УДК 512.54

Я. В. Лавренюк, В. І. Сущанський

ЛОКАЛЬНО СКІНЧЕННІ ГРУПИ, АСОЦІЙОВАНІ З ДІАГРАМАМИ БРАТТЕЛІ

З кожною діаграмою Браттелі природним чином пов'язується локально скінченна група. Вивчається нормальна будова таких груп. Доведено критерій простоти, розглянуто конкретні приклади груп такого типу.

1. Вступ. Клас зліченних локально скінченних груп є в певному сенсі «найближчим» до класу скінченних груп. Саме тому багато задач, які природно виникли стосовно скінченних груп, пізніше розглядаються для груп зліченних і локально скінченних. Зокрема, після завершення класифікації скінченних простих груп природно перейти до дослідження проблеми класифікації зліченних локально скінченних груп. Складність проблеми полягає в тому, що

- не піддаються класифікації зростаючі ланцюги скінченних простих груп,
- існують локально скінченні зліченні прості групи, які не є об'єднанням зростаючих ланцюгів скінченних простих груп.

У роботі [10] було здійснено грубу класифікацію всіх локально скінченних простих груп. Згідно з встановленим у цій праці, кожна локально скінченна проста група є або фінітарною групою матриць над локально скінченним полем або так званою групою знакозмінного типу чи групою p-типу.

З точки зору класифікації, найменш вивченимими є групи знакозмінного типу. Цей клас груп, у свою чергу, ділиться на два підкласи, а саме: групи 1-типу та групи ∞-типу. У роботах [7, 8] було введено класи LDA та LA локально скінченних груп. Клас простих LDA-груп є природним підкласом простих локально скінченних груп 1-типу. Означення цих класів груп буде наведено в **п. 2**.

Головною метою цієї роботи є дослідження LDA-груп з використанням їх зв'язків через діаграми Браттелі з апроксимативно скінченновимірними C^*-алгебрами. У роботі [6] за допомогою техніки діаграм Браттелі було здійснено класифікацію великого підкласу LDA-груп, у який, зокрема, потрапляють всі прості LDA-групи. У цій роботі вивчаємо нормальну будову LDA-груп, даємо критерій простоти для таких груп, а також обговорюємо декілька конкретних прикладів LDA-груп.

2. Базові означення.

2.1. Прості локально скінченні групи. Нагадаємо необхідні означення і факти щодо простих локально скінченних груп.

Група G є *фінітарно лінійною*, якщо для якогось локально скінченного поля K існує точний KG-модуль V такий, що підпростір нерухомих точок кожного з її елементів має скінченну ковимірність у V.

Множина пар $\{(H_i, M_i) \mid i \in I\}$ називається *покриттям Кегеля* для локально скінченної групи G, якщо H_i − скінченна підгрупа G, M_i − максимальна нормальна підгрупа H_i для всіх $i \in I$, а також для кожної скінченної підгрупи H групи G існує $i \in I$ таке, що $H \le H_i$ та $H \cap M_i = 1$. Групи H_i / M_i, $i \in I$, називаються *факторами* покриття Кегеля. Кожна проста локально скінченна група має покриття Кегеля (див. [5]). Коли G − зліченна, то підгрупи H_i можуть бути вибрані таким чином, що будуть утворювати зростаючий ланцюг $H_0 \subset H_1 \subset H_2 \subset \ldots$ з $H_i \cap M_{i+1} = 1$ для всіх i. Покриття Кегеля такого вигляду називається *послідовністю Кегеля.*

Кажуть, що не фінітарна локально скінченна проста група G є:

- *знакозмінного типу*, якщо вона має покриття Кегеля, всі фактори якого − знакозмінні групи;
- 1-*типу*, якщо кожне покриття Кегеля групи G має фактор, який є знакозмінною групою;
- ∞-*типу*, якщо для довільного класу G скінченних простих груп, такого що кожна скінченна група може бути ізоморфно занурена в деяку групу з G, існує покриття Кегеля групи G, всі фактори якого − ізоморфні групам з G;
- p-*типу* (p − просте), якщо кожне покриття Кегеля групи G має фактор, який ізоморфний класичній лінійній групі, визначеній над полем характеристики p.

У. Меєрфранкенфельд і С. Делкруа (див. [4]) довели, що кожна локально скінченна проста група належить рівно до одного з класів: фінітарні групи, групи 1-типу, групи p-типу для єдиного простого p чи групи ∞-типу.

Нагадаємо, що прямою сумою груп підстановок (G,X) і (H,Y), $X\bigcap Y = \varnothing$, називається група підстановок $G\oplus H = (G\times H, X\bigcup Y)$ з такою дією $G\times H$ на $X\bigcup Y$:

$$z^{(g,h)} = \begin{cases} z^g, & z\in X,\\ z^h, & z\in Y.\end{cases}$$

Локально скінченна група називається LDA-*групою*, якщо вона ізоморфна індуктивній границі прямих сум $H_i = A_{i1}\oplus\ldots\oplus A_{ir_i}$ ($i\in\mathbb{N}$) знакозмінних груп підстановок $A_{ik} = \mathrm{Alt}(X_{ik})$ із зануреннями, які визначаються тим, що для всіх $i<j$ кожна нетривіальна орбіта довільної групи A_{ik} на будь-якій множині $X_{j\ell}$ є природною. Якщо в останньому означенні всі H_i є скінченними знакозмінними групами (тобто всі $r_i = 1$), то індуктивна границя називається LA-*групою*.

2.2. Основні конструкції. Спочатку нагадаємо поняття діаграми Браттелі. Будемо використовувати ті ж позначення, що і в [6].

2.2.1. Діаграми Браттелі. Діаграма Браттелі $\mathrm{B} = (\{V_i\}_{i\geq 0}, \{E_i\}_{i\geq 1}, \mathbf{s}, \mathbf{r}, d)$ визначається таким набором даних:

- множина *вершин* $V = V(\mathrm{B})$ з розбиттям на диз'юнктне об'єднання *рівнів* $V = \bigsqcup_{i\geq 0} V_i$;
- множина *ребер*, чи *стрілок* $E = E(\mathrm{B})$ з розбиттям на диз'юнктне об'єднання $E = \bigsqcup_{i\geq 1} E_i$;
- відображення *фіксації початку* та *кінця* $\mathbf{s}: E_i \longrightarrow V_{i-1}$ і $\mathbf{r}: E_i \longrightarrow V_i$, якщо $e\in E$ − ребро, то $\mathbf{s}(e)$ − його *початок* і $\mathbf{r}(e)$ − його *кінець*;
- функція *етикетування* $d: V\longrightarrow \mathbb{N}\setminus\{0\}$ вершин додатними цілими числами.

Також повинні виконуватися дві додаткові вимоги. По-перше, кожна вершина мусить бути початком якогось ребра, і, по-друге, для кожної вершини $v\in V$ повинна виконуватися нерівність

$$d(v) \geq \sum_{\mathbf{r}(e)=v} d(\mathbf{s}(e)). \qquad (1)$$

Подібно, як у [3], позначатимемо вершини з V парою цілих чисел (s,j), де s − номер рівня, до якого належить вершина, а j − номер вершини у V_p (вважаємо, що вершини з V_p занумеровані послідовними натуральними числами, починаючи від 1). Для зручності покладемо, що $|V_0| = 1$ і $d((0,1)) = = 1$. Єдину вершину $(0,1)$ нульового рівня називатимемо *коренем. Кінцем* діаграми B називатимемо довільний нескінченний шлях уздовж стрілок в B, який починається в будь-якій вершині (s,i), де або $s = 0$ або (s,i) не є кінцем жодної стрілки. Казатимемо, що $w \in V_j$ *лежить під* вершиною $v \in V_i$ ($w \prec v$), якщо з вершини v існує шлях вздовж стрілок до вершини w, тобто, якщо $i < j$ і обидві вершини v та w лежать на одному кінці. Позначатимемо через $\partial\mathrm{B}$ границю діаграми B, тобто множину всіх кінців B.

На $\partial\mathrm{B}$ можна ввести природну ультраметрику, поклавши

$$\rho(\gamma_1,\gamma_2) = 1/(n+1),$$

де n − довжина найбільшого спільного шляху, починаючи зі спільного початку обох кінців γ_1 і γ_2. Якщо в кінців нема спільного початку, то відстань між ними вважається рівною 1.

Топологія, індукована метрикою ρ, є локально компактною і цілком незв'язною.

За діаграмою Браттелі $\mathrm{B} = \left(\{V_i\}_{i\ge 0}, \{E_i\}_{i\ge 1}, \mathbf{s}, \mathbf{r}, d\right)$ будується послідовність

$$C_{\mathrm{B}} = \left\langle (\bar{n}^{(s)}, \bar{n}^{(s+1)}, A^{(s)}) \mid s \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\rangle, \tag{2}$$

причому цілочисельний вектор

$$\bar{n}^{(s)} = (n_1^{(s)}, \dots, n_{k(s)}^{(s)})$$

визначається рівностями

$$k(s) = |V_s|, \qquad \bar{n}_i^{(s)} = d((s,i)),$$

а невід'ємна цілочисельна матриця $A^{(s)} = (a_{ij}^{(s)})_{i=1,k(s+1)}^{j=1,k(s)}$ − рівностями

$$a_{ij}^{(s)} = \#\{e \in E \mid \mathbf{s}(e) = (s,j),\ \mathbf{r}(e) = (s+1,i)\} \tag{3}$$

Обмеження, які накладено на діаграми Браттелі, визначають такі обмеження на послідовності (2):

- кожен стовпчик матриці $A^{(s)}$ містить ненульовий елемент, $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;
- $[A \cdot {}^t\bar{n}^{(s)}]_i \le [\bar{n}^{(s+1)}]_i$, $1 \le i \le k(s+1)$ де ${}^t\bar{n}$ − вектор, транспонований до $\bar{n}$;
- $k(0) = 1$, $\qquad \bar{n}_1^{(0)} = 1$.

Послідовність (2) з такими обмеженнями повністю визначає діаграму Браттелі і називається *послідовністю Браттелі.*

2.2.2. LDA-групи. Кожній зліченній LDA (LA)-групі з природною локальною системою підгруп відповідає деяка послідовність Браттелі. Справді, нехай $G = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} G^{(i)}$ − LDA-група, де

$$G^{(s)} = G_1^{(s)} \oplus \dots \oplus G_{k(s)}^{(s)} \qquad (s \in \mathbb{N})$$

− пряма сума нетривіальних скінченних знакозмінних груп, тобто

$$G_k^{(i)} = \mathrm{Alt}(X_k^{(i)}) \qquad (1 \le i \le k(s)).$$

Тоді відповідна послідовність Браттелі будується таким чином:

- $n_i^{(s)} = |X_i(s)|$,
- $a_{ij}^{(s)}$ дорівнює кількості нетривіальних орбіт $G_j^{(s)}$ на $X_i^{(s+1)}$.

Зауважимо, що $\left|X_i^{(s)}\right| \geq 3$. Тому при вивченні LDA-груп будемо розглядати лише діаграми Браттелі, в яких мітки (етикетки) вершин не менші ніж 3 (за винятком кореня).

Далі покажемо, що кожній діаграмі Браттелі природно відповідає єдина (з точністю до ізоморфізму) LDA-група.

Нехай $\mathrm{B} = (\{V_i\}, \{E_i\}, \mathbf{s}, \mathbf{r}, d)$ – діаграма Браттелі, а $C_{\mathrm{B}} = \langle(\bar{n}^{(s)}, \bar{n}^{(s+1)}, A^{(s)}) \mid s \in \mathbb{N} \cup \{0\}\rangle$ – послідовність, яка їй відповідає.

Виберемо множини $X_\ell^{(s)}$, де $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $1 \leq \ell \leq k(s)$, так, щоб $\left|X_\ell^{(s)}\right| = n_\ell^{(s)}$, і кожна з множин $X_\ell^{(s)}$ не перетиналася з іншими. Далі, покладемо

$$X^{(s)} = \bigsqcup_{\ell=1}^{k(s)} X_\ell^{(s)}, \qquad G_\ell^{(s)} = \mathrm{Alt}(X_\ell^{(s)}), \qquad G^{(s)} = \bigoplus_{\ell=1}^{k(s)} G_\ell^{(s)} \qquad (s \in \mathbb{N} \cup \{0\}).$$

Також означимо мономорфізм $\varphi_s : G^{(s)} \to G^{(s+1)}$ такий, щоб кожна нетривіальна орбіта довільного множника $G_j^{(s)}$ на будь-якій множині $X_i^{(s+1)}$ була природною, а їхня кількість дорівнювала числу $a_{ij}^{(s)}$, визначеному рівністю (3). Існування такого мономорфізму забезпечується нерівністю (1). Так означений мономорфізм φ_s називатимемо *d-зануренням з матрицею $A^{(s)}$*. Індуктивна система $\{(G^{(s)}, \varphi_s)),\ s \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ визначає деяку LDA-групу.

Твердження 1. *Нехай*

$$C_{\mathrm{B}} = \langle(\bar{n}^{(s)}, \bar{n}^{(s+1)}, A^{(s)}) \mid s \in \mathbb{N} \cup \{0\}\rangle$$

– послідовність Браттелі, $\langle G^{(s)} \rangle$ – відповідна послідовність прямих сум скінченних знакозмінних груп. Нехай також

$$H_1 = \lim_{s\to\infty}(G^{(s)}, \varphi_s), \qquad H_2 = \lim_{s\to\infty}(G^{(s)}, \psi_s),$$

де φ_s і ψ_s – d-занурення з однією і тією ж матрицею $A^{(s)}$ для кожного невід'ємного цілого s. Тоді групи H_1 та H_2 – ізоморфні.

Д о в е д е н н я. Неважко помітити, що d-занурення мають таку властивість: для довільних двох d-занурень φ_s та ψ_s з матрицею $A^{(s)}$ групи $G^{(s)}$ у групу $G^{(s+1)}$ і для кожного α_s з $\bigoplus_{i=1}^{k(s)} \mathrm{Sym}(X_i^{(s)})$ існує такий елемент α_{s+1} з $\bigoplus_{i=1}^{k(s+1)} \mathrm{Sym}(X_i^{(s+1)})$, що для кожного $g \in G^{(s)}$ виконується рівність

$$\alpha_{s+1}^{-1}\varphi_s(g)\alpha_{s+1} = \psi_s(\alpha_s^{-1} g \alpha_s). \tag{4}$$

Тобто $\alpha_{s+1}^{-1}\varphi_s(g)\alpha_{s+1}$ та $\psi_s(\alpha_s^{-1} g \alpha_s)$ визначають одну й ту ж підстановку множини $X^{(s)}$. Оскільки ж рівність (4) виконується для всіх натуральних s, то за лемою 2.3 з [2] групи H_1 та H_2 – ізоморфні. ◊

Враховуючи твердження 1, можна дати таке

Означення. Індуктивна границя $\lim_{s\to\infty}(G^{(s)}, \varphi_s)$, де φ_s є d-зануреннями з матрицями $A^{(s)}$ ($s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$), називається *знакозмінною групою діаграми Браттелі* B. Позначатимемо цю групу символом $\mathrm{Alt}(\mathrm{B})$.

3. Нормальна будова. Для діаграми Браттелі B групу $\mathrm{Alt}(\mathrm{B}) = \lim\limits_{s\to\infty}(\mathrm{G}^{(s)}, \varphi_s)$ природно розглядати як об'єднання зростаючого ланцюга власних підгруп:

$$\mathrm{Alt}(\mathrm{B}) = \bigcup_{s=0}^{\infty} G^{(s)}.$$

Лема 1. *Нехай* B *– діаграма Браттелі, а* N *– нормальна підгрупа* $\mathrm{Alt}(\mathrm{B})$. *Якщо існує таке* $g \in N \bigcap G^{(s)}$, *що* g *діє нетривіально на* $X_i^{(s)}$ *та* $\left|X_i^{(s)}\right| > 4$, *то* N *містить* $G_i^{(s)} = \mathrm{Alt}(X_i^{(s)})$.

Д о в е д е н н я. Якщо $g \notin \mathrm{Alt}(X_i^{(s)})$, то існує такий $h \in \mathrm{Alt}(X_i^{(s)})$, що комутатор $[g,h]$ елементів h та g нетривіальний. Тому в будь-якому випадку чи g, чи $[g,h]$ міститься в $\mathrm{Alt}(X_i^{(s)}) \bigcap N$. Оскільки ж $\mathrm{Alt}(X_i^{(s)})$ є простою групою, то $\mathrm{Alt}(X_i^{(s)}) \subseteq N$. ◊

Тепер можемо описати всі нормальні підгрупи групи $\mathrm{Alt}(\mathrm{B})$. Нормальна будова цієї групи дуже подібна до будови ідеалів AF C^*-алгебри, асоційованої з діаграмою B. Подібність «псується» лише, коли є мітки 3 та 4, і це відбувається через абелевість та непростоту знакозмінних груп відповідних степенів. У цій частині будемо дотримуватись К. Девідсона [3]. Підмножина S множини $V(\mathrm{B})$ називається *направленою*, якщо з того, що будь-яка вершина (s,i) належить до S і $(s,i) \succ (s+1,j)$ в B, випливає, що $(s+1,j)$ також належить до S. Підмножина S є *спадковою*, якщо з того, що для якоїсь вершини (s,i) з $V(\mathrm{B})$ всі суміжні вершини $(s+1,j)$ належать до S, випливає, що й сама (s,i) належить до S.

Кінець діаграми Браттелі називатимемо n*-кінцем*, якщо всі вершини, що лежать на цьому кінці, можливо, за винятком скінченної кількості, мають мітку n (тобто майже для всіх вершин v з цього кінця $d(v) = n$). Зауважимо, що послідовність міток вершин, які лежать на довільному кінці, є неспадною.

Поставимо у відповідність кожній вершині v з $V(\mathrm{B})$ дві множини: замкнену підмножину $D_v \subset \partial\mathrm{B}$ – множину всіх кінців, що містять v, та підмножину $\bar{D}_v \subset V(\mathrm{B})$ – множину всіх вершин, що лежать під v.

Лема 2. *Нехай* B *– така діаграма Браттелі, що* $\partial\mathrm{B}$ *не містить* n*-кінців. Тоді для довільної вершини* (s,i) *з* $V(\mathrm{B})$ *множина* $\bar{D}_{(s,i)}$ *містить лише скінченну кількість вершин з мітками* n.

Д о в е д е н н я. Нехай $\bar{K}_\ell \subseteq \bar{D}_{(s,i)} \bigcap V_\ell$ – підмножина всіх вершин з мітками n у множині V_ℓ. Розглянемо компактну множину кінців $K_\ell = \bigcup\limits_{v\in\bar{K}_\ell} D_v$. Зрозуміло, що $K_{i+1} \supseteq K_{i+2} \supseteq K_{i+3} \supseteq \ldots$.

За умовою леми перетин $\bigcap\limits_{\ell>i} K_\ell$ є порожнім. Тому всі, можливо, за винятком скінченної кількості, множини K_ℓ є порожні. Таким чином, $\bar{D}_{(s,i)}$ містить лише скінченну кількість вершин з мітками n. ◊

Лема 3. *Нехай* B *– така діаграма Браттелі, що для кожної вершини* (s,i) *множина* $\bar{D}_{(s,i)}$ *містить лише скінченну кількість вершин з мітками, які не перевищують* 4. *Тоді кожна нормальна підгрупа групи* $\mathrm{Alt}(\mathrm{B})$, *що має нетривіальний перетин з підгрупою* $G_i^{(s)}$, *цілком містить цю підгрупу.*

Д о в е д е н н я. Нехай N − нормальна підгрупа групи $\mathrm{Alt}(\mathrm{B})$, що має нетривіальний перетин з $G_i^{(s)}$. Тоді вона має нетривіальний перетин з кожною підгрупою $G_j^{(q)}$ для $(q,j) \in \bar{D}_{(s,i)}$. За умовою леми існує таке натуральне t, $t > s$, що кожна вершина з $V_t \bigcap \bar{D}_{(s,i)}$ має мітку, більшу ніж 4. Звідси дістаємо, що $G_\ell^{(t)} \le N$ для кожної вершини $(t,\ell) \in V_t \bigcap \bar{D}_{(s,i)}$. Отже,

$$G_i^{(s)} \le \bigoplus_{\{\ell|(t,\ )\in V_t \bigcap \bar{D}_{(s,i)}\}} G_\ell^{(t)} \le N . \qquad \Diamond$$

Теорема 1. *Нехай діаграма Браттелі* B *така, що її границя* $\partial\mathrm{B}$ *не містить 3- та 4-кінців. Тоді нормальні підгрупи групи* $\mathrm{Alt}(\mathrm{B})$ *знаходяться в однозначній відповідності з направленими спадковими підмножинами множини* $V(\mathrm{B})$.

Д о в е д е н н я. Нехай N − нормальна підгрупа в $\mathrm{Alt}(\mathrm{B})$. Тоді $N_s = N \bigcap G^{(s)}$ є нормальною підгрупою групи $G^{(s)} = \bigoplus_{i=1}^{k(s)} G_i^{(s)}$. Окрім того, з лем 2 та 3 випливає, що N_s є прямою сумою деякої підмножини $S_N^{(s)} \subset V_s$ (можливо, порожньої) цих же доданків:

$$N_s = \bigoplus_{\{i|(s,i)\in S_N^{(s)}\}} G_i^{(s)} .$$

(Нагадаємо, що розглядаємо тільки такі діаграми, у яких мітки всіх вершин не менші ніж 3, тобто діаграми, для яких всі $G_i^{(s)}$ нетривіальні).

Розглянемо підмножину вершин $S_N \subseteq V(\mathrm{B})$, яка є об'єднанням по всіх невід'ємних цілих s множин $S_N^{(s)}$:

$$S_N = \bigcup_{s\ge 0} S_N^{(s)} .$$

Оскільки послідовність груп N_s однозначно визначає N, то група N однозначно відновлюється за множиною S_N.

Покажемо, що множина S_N є направленою. Якщо $G_i^{(s)}$ міститься в N_s, то з $(s,i) \succ (s+1,j)$ відразу за лемою 1 дістаємо, що перетин $N \bigcap G_j^{(s+1)}$ є непорожнім. Тому N містить $G_j^{(s+1)}$ і, отже, $(s+1,j)$ належить до S_N.

Тепер покажемо, що множина S_N є спадковою. Припустимо, що $(s+1,j)$ належить до S_N для всіх j з множини

$$J := \{ j : (s,i) \succ (s+1,j) \text{ в } \mathrm{B} \} .$$

Тоді, оскільки

$$\varphi_s(G_i^{(s)}) \subset \bigoplus_{j\in J} G_j^{(s+1)} \subset N ,$$

то (s,i) також належить до S_N.

З іншого боку, нехай S_N − направлена і спадкова підмножина $V(\mathrm{B})$. Означимо послідовність підгруп N_s груп $G^{(s)}$, $s \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$, таким чином:

$$N_s = \bigoplus_{\{i|\ (s,i)\in S_N \bigcap V_s\}} G_i^{(s)} .$$

Оскільки S направлена, то ця послідовність є зростаючим ланцюгом підгруп в $\mathrm{Alt}(B)$. Об'єднання цих підгруп N є нормальною підгрупою групи $\mathrm{Alt}(B)$, бо кожна підгрупа N_s нормальна в $G^{(s)}$. Спадковість множини S_N означає, що $N_s = G^{(s)} \bigcap N_{s+1}$, звідки дістаємо, що $N_s = G^{(s)} \bigcap N$. Таким чином, це та ж послідовність, яка пов'язувалася з N в першій частині доведення. Отже, множина S_N канонічним чином пов'язується з N. $\Diamond$

Зазначимо, що, якщо множина S_N відповідає нормальній підгрупі N, то $(s,i) \in S$ тоді й лише тоді, коли $G_i^{(s)} \le N$. Порожня множина може відповідати нетривіальній нормальній підгрупі лише тоді, коли в діаграмі є 3- або 4-кінці.

Казатимемо, що діаграма Браттелі є *простою*, якщо для кожної вершини $v \in V(\mathrm{B})$ і кожного кінця δ існує вершина w з δ, яка лежить під v.

Теорема 2. *Такі умови є рівносильними*:

(***i***) *діаграма Браттелі* B *є простою*;

(***ii***) *група* $\mathrm{Alt}(\mathrm{B})$ *є простою або ізоморфною* Alt_4.

Д о в е д е н н я. Нехай діаграма B проста. Легко бачити, що у цьому випадку $\partial\mathrm{B}$ може мати лише скінченну кількість n-кінців. Причому, якщо в $\partial\mathrm{B}$ є такі кінці, то всі вони є n-кінцями для одного й того ж $n \in \mathbb{N}$, і, більше того, їхні попарні симетричні різниці є скінченними множинами. Дійсно, у цьому випадку існує нескінченний шлях $(s,i_0) \succ (s+1,i_1) \succ (s+2,i_2) \succ \ldots$ з $d((s+\ell,i_\ell)) = n$ для $\ell \ge 0$. Оскільки ж B проста, то $V_{s+\ell} = \{(s+\ell,i_\ell)\}$ для всіх ℓ, починаючи з деякого номера. При цьому $\mathrm{Alt}(\mathrm{B})$ буде ізоморфною Alt_n і твердження теореми є правильним. Тому надалі вважатимемо, що $\partial\mathrm{B}$ не має жодного n-кінця.

Оскільки кожна нетривіальна нормальна підгрупа N має нетривіальний перетин з деякою групою $G^{(s)}$, то якась вершина (s,i) міститься в S_N. Покажемо, що (q,j) міститься в S_N для кожної вершини (q,j) з $V(\mathrm{B})$. Неважко помітити, що $D_{(q,j)}$ є компактною підмножиною $\partial\mathrm{B}$ для довільної вершини (q,j). А тому, враховуючи також направленість S_N і простоту B, одержимо, що існує таке натуральне t, що для кожного ℓ з умови $(t,\ell) \in \in \bar{D}_{(q,j)}$ випливає, що S_N містить (t,ℓ). Звідси, а також зі спадковості S_N випливає, що (q,j) міститься в S_N. Отже, S_N збігається з $V(\mathrm{B})$, а N − з $\mathrm{Alt}(B)$.

З іншого боку, припустимо, що B не є простою. Тоді існує така вершина (s,i), що для довільного кінця δ будь-яка вершина w з δ не лежить під (s,i). Розглянемо направлену підмножину S' множини $V(\mathrm{B})$, яка породжується (s,i). Перетини $S' \bigcap V_s$ є власними підмножинами V_s для всіх достатньо великих натуральних s. Збільшимо S' до найменшої направленої і спадкової множини S, що містить (s,i). Множина S залишиться власною підмножиною $V(\mathrm{B})$, бо так само, як і S', не може містити жодної вершини з δ. Тому S відповідає власній нормальній підгрупі і, таким чином, $\mathrm{Alt}(B)$ є нетривіальною і непростою. Якщо $\mathrm{Alt}(B)$ − скінченна, то вона є нетривіальним прямим добутком скінченних знакозмінних груп і тому не може бути ізоморфною Alt_4. $\Diamond$

4. Деякі приклади.

4.1. Групи, що визначаються рекурентними послідовностями. Розглянемо клас *однорідних* діаграм Браттелі, для яких виконуються дві додаткові умови при $s \geq 1$:

- число $|V_s|$ не залежить від вибору s і є більшим від 1;
- ${}^t\overline{n}^{(s+1)} = A^{(s)} \cdot {}^t\overline{n}^{(s)}$.

Твердження 2. *Нехай* B *− однорідна діаграма Браттелі. Якщо для довільного натурального* s *існує таке натуральне* $t \geq s$, *що матриця* $A^{(t)}A^{(t-1)}\ldots A^{(s)}$ *є строго додатною, то група* $\mathrm{Alt}(\mathrm{B})$ *є простою групою* 1-*типу.*

Д о в е д е н н я. З умови твердження випливає, що діаграма B є простою. А тому згідно з теоремою 2 група $\mathrm{Alt}(B)$ є простою. Доведемо тепер, що $\mathrm{Alt}(B)$ є групою 1-типу. Для цього спочатку покажемо, що вона містить нефінітарну підгрупу. Нехай B_2 − така діаграма, що $|V_s| = 1$, $A^{(s)} = (2)$ для всіх натуральних s. При доведенні твердження 5.3 у [6] було встановлено, що група $\mathrm{Alt}(\mathrm{B}_2)$ не є фінітарною. Легко бачити, що $\mathrm{Alt}(\mathrm{B})$ містить підгрупу, ізоморфну $\mathrm{Alt}(\mathrm{B}_2)$, тому $\mathrm{Alt}(\mathrm{B})$ не є фінітарною. Далі, $\mathrm{Alt}(\mathrm{B})$ має покриття Кегеля, всі фактори якого є знакозмінними групами (див., наприклад, [8]), звідки одержуємо, що ця група є знакозмінного типу. І, нарешті, вона є 1-типу на підставі теорем 1.2 та 1.4 з [4]. ◊

Насправді, подібним чином можна довести і більш загальне твердження: якщо діаграма B така, що $\mathrm{Alt}(\mathrm{B})$ є нескінченною простою групою, то або $\mathrm{Alt}(\mathrm{B})$ ізоморфна нескінченній (фінітарній) знакозмінній групі, або є групою 1-типу (див. також [6, Proposition 5.3]).

Розглянемо тепер діаграми Браттелі, що визначаються за допомогою рекурентних послідовностей.

Нехай рекурентну послідовність $\Sigma = \langle c_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ задано рівнянням

$$c_{n+1} = \ell_m c_n + \ell_{m-1} c_{n-1} + \ldots + \ell_1 c_{n-m+1} \tag{5}$$

для $n \geq m$, де всі ℓ_i ($1 \leq i \leq m$) − невід'ємні цілі, $\ell_1 \ell_m \neq 0$ і $m > 1$. Рівняння (5) визначає послідовність Σ при заданих початкових даних − натуральних числах $c_1, \ldots, c_m$. За послідовністю Σ діаграма B_Σ (власне, послідовність C_{B_Σ}) будується таким чином. Покладемо $\overline{n}^{(1)} = (c_1, \ldots, c_m)$,

$$A^{(0)} = \begin{Vmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{Vmatrix}, \qquad A^{(s)} = A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \ell_1 & \ell_2 & & \ldots & & \ell_m \end{Vmatrix},$$

${}^t\overline{n}^{(s+1)} = A \cdot {}^t\overline{n}^{(s)}$ для $s \geq 1$. Легко помітити, що $n_1^{(s)}$ є s-м членом в послідовності Σ, а діаграма B_Σ є однорідною.

Теорема 3. *Нехай* Σ *− рекурентна послідовність, визначена, як вище. Група* $\mathrm{Alt}(\mathrm{B}_\Sigma)$ *має такі властивості*:

(***i***) $\mathrm{Alt}(\mathrm{B}_\Sigma)$ − *проста група* 1-*типу*;

(***ii***) *кожна локальна система* $\mathrm{Alt}(\mathrm{B}_\Sigma)$ *містить непросту скінченну групу.*

Д о в е д е н н я. (***i***). Оскільки $\ell_1 \ell_m \neq 0$, то A^{2m} є строго додатною. Тому згідно з твердженням 2 група $\mathrm{Alt}(\mathrm{B}_\Sigma)$ є простою групою 1-типу.

(***ii***). Достатньо довести, що існує непроста група H_i в послідовності Кегеля групи $\mathrm{Alt}(\mathrm{B}_\Sigma)$. Припустимо, що це не так. З означення групи 1-типу випливає, що можемо вважати, що кожна H_i в послідовності Кегеля є скінченною знакозмінною групою. У цьому випадку за твердженням 2.1 з [8] група $\mathrm{Alt}(\mathrm{B}_\Sigma)$ має бути LA-групою. Але з іншого боку, $\mathrm{Alt}(\mathrm{B}_\Sigma)$ не є LA-групою − це випливає з теореми 2.1 з [9]. Одержали суперечність. ◊

Локально скінченна проста група, побудована за послідовністю Фібоначчі в [1], є прикладом групи, що визначена рекурентною послідовністю і задовольняє умови теореми 3.

4.2. Група підстановок Паскаля $\mathrm{Alt}(\mathrm{B}_P)$. Означимо послідовність Браттелі C_{B_P} так:

$$A^{(0)} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix}, \qquad A^{(s)} \text{ − } (s+1)\times(s+2)\text{ -матриця вигляду}$$

$$A^{(s)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

${}^t\overline{n}^{(s+1)} = A^{(s)} \cdot {}^t\overline{n}^{(s)}$ для $s \geq 0$. Легко бачити, що $n_i^{(s)}$ дорівнює біноміальному коефіцієнту C_s^{i-1} для всіх $s \geq 0$ і $1 \leq i \leq s+1$. Таким чином, B_P природно пов'язана з трикутником Паскаля. Тому природно називати групу $\mathrm{Alt}(\mathrm{B}_P)$ групою підстановок Паскаля.

Розглянемо діаграму B'_P, яка отримується з B_P видаленням вершин з мітками, меншими ніж 3, і стрілок, що починаються в цих вершинах. Очевидно, що $\mathrm{Alt}(\mathrm{B}_P) \simeq \mathrm{Alt}(\mathrm{B}'_P)$.

Також означимо множину

$$S_v = \{u \in V(\mathrm{B}'_P) \mid u \preceq v\}$$

для кожного $v \in V(\mathrm{B}'_P)$.

Відмітимо, що направлені та спадкові підмножини $V(\mathrm{B}'_P)$ − це множини S_v, $v \in V(\mathrm{B}'_P)$. Множина $L = \{S_v \mid v \in V(\mathrm{B}'_P)\}$ є повною дистрибутивною браткою з операціями $\vee$ та $\bigcap$, де $S_u \vee S_v$ − найменша за включенням множина з L, що містить і S_u, і S_v, та $S_u \bigcap S_v$ − звичайний перетин множин.

З огляду на теорему 1 отримуємо

Твердження 3. *Нехай діаграми* B_P *та* B'_P *такі, як означено вище. Тоді*:

(***i***) *нормальні підгрупи* $\mathrm{Alt}(\mathrm{B}_P)$ *знаходяться в однозначній відповідності з вершинами* B'_P.

(***ii***) *гратка нормальних підгруп* $\mathrm{Alt}(C_p)$ *ізоморфна гратці* $(L, \vee, \bigcap)$.

1. *Сущанский В. И.* Локально конечная простая группа Фибоначчи // Вопросы алгебры. – 1999. – **14**. – С. 107–114.
2. *Burns R. G.* A wreath tower construction of countably infinite, locally finite groups // Math. Zeitschr. – 1968. – **105**. – P. 367–386.
3. *Davidson K. R.* C^*-algebras by example. – Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 1996. – 309 p.
4. *Delcroix S., Meierfrankenfeld U.* Locally finite simple groups of 1-type // J. Algebra. – 2002. – **247**, No. 2. – P. 728–746.
5. *Kegel O. H., Wehrfritz B. A. F.* Locally finite groups. – Amsterdam: North-Holland, 1973. – 210 p.
6. *Lavrenyuk Ya., Nekrashevych V.* On classification of inductive limits of direct products of alternating groups // J. London Math. Soc. – 2007. – **75**, No. 1. – P. 146–162.
7. *Leinen F., Puglisi O.* Diagonal limits of of finite alternating groups: confined subgroups, ideals, and positive defined functions // Illinois J. Math. – 2003. – **47**, No. 1/2. – P. 345–360.
8. *Leinen F., Puglisi O.* Ideals in group algebras of simple locally finite groups of 1-type // Pacific J. Math. – 2002. – **207**, No. 2. – P. 433–445.
9. *Leinen F., Puglisi O.* Some results concerning simple locally finite groups of 1-type // J. Algebra. – 2005. – **287.** – P. 32–51.
10. *Meierfrankenfeld U.* Non-finitary locally finite simple groups // In «Finite and Locally Finite Groups» / B. Hartley et al., Eds. – Dordrecht: Kluwer Acad. Press. – 1995. – P. 189–212.

ЛОКАЛЬНО КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С ДИАГРАММОЙ БРАТТЕЛИ

С каждой диаграммой Браттели естественным образом связывается локально конечная группа. Изучается нормальное строение таких групп. Доказан критерий простоты, рассмотрены конкретные примеры групп такого типа.

LOCALLY FINITE GROUPS ASSOCIATED WITH BRATTELI DIAGRAM

We associate a locally finite group with a Bratteli diagram in a natural way. The normal structure of such groups is studied. The criterion of simplicity is proved, examples groups of such type are considered.

[1] Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка, Київ,
[2] Ін-т математики
Сілезьськ. технолог. ун-ту, Глівіце, Польща

Одержано
27.11.08