехай тепер зовнішнє навантаження зростає в часі за експоненціальним законом:

$$\tau(t) = \Gamma_0(1 - e^{-bt}) \quad (b > 0). \quad (12)$$

Підставляючи (12) у (10), отримуємо такі вирази для контактних параметрів:

$$u_\varphi(r_2, t) = \frac{2hR^2\Gamma_0}{G'_0r_2^2} \left( 1 - \frac{me^{-bt} - be^{-mt}}{m - b} \right),$$

$$v_\varphi(r_2, t) = \frac{2hR^2\Gamma_0 bm}{G'_0r_2^2(b - m)} (e^{-mt} - e^{-bt}),$$

$$\tau_{r\varphi}(r_2, t) = \frac{R^2\Gamma_0(1 - e^{-bt})}{r_2^2} \quad (m \neq b).$$

На рис. 2 наведено графіки залежності безрозмірного переміщення

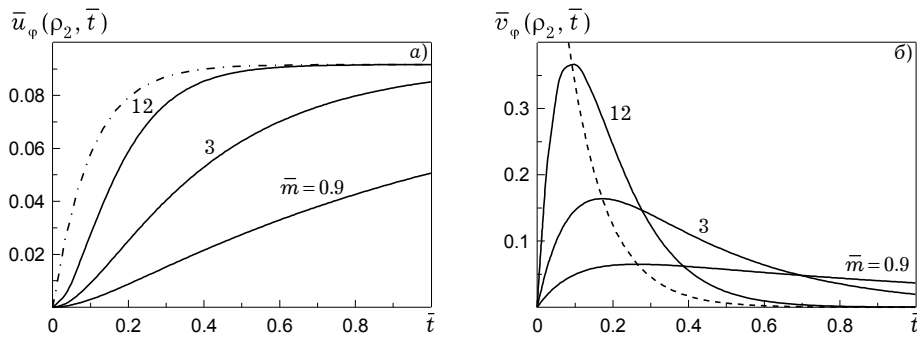


Рис. 2

$\bar{u}_\varphi(\rho_2, \bar{t}) = Gu_\varphi(r_2, t)/(T_0R)$  (рис. 2а) та безрозмірної швидкості  $\bar{v}_\varphi(\rho_2, \bar{t}) = d\bar{u}_\varphi(\rho_2, \bar{t})/d\bar{t} = G\tau_K^0 v_\varphi(r_2, t)/(T_0R)$  (рис. 2б) від безрозмірного часу  $\bar{t} = t/\tau_K^0$  при різних значеннях безрозмірного параметра  $\bar{m} = m\tau_K^0$ . При розрахунках було прийнято:  $\rho_1 = r_1/R = 0.5$ ,  $h/R = 0.0067$ ,  $\rho_2 = r_2/R = \rho_1 + 2h/R$ ,  $G/G'_0 = 1.8107$ ,  $\bar{b} = b\tau_K^0 = 10$ ,  $\tau_K^0 = 10^3$  с. Штрихпунктирною лінією на рис. 2а зображено графік дотичного переміщення в області спряження, що відповідає класичній моделі Вінклера (граничний випадок при  $\bar{m} \rightarrow \infty$ ). Як видно з рис. 2а, нерівність (8) та граничні співвідношення (5) виконуються і в цьому випадку. Поведінка в часі дотичного переміщення якісно повторює поведінку в часі дотичного напруження, яке в даному випадку пропорційне до зовнішнього навантаження. Швидкість циліндра 2 в області спряження при  $\bar{m} < \infty$  зростає від 0 у початковий момент часу до максимального значення  $\bar{v}_\varphi(\rho_2, \bar{t}_*) = 2Gh\bar{m}(\bar{m}/\bar{b})^{\bar{m}/(\bar{b}-\bar{m})}/(G'_0R\rho_2^2)$  у момент часу  $\bar{t}_* = \ln(\bar{m}/\bar{b})/(\bar{m} - \bar{b})$ , а потім спадає до нуля при  $\bar{t} \rightarrow \infty$  (рис. 2б). Штрихова крива проходить через максимуми швидкості. Видно, що момент часу, коли швидкість досягає максимуму, є монотонно спадною функцією параметра  $\bar{m}$ .

3°. Допустимо, що зовнішнє навантаження змінюється в часі за законом

$$\tau(t) = T_0(e^{-b_1 t} - e^{-b_2 t}) \quad (0 < b_1 < b_2). \quad (13)$$

Функція  $\tau(t)$  при  $0 \leq t < t_{\max} = \ln(b_2/b_1)/(b_2 - b_1)$  монотонно зростає від нуля до максимального значення, а при  $t > t_{\max}$  монотонно спадає і прямує до нуля при  $t \rightarrow \infty$ . Підставляючи (13) у (10), маємо

$$\begin{aligned} u_\varphi(r_2, t) &= \frac{2hR^2T_0m}{G'_0r_2^2(m-b_1)(m-b_2)} [(m-b_2)e^{-b_1 t} - (m-b_1)e^{-b_2 t} + \\ &\quad + (b_2-b_1)e^{-mt}], \\ v_\varphi(r_2, t) &= \frac{2hR^2T_0m}{G'_0r_2^2(m-b_1)(m-b_2)} [b_2(m-b_1)e^{-b_2 t} - b_1(m-b_2)e^{-b_1 t} + \\ &\quad + m(b_1-b_2)e^{-mt}], \\ \tau_{r\varphi}(r_2, t) &= \frac{R^2T_0(e^{-b_1 t} - e^{-b_2 t})}{r_2^2} \quad (m \neq b_i, \quad i = 1, 2). \end{aligned}$$

На рис. 3а наведено графіки зміни в часі безрозмірного переміщення  $\bar{u}_\varphi(\rho_2, \bar{t})$  при  $\bar{b}_1 = b_1 \tau_K^0 = 10$ ,  $\bar{b}_2 = b_2 \tau_K^0 = 50$  і різних значеннях параметра  $\bar{m}$ . Штрихпунктирною лінією, як і в попередньому випадку, зображено графік дотичного переміщення, що відповідає класичній Вінклерівській моделі проміжного шару. Оскільки в цій моделі дотичне переміщення  $\bar{u}_\varphi(\rho_2, \bar{t})$  пропорційне до дотичного напруження  $\bar{\tau}_{r\varphi}(\rho_2, \bar{t}) = \tau_{r\varphi}(r_2, t)/T_0$  та до зовнішнього навантаження  $\bar{\tau}(\bar{t}) = \tau(t)/T_0$ , то очевидно, що поведінка в часі дотичного переміщення у випадку в'язкопружної моделі якісно повторює поведінку останніх з затримкою, яка є монотонно спадною функцією параметра  $\bar{m}$ . Всі точки максимумів переміщень  $\bar{u}_\varphi(\rho_2, \bar{t})$  при різних значеннях  $\bar{m}$  лежать на граничній штрихпунктирній кривій, що відповідає класичній моделі Вінклера. Зауважимо, що максимальні значення дотичних переміщень в області спряження у випадку в'язкопружної моделі проміжного шару завжди менші від максимального значення відповідного дотичного переміщення, що відповідає Вінклерівській моделі (граничний випадок при  $\bar{m} \rightarrow \infty$ ). При  $\bar{m} \rightarrow 0$  дотичні переміщення в області спряження прямують до нуля.

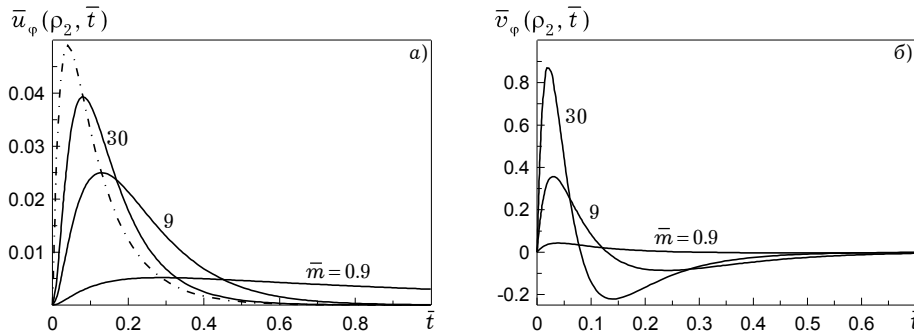


Рис. 3

На рис. 3б зображено графіки безрозмірної швидкості  $\bar{v}_\varphi(\rho_2, \bar{t})$ , побудовані для тих самих значень параметра  $\bar{m}$ . Видно, що швидкість змінює знак в момент часу  $\bar{t}_0$ , коли переміщення  $\bar{u}_\varphi(\rho_2, \bar{t})$  досягає максимуму. У випадку в'язкопружної моделі проміжного шару швидкість в області спряження має один максимум на інтервалі  $(0, \bar{t}_0)$ , де вона є додатною, причому  $\bar{v}_\varphi(\rho_2, 0) = 0$ , і один мінімум на інтервалі  $(\bar{t}_0, \infty)$ , де вона є від'ємною і прямує до нуля при  $\bar{t} \rightarrow \infty$ . Крутизна графіків швидкості збільшується зі збільшенням параметра  $\bar{m}$ . При  $\bar{m} \rightarrow 0$  швидкість в області спряження прямує до нуля.

4°. У випадку кусково-гладкого зовнішнього навантаження

$$\tau(t) = T_0 \begin{cases} \frac{t}{t_1}, & 0 \leq t \leq t_1, \\ e^{-b(t-t_1)}, & t > t_1, \end{cases}$$

що досягає максимального значення при  $t = t_1$ , маємо такі вирази для контактних параметрів:

$$u_\varphi(r_2, t) = \frac{2hR^2\Gamma_0}{G_0' r_2^2} \begin{cases} \frac{1}{t_1} \left( t - \frac{1 - e^{-mt}}{m} \right), & 0 \leq t \leq t_1, \\ \frac{m}{m-b} e^{-b(t-t_1)} - \left( \frac{b}{m-b} + \frac{1}{mt_1} \right) e^{-m(t-t_1)} + \frac{e^{-mt}}{mt_1}, & t > t_1, \end{cases}$$

$$v_\varphi(r_2, t) = \frac{2hR^2\Gamma_0}{G_0' r_2^2} \begin{cases} \frac{1 - e^{-mt}}{t_1}, & 0 \leq t \leq t_1, \\ \left( \frac{bm}{m-b} + \frac{1}{t_1} \right) e^{-m(t-t_1)} - \frac{bm}{m-b} e^{-b(t-t_1)} - \frac{e^{-mt}}{t_1}, & t > t_1, \end{cases}$$

$$\tau_{r\varphi}(r_2, t) = \frac{R^2\Gamma_0}{r_2^2} \begin{cases} t/t_1, & 0 \leq t \leq t_1, \\ e^{-b(t-t_1)}, & t > t_1. \end{cases}$$

На рис. 4а наведено графіки безрозмірного дотичного переміщення  $\bar{u}_\varphi(\rho_2, \bar{t})$  при  $\bar{t}_1 = t_1/\tau_K^0 = 0.1$  і попередніх значеннях параметра  $\bar{m}$ . Як і раніше, штрихпунктирною лінією зображено графік дотичного переміщення, що відповідає класичній моделі Вінклера. Видно, що гладкість дотичного переміщення в області спряження при  $\bar{m} < \infty$  вища, ніж гладкість дотичного переміщення у граничному випадку при  $\bar{m} \rightarrow \infty$ , яке є пропорційним дотичному напруженню  $\bar{\tau}_{r\varphi}(\rho_2, \bar{t})$  та зовнішньому навантаженню  $\bar{\tau}(\bar{t})$ . На рис. 4б зображено графіки безрозмірної швидкості  $\bar{v}_\varphi(\rho_2, \bar{t})$  для тих самих

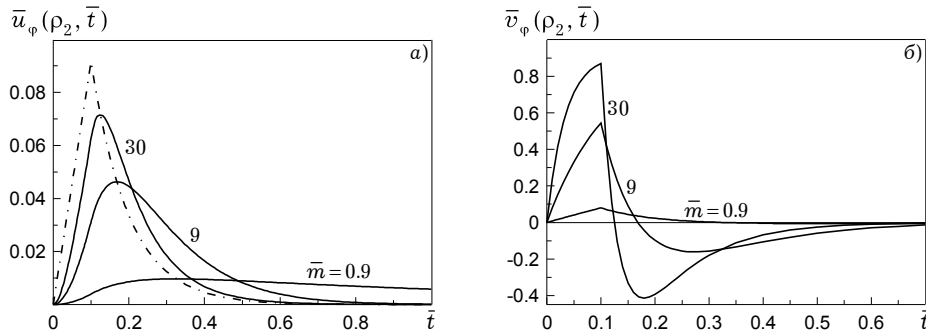


Рис. 4

значень параметра  $\bar{m}$ . Як і в попередньому випадку, швидкість в області спряження змінює знак у момент часу  $\bar{t}_0 > \bar{t}_1$ , коли переміщення  $\bar{u}_\varphi(\rho_2, \bar{t})$  досягає максимуму. У початковий момент часу  $\bar{v}_\varphi(\rho_2, 0) = 0$ . При  $0 < \bar{t} < \bar{t}_0$  ця швидкість є додатною і досягає максимуму в момент часу  $\bar{t} = \bar{t}_1$ . Цей максимум характеризується зломом на графіку (рис. 4б). При  $\bar{t} > \bar{t}_0$  швидкість  $\bar{v}_\varphi(\rho_2, \bar{t})$  від'ємна, має один мінімум і прямує до нуля при  $\bar{t} \rightarrow \infty$ . Гладкість швидкості в області спряження природно є нижчою, ніж гладкість дотичного переміщення.

**Висновки.** З проведеного аналізу поперечного зсувного деформування в'язкопружного проміжного шару видно, що поведінка в часі стрибка дотичних переміщень за нульової початкової умови якісно повторює поведінку дотичного напруження в області спряження з затримкою, яка є монотонно зростаючою функцією часу запізнення  $\tau_K$ . При цьому гладкість стрибка дотичних переміщень вища, ніж гладкість дотичного напруження та стрибка дотичних переміщень, що відповідає граничному випадку класичної пружної моделі Вінклера. Якщо дотичне напруження в області спряження

змінюється в часі немонотонно, то моменти часу, коли стрибок дотичних переміщень досягає екстремуму, співпадають з моментами перетину графіком стрибка дотичних переміщень при скінченній в'язкості проміжного шару граничної кривої, що відповідає класичній пружній моделі Вінклера. У простіших випадках, коли дотичне напруження в області спряження, наприклад, пропорційне зовнішньому навантаженню, умови, що накладаються на дотичне напруження, формулюються безпосередньо для зовнішнього навантаження. Всі висновки справедливі в рамках в'язкопружної моделі Кельвіна – Фойгта для проміжного шару. Якщо проміжний шар моделює клейовий прошарок, то, змінюючи його механічні характеристики, можна регулювати податливість адгезійного з'єднання при зсуві.

1. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. – Москва: Наука, 1983. – 487 с.
2. Гриліцький Д. В. Термопружні контактні задачі в трибології. – Київ: Ін-т змісту і методів навчання Мін-ва освіти України, 1996. – 204 с.
3. Ильюшин А. А., Победра Б. Е. Основы математической теории термовязкоупругости. – Москва: Наука, 1970. – 280 с.
4. Копей Б. В., Максимук А. В., Щербина Н. М. та ін. Насосні штанги та труби з полімерних композитів: проектування, розрахунки та випробування. – Львів: ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2003. – 352 с.
5. Пелех Б. Л., Максимук А. В., Коровайчук И. М. Контактные задачи для слоистых элементов конструкций и тел с покрытиями. – Киев: Наук. думка, 1988. – 280 с.
6. Скородинський І. С. Термов'язкопружна модель шару між двома тілами та умови їх спряження // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2007. – 43, № 3. – С. 35–43.
7. Фрейдін А. С., Турусов Р. А. Свойства и расчёт адгезионных соединений. – Москва: Химия, 1990. – 256 с.
8. Wozniak C., Rychlewska J. Elastodynamics of functionally graded laminates with interlaminar microdefects // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2007. – 43, № 3. – С. 19–26.

#### **АНАЛИЗ ДЕФОРМИРОВАНИЯ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО ТЕЛА С ВЯЗКОУПРУГИМ ПРОМЕЖУТОЧНЫМ СЛОЕМ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СДВИГОВОЙ НАГРУЗКИ**

*Проведен анализ деформирования области сопряжения кусочно-однородного тела с вязкоупругим промежуточным слоем, описываемым моделью Кельвина – Фойгта, под действием изменяющейся во времени сдвиговой нагрузки. В качестве примера решена задача о кручении составного цилиндра. Построены графики временной зависимости касательных перемещений и скоростей в области сопряжения для разных законов изменения внешней нагрузки во времени и при различных значениях параметра, являющегося обратной величиной безразмерного времени запаздывания материала промежуточного слоя.*

#### **DEFORMATION ANALYSIS OF PIECEWISE-HOMOGENEOUS BODY WITH VISCOELASTIC INTERPHASE LAYER UNDER SHEAR LOADING**

*Deformation analysis of junction region of piecewise-homogeneous body with viscoelastic interphase layer being described by the Kelvin – Voigt model under varying in time shear load is performed. The problem about torsion of composed cylinder is solved as an example. The time dependence graphs of tangential displacements and velocities in the junction region for various laws of changing of the external load in time and at different values of parameter being a reciprocal quantity for dimensionless lag time of the interphase layer material are plotted.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано  
29.09.08