

**ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННОГО СОДЕРЖАНИЯ ДАННЫХ НА ОСНОВЕ ИХ СИММЕТРИЙНОГО АНАЛИЗА**

**Abstract:** *Herein an approach to computation of information quantity of object, which doesn't use a probability concept, is proposed. The value of quantity of information is connected to power of orbit of group of automorphisms of object. According to this approach the more symmetries are in object the less quantity of information it contains. Let us remind that symmetry is a transformation which doesn't change object's properties. In this article theoretical foundations of the method are put, main definitions are introduced and key theorems about convergence of quantity of information for object's approximation and about neighborhood of information values for objects which are metrically close are formulated. Graphs of Morse functions and their approximation in a space of words are considered as objects. Then main results of numerical investigation of behavior proper features of introduced object's quantity of information for a Morse function are put. Perspective practical application is also argued and the ways of probable theoretical development and generalization of approach, which is described in this article, are discussed.*

**Key words:** *symmetry, quantity of information, information invariant, Fitingof norm.*

**Анотація:** *У даній статті пропонується підхід до обчислення кількості інформації індивідуального об'єкта, що не використовує ймовірнісну концепцію. Величина кількості інформації пов'язується із потужністю орбіт груп авоморфізмів об'єкта. Згідно з таким підходом, чим більша кількість симетрій властива об'єкту, тим меншу кількість інформації він несе. В статті наведені теоретичні основи методу, вводяться основні визначення і формулюються теореми про збіжність величини кількості інформації для апроксимації об'єкта та про близькість значень величини кількості інформації для метрично близьких об'єктів. Як об'єкти розглядаються графіки функцій Морса та їх апроксимації у просторі слів. Далі наводяться основні результати чисельного дослідження характерних особливостей поведінки введеної таким чином величини кількості інформації об'єкта для морсовської функції. Обговорюються перспективи практичного застосування даного підходу до обчислення кількості інформації об'єкта, та пропонуються шляхи можливого теоретичного розвитку й узагальнення підходу, зображеного у статті.*

**Ключові слова:** *симетрія, кількість інформації, інформаційний інваріант, норма Фітінгофа.*

**Аннотация:** *В данной статье предлагается не использующий вероятностную концепцию подход к вычислению количества информации индивидуального объекта. Величина количества информации связывается с мощностью орбит групп автоморфизмов объекта. Согласно такому подходу, чем большее количество симметрий присуще объекту, тем меньшее количество информации он несёт. В статье приведены теоретические основы метода, вводятся основные определения и формулируются теоремы про сходимость количества информации для аппроксимации объекта и про близость значений количества информации для метрически близких объектов. В качестве объектов рассматриваются графики функций Морса и их аппроксимации в пространстве слов. Далее приводятся основные результаты численного исследования характерных особенностей поведения введённой таким образом величины количества информации объекта для морсовской функции. Обсуждаются перспективы практического использования данного подхода к вычислению количества информации объекта, и предлагаются пути возможного теоретического развития и обобщения подхода, изображённого в статье.*

**Ключевые слова:** *симметрия, количество информации, информационный инвариант, норма Фитингофа.*

## 1. Введение

В современном мире проблема определения количества информации, содержащейся в объекте исследования, играет важную роль. Не менее важную роль играют и задачи о философском смысле понятия информации (особенно для слабо формализованных систем), её свойствах, возможных путях формализации и т.п. Материальным носителем информации является сигнал как средство хранения и передачи информации. Причём существенным являются не сами материальные объекты, а их состояния. И информацию о состоянии объекта/системы исследования несёт выходной сигнал объекта/системы. Проблема определения состояния системы и прогнозирования её поведения по выходному сигналу является весьма актуальной в настоящее время в различных областях исследования, таких как биология, социология, физика. Примеры таких задач обсуждаются в [1]. Например, в [2] авторы предлагают методы предсказания времени ближайшего эпилептического припадка на основе анализа ЭЭГ (электроэнцефалограммы)

пациента. В данном случае в роли системы выступает мозг пациента, а ЭЭГ – это выходной сигнал системы.

В середине XX века К. Шеннон сформулировал постулаты теории информации [3], где объект характеризуется некоторым набором вероятностей. Но как быть, если такой набор вероятностей для него неизвестен? Следует заметить, что в настоящее время существует значительное количество исследований по математической теории информации, в том числе с постановками общих конструкций структуры теории [4, 5]. Однако многообразие задач, так или иначе связанных с понятием информации, громадно, особенно в связи с расширением практических приложений информатики. В связи с этим возникает необходимость расширения границ науки об информации (пусть не всегда и аксиоматических) дедуктивным образом. Поэтому в настоящей работе излагаются предложения к изучению информационного содержания сигналов и процессов, связанных с их геометрическими свойствами, в силу чего можно было бы говорить о «геометрической информации», связанной, в первую очередь, с симметричными свойствами изучаемых объектов. В статье основной упор делается на практические аспекты и возможности предложенных величин в задачах обработки информации. В данной статье авторами предлагается подход к вычислению информации индивидуального объекта из определённого класса в случае, когда каждый индивидуальный объект детерминирован, т.е. изначально отсутствует набор вероятностей распределения элементов в классе.

В разд. 2 данной статьи приведены теоретические основы предлагаемого метода, вводятся основные определения и формулируются ключевые теоремы. В разд. 3 приводятся основные результаты численного исследования характерных особенностей введённой величины, характеризующей количество информации в объекте. Также обсуждаются перспективы практического применения введённого таким образом количества информации в объекте. В заключении предлагаются пути возможного теоретического развития и обобщения подхода, описанного в статье.

## 2. Теоретические основы метода

В пп. 2.1 – 2.4 данного раздела приведены результаты, содержащиеся в [4].

### 2.1. Информация абстрактного объекта

Пусть  $\Omega$  – конечное множество,  $|\Omega|$  – его мощность. Тогда количество информации в элементе  $\omega \in \Omega$  по Хартли равно

$$I(\omega) = \log |\Omega|. \quad (1)$$

Если множество  $\Omega$  разбивается на классы эквивалентности по отношению  $R$ , то количество информации в элементе  $\omega \in \Omega$  равно

$$I(\omega) = \log |\Omega / R|, \quad (2)$$

где  $\Omega / R$  – класс эквивалентности, которому принадлежит  $\omega$ .

Пусть на множестве  $\Omega$  действует группа преобразований  $G$ ,  $g : \Omega \rightarrow \Omega$ ,  $g \in G$ . Тогда  $\Omega$  называется  $G$  – множеством. Для каждого фиксированного элемента  $\omega \in \Omega$  все такие

элементы  $\sigma$  группы  $G$  ( $\sigma \in G$ ), для которых  $\sigma\omega = \omega$  ( $\sigma\omega$  – действие элемента группы на элемент  $\omega \in \Omega$ ), формируют стационарную подгруппу элемента  $\omega$  и обозначаются  $G_\omega$ , т.е.  $\forall \omega \in \Omega, G_\omega = \{g \in G \mid g\omega = \omega\}$ . Также для каждого фиксированного элемента  $\omega \in \Omega$  строится подмножество в  $\Omega$ , которое называется орбитой элемента  $\omega$  и обозначается  $G\omega$ . Орбита элемента  $\omega$  состоит из всех элементов вида  $\sigma\omega$ , где  $\sigma$  «пробегаёт» все элементы группы  $G$ , т.е.  $\forall \omega \in \Omega, G\omega = \{\sigma\omega \in \Omega \mid \sigma \in G\}$ . Таким образом,  $\Omega$  разбивается на непересекающиеся орбиты элементов  $\omega$ . Если  $G/G_\omega$  – множество всех левых смежных классов группы  $G$  по подгруппе  $G_\omega$ , тогда существует взаимно однозначное соответствие между элементами орбиты  $G\omega$  и множеством  $G/G_\omega$  [5]. Следовательно, количество информации в элементе  $\omega \in \Omega$  может быть определено следующим образом:

$$I(\omega) = \log |G\omega| = \log [G : G_\omega], \quad (3)$$

где  $[G : G_\omega]$  – мощность множества всех левых смежных классов группы  $G$  по подгруппе  $G_\omega$  и равна  $\frac{|G|}{|G_\omega|}$ .

## 2.2. Количество информации в слове

Пусть множество  $X$  состоит из конечного числа  $k$  различных букв,  $X$  – упорядоченное множество. Назовём его алфавитом. Пусть  $\Omega = X^n$  – это множество слов длины  $n$  в алфавите  $X$ , и пусть на  $X^n$  действует симметрическая группа перестановок  $S_n$ , переставляющая позиции букв слова. На  $X^n$  поэтому можно ввести информацию типа (3) следующим образом. Если буква  $a_i \in X$  входит в слово  $\omega \in X^n$   $m_i$  раз, то разбиение  $n = m_1 + \dots + m_l, l \leq k$  определяет так называемую композицию слова  $(m_1, \dots, m_l)$ . Назовём те подслова слова  $\omega$ , которые состоят из одинаковой буквы, блоками. Все слова одной и той же орбиты относительно элементов  $S_n$  имеют одну и ту же композицию. Величина

$$I_0(\omega) = \log |G\omega|, \quad G = S_n \quad (4)$$

называется 0-информацией слова  $\omega$ .

Стационарная группа  $G_\omega$  определяется в данном случае прямым произведением стационарных подгрупп  $S_{m_1} \times \dots \times S_{m_l}$  и тогда

$$I_0(\omega) = \log \left( \frac{n!}{m_1! \dots m_l!} \right). \quad (5)$$

Можно ввести обобщение понятия количества информации в слове.

**Определение 2.1.** Пусть на  $A \subset X^n$  действует некоторая группа  $Q \subseteq S_n$  и подгруппа автоморфизмов  $Aut(A, Q, Z) \subset Q$ . Назовём  $A$  – допустимым множеством слов,  $Q$  – допустимым множеством преобразований и  $Aut(A, Q, Z)$  – допустимым множеством автоморфизмов слов, причём данное множество зависит как от  $A$ , так и от  $Q$ , а  $Z \subseteq Q$  – некоторая подгруппа, которой должны принадлежать допустимые автоморфизмы.

Тогда количество информации в слове будет определяться как

$$I^0(\omega) = \log |G\omega|, G = Q, \quad (6)$$

где класс эквивалентности элемента  $\omega$  определяется по подгруппе  $Aut(A, Q, Z)$ .

То, что определение 2.1 действительно обобщение, видно из следующего примера. Пусть  $A \equiv X^n$ ,  $Q \equiv S_n$ , но  $Aut(\omega) \setminus Z \neq \emptyset$ . Тогда классы эквивалентности по  $Z$  больше, чем в обычном случае и  $I^0(\omega) > I_0(\omega)$ . Таким образом, чем больше симметрий в слове, тем больше величина, характеризующая количество информации, содержащейся в нём. Более подробное изложение концепции в [4].

Особо отметим следующее обстоятельство. Количество информации зависит не только от алфавита, длины слова, но также и от обстоятельств, при которых оно рассматривается, т.е. группы  $Q$ ,  $Aut(A, Q, Z)$ , которые могут считаться разными в разных ситуациях, в которых рассматривается слово  $\omega$ . Таким образом, на первый план выдвигается понятие наблюдателя.

### 2.3. Количество информации в индивидуальной кривой

Применим результаты, описанные выше, к определённого типа объектов, а именно, к некоторым видам кривых на плоскости и на двумерных поверхностях. Пусть кривая задана на плоскости соотношением  $F(x, y) = 0$ . Считаем, что кривая достаточно гладкая и без самопересечений. Тогда автоморфизм кривой – это такое преобразование  $T: R^2 \rightarrow R^2$ ,  $x \rightarrow T_1(x, y)$ ,  $y \rightarrow T_2(x, y)$ , при котором выполняется  $F(T_1(x, y), T_2(x, y)) = 0$ .

Неавтоморфных преобразований кривой бесконечно много и прямо определять информацию кривой трудно. Поэтому поступим следующим образом. Выбирается набор производящих элементов (алфавит), объект аппроксимируется словами алфавита, по слову алфавита производится распознавание структуры объекта. Структура алфавита при этом фиксирована. Структура аппроксимации изображения будет различна в зависимости от производящих элементов, которые выбираются в соответствии с целью, ставящейся при распознавании. Прямые предпосылки к такому подходу встречаются в теории распознавания образов.

В дальнейшем будем считать, что мы всегда можем построить требуемую аппроксимацию в фиксированном конечном алфавите  $\overline{M}$ , приспособленном для распознавания данной кривой. Пусть кривая  $\gamma$  задана на компактном множестве  $K \subset R^2$ , и пусть  $P$  – пространство

изображений,  $\gamma_p$  – аналог кривой  $\gamma$  в пространстве изображений  $P$  – тоже задан на соответствующем множестве  $K_p$ , и пусть преобразования кривой  $\gamma$  (автоморфные и неавтоморфные) таковы, что  $T\gamma \subseteq K$ , и их аналоги в  $P - T_p$  – таковы, что  $T_p\gamma_p \subseteq K_p$ .

**Определение 2.2.** При выполнении вышеперечисленных условий назовём количеством информации в кривой  $\gamma$  относительно алфавита  $\bar{M}$  и пространства изображений  $P$  количество информации в кривой  $\gamma_p$ , заданной в виде слова, вычисленного по формуле (2.5).

Зачастую в качестве группы автоморфизмов, по которой вычисляется количество информации в кривой, следует брать подгруппу  $Aut(\gamma)$  и соответственно  $Aut(\gamma_p)$ . Это зависит от целевых установок. Так, например, если интересуются сложностью кривой графика физической величины, то в качестве симметрии графика нас в основном интересуют симметрии относительно преобразований базового пространства, над которым задан график. В случае одной независимой переменной  $x$  и графика  $f(x)$  следует рассматривать симметрии графика  $(x, f(x))$  не среди всех симметрий плоскости  $R^2$ , а только среди преобразований симметрии оси  $R^1$  как базовой области графика.

Приведём пример построения  $\gamma_p$  по  $\gamma$ . Будем считать, что кривая  $\gamma$  имеет вид графика однозначной функции на подмножестве  $\bar{Q}$  цилиндра  $C = S^1 \times R^1$  с областью определения на окружности единичного периметра  $S^1$ ,  $R^1$  – вещественная прямая. Введём на  $C$  дискретную сетку координат с шагом  $h$  по  $x$  и  $\tau$  по  $y$ ,  $x_i = h \cdot i$ ,  $i = 1 \dots n$ ;  $y_j = \tau \cdot j$ ,  $j = 1 \dots M$  ( $h \cdot n = 1$ ,  $\tau \cdot M = H$ , где  $H$  – высота  $\bar{Q}$ ). Поставим в соответствие кривой  $\gamma$  слово некоторого алфавита следующим образом. Интервалу  $[y_j, y_{j+1}]$  ставится в соответствие буква  $a_j$ . Тогда кривая  $\gamma$  кодируется словом  $\omega_n$  длины  $n$  в алфавите из  $M$  букв, причём интервалу  $[x_i, x_{i+1}]$  ставится в соответствие та буква алфавита, которая отвечает отрезку по  $y$ , на котором кривая пересекает вертикальную прямую, выпущенную из  $x_{i+1}$ . Если  $\gamma$  попадает в точку  $x_{i+1}$  в  $y_j$ , то для определённости ставим в слове  $\omega_n$  в позиции  $i$  букву  $a_{j+1}$ . Теперь для  $P$ ,  $\gamma_p$  условия определения 2.2 выполнены и можем вычислить количество информации в кривой. Количество информации в кривой  $\gamma$ , которое мы получим, применив вышеизложенные результаты, относительно и может зависеть от способа разбиения и алфавита, а также от допустимой группы преобразований. Таким образом, вводится в рассмотрение конкретный наблюдатель, которому соответствуют алфавит и разбиение на классы эквивалентности.

#### 2.4. Информационный инвариант кривой

Рассмотрим кривую и алфавит, как в пп. 2.3, и вычислим 0-информацию по формуле (5). В [4] показано, что для слова длины  $n$  ( $n$  – велико) выполнено соотношение

$$\Phi(\omega) \approx \frac{I_0(\omega)}{n}, \quad (7)$$

где

$$\Phi(\omega) = \sum_{i=1}^l \frac{m_i}{n} \log \frac{m_i}{n}, \quad (8)$$

которое называется нормой Фитингофа слова. Будем теперь изучать свойства  $\Phi(\omega_n)$ , вычисленной для данной кривой  $\gamma$  при фиксированном алфавите из  $M$  букв и при измельчении интервалов дискретизации по оси  $x$  ( $h \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ ).

В приводимых теоремах 2.1 и 2.2 будем рассматривать гладкие (класса  $C^2$  и выше) функции на  $S^1$  с невырожденными критическими точками. Напомним, что  $x_0$  называется критической точкой, когда  $\frac{df}{dx}(x_0) = 0$ , а невырожденной критической точкой называется критическая точка, у которой  $\frac{d^2f}{dx^2}(x_0) \neq 0$ . Такие функции называются функциями Морса и известно, что на компактном многообразии, в частности на  $S^1$ , они имеют конечное число критических точек, и критические точки изолированы.

**Теорема 2.1.** Пусть  $f$  – функция Морса на  $S^1$  со свойствами

$$|f| < C_1; \quad (9)$$

$$\left| \frac{df}{dx} \right| < C_2 \quad (10)$$

и  $f$  ставятся в соответствие слова  $\omega_n$  длины  $n$  в фиксированном алфавите, причём  $n > N_0$ , где  $N_0$  определено в доказательстве. Тогда при  $n \rightarrow \infty$  существует

$$\tilde{\Phi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(\omega_n). \quad (11)$$

Доказательство данной теоремы достаточно громоздкое и поэтому в данной статье не приводится. Параметр  $N_0$ , определяемый в доказательстве, для дальнейшего изложения особой роли не играет, поэтому опустим его определение.

Таким образом, для данного объекта и данного алфавита при измельчении разбиения по  $x$  получается некоторый инвариант.

Для последующих рассуждений важны замечание и лемма 2.1.

**Замечание.** Легко заметить, что число различных букв в слове  $\omega_n = \gamma_p$  удовлетворяет неравенству

$$l \leq M_1 = \left( \left[ \frac{2C_1}{\tau} \right] + 2 \right). \quad (12)$$

**Лемма 2.1.** При  $n_1, n_2$ , больших некоторого  $N_0$ , для кривой, удовлетворяющей (9), (10), в словах  $\omega_{n_1}, \omega_{n_2}$  присутствуют все буквы алфавита между  $a_0$  и  $a_{M_2}$ . При этом справедливо  $l_1 = l_2 = M_2$ ,  $M_2 = ([f_{\max} - f_{\min}] / \tau + k_0)$ , где  $k_0 = 2$ , если  $(f_{\max} \neq y_j, \forall j; f_{\min} \neq y_j, \forall j)$  или  $(f_{\max} = y_{j_1}$  для некоторого  $j_1, f_{\min} \neq y_j)$ , и  $k_0 = 1$  в противном случае.

Приведём ещё одно свойство  $\Phi(\omega_n)$ .

**Теорема 2.2.** Пусть  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , определяемые функциями  $f_1$  и  $f_2$  соответственно, удовлетворяют требованиям, предъявляемым в теореме 2.1, и, кроме того, выполнены условия

$$|f_1(x) - f_2(x)| < \varepsilon; \quad (13)$$

$$\left| \frac{df_1(x)}{dx} - \frac{df_2(x)}{dx} \right| < \delta, \quad x \in S^1; \quad (14)$$

$$\left| \frac{d^2 f_1(x)}{dx^2} - \frac{d^2 f_2(x)}{dx^2} \right| < \mu. \quad (15)$$

Тогда, при описанном ранее способе кодирования, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\Phi(\omega_n^1) - \Phi(\omega_n^2)| = \psi(\varepsilon, \delta, \mu); \quad (16)$$

$$\psi(\varepsilon, \delta, \mu) = o(\sqrt{\varepsilon}, \delta, \mu), \quad (17)$$

причём функция  $\psi$  зависит также от функций  $f_1$  и  $f_2$ .

Значение теоремы 2.2 заключается в том, что при рассмотрении кривой с помощью внешнего по отношению к ней разбиения кривые разбиваются на классы эквивалентности по отношению к групповым свойствам их образа в пространстве слов. При этом в один класс попадают кривые, разные по групповым свойствам в исходном пространстве, но близкие в метрическом смысле. Заметим, что функции Морса являются плотным подмножеством в классе отображений гладкости  $C^2$ .

## 2.5. Некоторое развитие идеи

В настоящем подпункте приведём некоторое развитие идей, изложенных выше. А именно, расширим немного понятие нормы Фитингофа для кривой, закодированной в слово.

Пусть кривая  $\gamma$  является графиком функции Морса и удовлетворяет условиям теоремы 2.1.

Кривая  $\gamma$  кодируется, как описано в пп. 2.3, с помощью алфавита  $A_0 = X$ .

(Введём «расширенный» алфавит  $A_1$ , когда двум символам, соседствующим в слове, записанном в алфавите  $A_0 = X$ , ставится в соответствие один символ в алфавите  $A_1$  по правилу).

Введём алфавит производящих элементов  $A_1$  следующим образом:

$$A_1 = \{a_{ij} \mid a_{ij} \in X^2, a_{ij} = (a_i, a_j), a_i, a_j \in X; i, j = 1 \dots M, (i = j) \vee (i = j - 1) \vee (i = j + 1)\} \quad (18)$$

Из (18) следует, что  $A_1$  фактически – это некое подмножество множества слов длины 2,  $A_1 \subset X^2$ , причём  $i, j$  – порядковые номера элементов в алфавите  $A_0 = X$ . Другими словами, в (2.18)  $a_i, a_j \in X$  такие, что являются соседними в исходном алфавите  $A_0 = X$ . Если длина образа (слова)  $\gamma_p = \omega_n$  достаточно велика и  $n$  больше некоторого  $N_0$ , то справедлива Лемма 2.1, и легко заметить, что  $\omega_n$  состоит из блоков определённых элементов алфавита  $X$ , и два соседних блока состоят из элементов, которые являются соседними в  $X$ , т.е.  $\omega_n = (\dots a_{i-1}, a_{i-1}, \dots a_{i-1}, a_i, a_i, \dots a_i, a_{i+1}, a_{i+1}, \dots a_{i+1}, \dots)$ , где  $i$  – порядковый номер элемента в алфавите  $A_0 = X$ . В этом случае слову  $\omega_n$  в алфавите  $X$  можно поставить в соответствие слово  $\tilde{\omega}_n, \tilde{n} = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$  в алфавите  $A_1$ , так как  $A_1$  также является для него множеством производящих элементов. Можем вычислить величину  $I_1$  для слова  $\omega_n$ , которая является 0-информацией для слова  $\tilde{\omega}_n$  относительно группы  $\tilde{G} = \tilde{S}_{\tilde{n}}, \tilde{n} = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$  перестановок элементов алфавита  $A_1$  в слове  $\tilde{\omega}_n$ :

$$I_1(\omega_n) = \log |\tilde{G}\omega_n|, \quad \tilde{G} = \tilde{S}_{\tilde{n}}, \tilde{n} = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor; \quad (19)$$

$$I_1(\omega_n) = \log \left( \frac{\tilde{n}!}{\prod_{i=1}^i \tilde{m}_i!} \right). \quad (20)$$

Здесь  $(\tilde{m}_1, \dots, \tilde{m}_i)$  – композиция слова  $\omega_n$  относительно нового алфавита  $A_1$ . Подчеркнём, что слово  $\omega_n$  получено с использованием алфавита  $X$ , а анализируется относительно  $A_1$  как слово  $\tilde{\omega}_n$ . Величину  $I_1(\omega_n)$  назовём 1-информацией слова, группа  $\tilde{G} = \tilde{S}_{\tilde{n}}$  – это группа перестановок относительно алфавита  $A_1$ . Аналог нормы Фитингофа вводится следующим образом:

$$\Phi_1(\omega_n) = \sum_{i=1}^i \frac{\tilde{m}_i}{\tilde{n}} \log \frac{\tilde{m}_i}{\tilde{n}}. \quad (21)$$

Назовём  $\Phi_1(\omega_n)$  1-нормой слова  $\omega_n$ . Справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.3** (Обобщение теоремы 2.1). Рассмотрим  $f$  – функцию Морса на  $S^1$ , удовлетворяющую условиям теоремы 2.1, такую, что  $f$  имеет, по крайней мере, три точки глобального экстремума на  $S^1$ . Кривая  $\gamma$ , соответствующая функции  $f$ , кодируется в слово длины  $n$  в алфавите  $X$ . Тогда существует предел

$$\tilde{\Phi}_1(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_1(\omega_n). \quad (22)$$

Доказательство теоремы 2.3 в данной статье не приводится по причине его громоздкости. Полностью доказательство может быть найдено в [6].

**Замечание.** При формулировке теоремы нам пришлось сузить класс функций, т.е. ввести требование наличия, по крайней мере, трёх глобальных экстремумов на отрезке, для того чтобы слово, в которое кодируется кривая, содержало все промежуточные элементы алфавита  $A_1$ . Данное требование продиктовано ходом доказательства теоремы 2.3 [3]. Для того чтобы избежать сужения класса функций, достаточно видоизменить алфавит  $A_1$  следующим образом:

$$A_1^* = \{a_{ij} \in X^2 \mid a_{ij} = (a_i, a_j) = (a_j, a_i), a_i, a_j \in X, i, j = 1 \dots M, (i = j) \vee (i = j - 1) \vee (i = j + 1)\}.$$

А именно, в алфавите  $A_1^*$  элементы («символы»)  $(a_i, a_j)$  и  $(a_j, a_i)$  воспринимаются как один и тот же элемент, т.е. как равные. Соответственно при перестановке этих «символов» в слове  $\omega_n$  будет получено некоторое слово  $\hat{\omega}_n$ , которое будет принадлежать стационарной подгруппе слова  $\omega_n$ , т.е., другими словами, перестановка  $(a_i, a_j)$  и  $(a_j, a_i)$  в слове  $\omega_n$  не изменит исходный объект для наблюдателя. Кривая кодируется в алфавите  $A_0 = X$ , а инвариант  $\tilde{\Phi}_1(\omega_n)$  вычисляется для алфавита  $A_1^*$ , как это было описано выше для алфавита  $A_1$ . Понятно, что совершенно аналогичным образом формулируется аналог теоремы 2.1 для случая алфавита  $A_1^*$ .

**Замечание.** Благодаря введению нового алфавита  $A_1^*$ , получили возможность фиксировать не только переносные симметрии кривой, как это было в случае использования алфавита  $A_1$ , но и зеркальные симметрии рассматриваемой кривой.

**Замечание.** Логично предположить, что если рассматривать алфавиты  $A_r, r \geq 2$ , элементами которых будут под слова, принадлежащие  $X^{r+1}$  (т.е. блоки, состоящие из комбинаций  $r+1$  букв исходного алфавита  $A_0 = X$ ), сузить и видоизменить алфавиты  $A_r, r \geq 2$  с тем, чтобы фиксировать как переносные, так и зеркальные симметрии исходного объекта, можно сформулировать аналоги теоремы 2.1 и на случай использования алфавитов  $A_2^*, A_3^*, \dots$ . Полученные инварианты назовём соответственно  $\tilde{\Phi}_2, \tilde{\Phi}_3, \dots$  – 2-норма, 3-норма, ... Формализация данных обобщений требует дальнейшего исследования, но их свойства были подтверждены численно. Для большей ясности опишем, например,

$$A_2 = \left\{ \begin{array}{l} a_{ijk} \in X^3 \mid \bar{a} = (a_i, a_j, a_k), a_i, a_j, a_k \in X, (i = j = k) \vee ((i = j) \wedge ((k = j - 1) \vee (k = j + 1))) \vee \\ \vee ((j = k) \wedge ((i = j - 1) \vee (i = j + 1))) \vee \\ \vee ((j = i + 1) \wedge (k = j + 1)) \vee ((j = i - 1) \wedge (k = j - 1)); i, j, k = 1, 2, 3 \dots \end{array} \right\},$$

$$A_2^* = \left\{ a_{ijk} \in X^3 \mid \bar{a} = (a_i, a_j, a_k) = (a_k, a_j, a_i), a_i, a_j, a_k \in X, (i=j=k) \vee ((i=j) \wedge ((k=j-1) \vee (k=j+1))) \vee \right. \\ \left. \vee ((j=k) \wedge ((i=j-1) \vee (i=j+1))) \vee ((j=i+1) \wedge (k=j+1)) \vee ((j=i-1) \wedge (k=j-1)); i, j, k=1, 2, 3 \dots \right\}.$$

### 3. Практическое исследование введённых характеристик

Все вышеизложенные теоретические результаты были проверены численно с помощью специально созданного для этих целей программного продукта. В данном пункте обсуждаются численные исследования. Тестирование проводилось на примере типично Морсовской функции  $f(x) = \sin(x) + 1$ . Несмотря на кажущуюся простоту примера, были замечены характерные особенности поведения нормы Фитингофа в различных ситуациях.

#### 3.1. Исследование стабилизации различных норм слова для функции

Пусть есть объект  $f(x) = \sin(x) + 1$ . Кривая, соответствующая этой функции, кодируется в слово длины  $n - \omega_n$  согласно пп. 1.3. Здесь и далее в этом пункте анализируемый объект – это слово  $\omega_n$ . Результаты исследований сходимости величин  $\Phi(\omega), \Phi_1(\omega), \Phi_1^*(\omega), \Phi_2(\omega), \Phi_2^*(\omega)$  приведены в табл. 1.

Таблица 1. Исследование сходимости норм слова для функции  $f(x) = \sin(x) + 1$

$M$ , мощность алфавита	$n$ , дискретизация	Норма слова	Модуль отклонения соответствующей нормы, $ \Phi_i(\omega_n) - \Phi_i(\omega_{n+100}) , i = 0 \dots 2$
32	10000	$\Phi$	9,50295138E-6
32	250000	$\Phi_1$	0,0002187
32	250000	$\Phi_1^*$	1,40756818E-5
32	250000	$\Phi_2$	0,0034621
32	250000	$\Phi_2^*$	0,00030937

Отметим, что в данном конкретном примере с уменьшением  $M$  уменьшалась скорость сходимости соответствующей нормы. Вообще говоря, выбор алфавита зависит от специфики входных данных и является фактором, определяемым наблюдателем. Как видно из табл. 1, чем выше порядок нормы слова, тем медленнее наступает стабилизация её значения. Причина, по-видимому, заключается в том, что количество производящих элементов (мощность алфавита) существенно увеличивается, а количество символов в слове уменьшается.

#### 3.2. Исследование метрически близких объектов

Рассмотрим метрику Хэмминга в пространстве слов [6]. Пусть есть два слова  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Тогда метрикой Хэмминга в пространстве слов называется величина  $\bar{d}(\omega_1, \omega_2)$ , равная количеству несовпадающих букв в словах. Посмотрим, как будут вести себя норма Фитингофа и производные от неё нормы  $\Phi_1, \Phi_2$ , вычисленные для метрически близких объектов в смысле метрики

Хэмминга. Рассмотрим слово  $\omega_1$ , соответствующее кривой  $f(x) = \sin(x) + 1$ , и  $\omega_2$  – это слово  $\omega_1$ , трансформированное следующим образом: изменяем количество несовпадающих букв между  $\omega_1$  и  $\omega_2$  так, чтобы кривая, которой соответствует слово  $\omega_2$ , отличалась метрически от кривой, которой соответствует слово  $\omega_1$ , не более чем на  $\tau$  в исходном пространстве кривых. Напомним, что  $\tau$  – это период квантования по вертикальной оси. И пусть  $\omega_2$  получено путём замены определённого количества элементов в  $\omega_1$ , выбранных случайным образом, на элементы алфавита, который на вертикальной оси либо непосредственно предшествует заменяемому символу, либо непосредственно следует за заменяемым символом.

Таблица 2. Исследование поведения нормы Фитингофа и производных от неё норм  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  для метрически близких объектов  $\omega_1, \omega_2$ ;  $n = 10^3$ ,  $M = 32$

$\bar{d}(\omega_1, \omega_2)$	$ \Phi(\omega_1) - \Phi(\omega_2) $	$ \Phi_1(\omega_1) - \Phi_1(\omega_2) $	$ \Phi_2(\omega_1) - \Phi_2(\omega_2) $
100	0,017932	0,036729	0,006006
500	0,038151	0,088170	0,012012
1000	0,027543	0,086209	0,006006

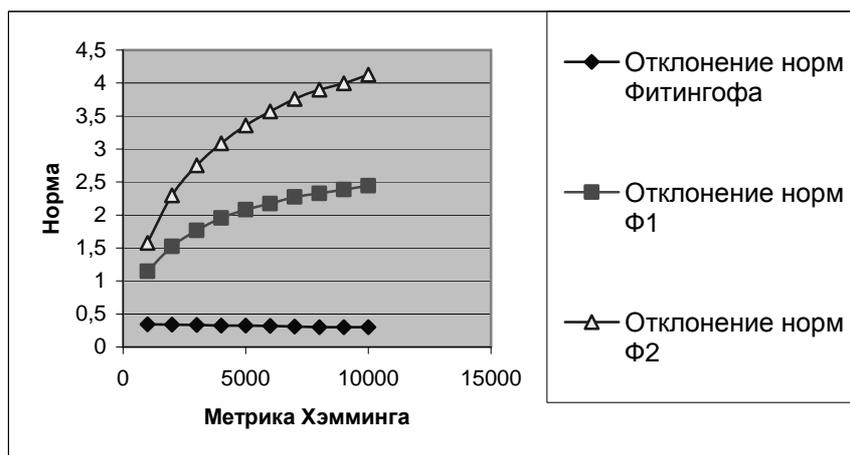


Рис. 1. Поведение норм  $\Phi, \Phi_1, \Phi_2$  для метрически близких объектов  $\omega_1, \omega_2$ ,  $n = 10^5$ ,  $M = 32$

В табл. 2 приведены значения отклонений нормы Фитингофа и производных от неё норм для метрически близких объектов в смысле метрики Хэмминга. Понятно, что графические объекты (кривые), соответствующие объектам  $\omega_1, \omega_2$ , тоже будут метрически близки. Как видно из рис. 1, чем выше порядок нормы, тем выше её чувствительность к изменениям объекта.

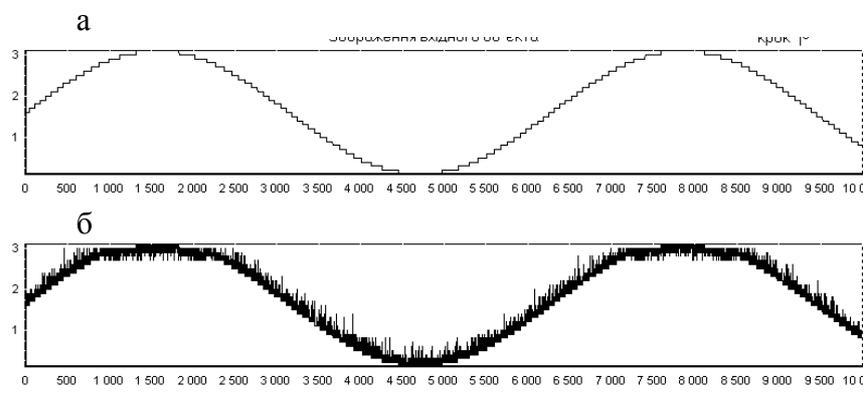
**Замечание.** Тем не менее, экспериментальные результаты, описанные в данном подпункте, нельзя считать подтверждением теоремы 2.2, так как не выполнены её условия. Напомним, что в теореме 2.2 рассматриваются изначально метрически близкие в исходном пространстве кривые, которые затем кодируются в слова, а в данном подпункте мы рассматриваем одну кривую, которая переводится в слово, а затем уже это слово видоизменяется с целью получения нового объекта. И такие операции не являются эквивалентными, т.к. процедура кодирования кривой в слово не является структурно устойчивой, а оператор кодирования, действующий из

пространства кривых в пространство слов, по-видимому, не является взаимнооднозначным. Но всё же можно сделать вывод, что две метрически близких кривых будут закодированы в метрически близкие слова в смысле метрики Хэмминга, и, следовательно, нормы Фитингофа для полученных слов будут отличаться на некоторую конкретную константу с определённой точностью. Это, в свою очередь, может давать в перспективе удобный аппарат для работы с зашумлёнными кривыми с целью их классификации или распознавания, к примеру, с сигналами нейронов мозга. При этом перед кодированием зашумлённой кривой в слово представляется удобным прежде проводить её сглаживание.

### 3.3. Исследование информационных инвариантов на предмет передачи симметричных свойств объекта

В заключение приведём наглядный пример того, как различные нормы передают симметричные свойства объекта. Хотя в данном подпункте не приводятся никаких количественных оценок, всё же он полезен для интуитивного понимания того, как ведут себя соответствующие нормы. Пусть снова есть функция  $f(x) = \sin(x) + 1$ , которая кодируется в слово согласно процедуре, описанной в пп. 2.3. Рассмотрим теперь пооконное прохождение объекта (полученного слова), т.е. на слово накладывается «окно» размером  $l$  символов, и соответствующий инвариант вычисляется для подслова, которое находится в «окне». Затем «окно» сдвигается на один символ вдоль объекта вправо, и снова вычисляется инвариант подслова, которое попадает в «окно». Такая процедура выполняется, пока «окно» не пройдёт от начала и до конца объекта. При этом мы получаем  $n - l$  значений соответствующего инварианта. Обозначим такой параметр как  $\Phi^\omega(x, l)$ , где  $\Phi$  – соответствующий инвариант,  $x$  – позиция начала «окна», накладываемого на объект,  $l$  – размер окна,  $\omega$  – исследуемый объект.

Рассмотрим два объекта  $\omega_1, \omega_2$ , как и в предыдущем подпункте, но с одним отличием:  $M = 30, n = 10^4, \bar{d}(\omega_1, \omega_2) = 5 \cdot 10^3$ . И применим к ним технику пооконного прохождения объекта. Результаты приведены на рис. 2.



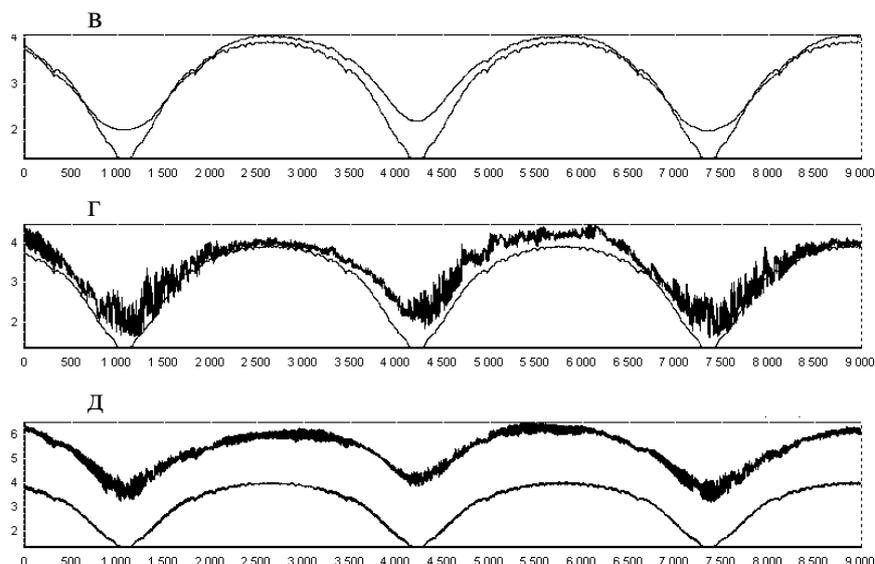


Рис. 2: а) изображение объекта  $\omega_1$ ;  $M = 30, n = 10^4$ ; б) изображение объекта  $\omega_2$ ;  $M = 30, n = 10^4$ ,  $\bar{d}(\omega_1, \omega_2) = 5 \cdot 10^3$ ; в) изображение  $\Phi^{\omega_1}(x, l)$  (нижний график),  $\Phi^{\omega_2}(x, l)$  (верхний график);  $l = 10^3$ ; г) изображение  $\Phi_1^{*\omega_1}(x, l)$  (нижний график),  $\Phi_1^{*\omega_2}(x, l)$  (верхний график);  $l = 10^3$ ; д) изображение  $\Phi_2^{*\omega_1}(x, l)$  (нижний график),  $\Phi_2^{*\omega_2}(x, l)$  (верхний график);  $l = 10^3$

Причём, нормы, которые использовались, фиксируют как переносную, так и зеркальную симметрию. Как видно из рис. 2, значение соответствующей нормы убывает на тех участках объекта, которые инвариантны относительно отражения и переноса. Другими словами, выражаясь на интуитивном уровне, там, где объект «более симметричен» в смысле переносной и зеркальной симметрий, значение соответствующей нормы меньше. Сравним рис. 2 г и д. Такое отличие в изображениях, видимо, связано с тем фактом, что норма  $\Phi_2^*$  «более способна» к фиксации зеркальной симметрии, чем норма  $\Phi_1^*$ , в силу того, как они вводились выше.

Таблица 3. Значения соответствующих норм для объектов  $\omega_1, \omega_2$ ;  $M = 30, n = 10^4$ ,  $\bar{d}(\omega_1, \omega_2) = 5 \cdot 10^3$

	$\Phi$	$\Phi_1^*$	$\Phi_2^*$
$\omega_1$	4,77920200	4,77938636	4,81028776
$\omega_2$	4,78308153	4,92809362	7,15514670
Отклонение по модулю	0,00387952	0,14870726	2,34485893

Значения соответствующих норм для слов  $\omega_1, \omega_2$ ;  $M = 30, n = 10^4$ ,  $\bar{d}(\omega_1, \omega_2) = 5 \cdot 10^3$

приведены в табл. 2.

**Замечание.** Как уже было сказано в начале данного подпункта, все рассуждения, приведённые выше, не являются строго формальными, но необходимы для понимания механизма работы различных норм на интуитивном уровне.

### 3.4. Некоторое обсуждение полученных результатов

В практических задачах целесообразно вычислять интегральный показатель нормы объекта

$$\hat{\Phi} = \sum_{i=0}^k (\vartheta_i \cdot \Phi_i^*(\omega) + \sum_{j=1}^{n-l} \lambda_j \Phi_i^{*\omega}(x_j, l)) , \quad (23)$$

где  $i, k, \vartheta_i, \lambda_j$  – параметры, определяемые в зависимости от целевых установок конкретной задачи и конкретных объектов, учитывая тот факт, что чем выше порядок нормы, тем «чувствительнее» она к изменениям объекта. Такой подход близок к идеям [8], где с целью вычисления инварианта системы (в [8] его называют «сложностью») предлагается анализировать граф, соответствующий сложной системе, с точки зрения алгебраической топологии, а именно, с помощью инструмента симплициальных комплексов. Причём ранее оценку инварианта системы предлагали как глобальную характеристику соответствующего системе комплекса. В [8] автор показывает, что такой подход недостаточен и необходимо учитывать дополнительно и локальные характеристики соответствующего комплекса. В (23) локальными характеристиками объекта являются значения  $\Phi_i^{*\omega}(x_j, l)$ , которые характеризуют объект на определённом его участке. Оценки  $\lambda_j$  определяются в зависимости от значимости конкретного участка объекта. Причём параметры  $\vartheta_i, \lambda_j$  представляется удобным определять с помощью нейронной сети. Некоторые аналогии с таким подходом прослеживаются в [9], где для распознавания графических объектов строится иерархическая вейвлетная сеть, в узлах которой находятся функции, фиксирующие инвариантность объекта относительно поворота, сдвига и растяжения. Такой подход также представляется полезным для детектирования сигналов, где непрерывный сигнал на выходе из АЦП (аналога-цифрового преобразователя) представляет собой набор амплитуд, каждая из которых соответствует очередному моменту времени [10], причём проблема зашумлённости сигнала может быть решена предварительным сглаживанием.

#### 4. Заключение

В данной статье описывается подход для вычисления количества информации индивидуального объекта и его применение к индивидуальным кривым из фиксированных классов. Вводится инвариант объекта  $\tilde{\Phi}$ , называемый нормой Фитингофа объекта и характеризующий объект, принадлежащий определённому классу. Разбиение множества объектов на классы, в свою очередь, зависит от выбора группы преобразований объекта. Отметим одно свойство  $\Phi(\omega_n)$ .  $\Phi(\omega_n)$  есть интеграл по инвариантной мере, определяемой группой автоморфизмов. Можно предполагать, что для общей информации, вводимой определением 2.1, она также будет некоторым интегралом по инвариантной мере. Это можно использовать в двух направлениях. Во-первых, для вычисления информации через интегрирование. Во-вторых, появление интегрирования по инвариантной мере позволяет использовать аппарат теории представлений групп [5]. На этом пути может проясниться более тесная связь введённой величины, характеризующей количество информации, с теорией представлений. Возможно, используя инвариантные меры, можно ввести аналог симметричной размерности для кривой  $\gamma$ , не прибегая к построению аппроксимации  $\gamma_p$ . Это, безусловно, один из путей дальнейшего развития данного

подхода к вычислению информации объекта. Другим интересным направлением исследований, развивающих предложенный подход, является дальнейшая формализация введённых величин, приведение их к системе общих и сравнение с общими конструкциями в математической теории информации, в том числе и приведёнными в [4, 5].

Также в статье проводится численное исследование свойств различных инвариантов объекта на примере типичной функции Морса с целью выявления их характерных свойств и особенностей поведения, обсуждаются перспективы практического и теоретического развития данного подхода.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Makarenko A. Geometrical Approach to the Measure of Individual Object Complexity // Proc. of Fifteenth European Meeting on Cybernetics and Systems Research. Vienna, 25-28 April 2000. – Vienna: Austrian Society for Cybernetics Studies, 2000. – Vol. 1. – P. 21–24.
2. Geometrical approach to predict epileptical seizures in ten minutes interval from the EEG data / A. Makarenko, B. Olexandruk, F. Donatti et al // IFMBE Proc., 2<sup>nd</sup> Medical and biological Engineering Conference EMBEC. – 2002. – P. 450–451.
3. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике / Пер. с англ.; Под ред. Р.Л. Добрушина и О.Б. Лупанова. – М.: ИЛ, 1963.
4. Дидук Н.Н. Информационные пространства. Понятия собственной информации и неопределённости // Кибернетика. – 1986. – № 4. – С. 74–80.
5. Дидук Н.Н. Теория неопределённости: назначение, первые результаты и перспективы // Кибернетика и системный анализ. – 1993. – № 5. – С. 165–173.
6. Макаренко А.С. Об одной мере упорядоченности режимов с обострением. – Киев, 1988. – Рус. – Деп. в УНИИНТИ № 1504.
7. Б.Л. ван дер Варден Алгебра. – М.: Наука, 1976. – 648 с.
8. Сагайдак Л.А. Исследование и применение геометрических свойств сигналов и объектов: Дипломная работа, КА-82, 2004, библиотека УНК ИПСА НТУУ «КПИ».
9. Макаренко А.С. О сложности пространственных объектов. – Киев, 1989. – Деп. в УНИИНТИ № 1717.
10. Degtiarev K.Y. Systems analysis: mathematical modeling and approach to structural complexity measure using polyhedral dynamics approach. Complexity International. – Vol. 7. <http://www.complexity.org.au>.
11. Hierarchical wavelet networks for facial localization / R. Feris, J. Gemel, K. Toyama et al // Proc. of the Fifth IEEE International Conference on Automatic Face and Gesture Recognition. IEEE Computer Society. – Washington, DC, USA, 2002. – P. 125.
12. Markin S.N. Method to detect impulses of various duration generated by Purkinje cells of cerebellar cortex / S.N. Markin, L.N. Podladchikova, W.L. Dunin-Barkowski // Pattern recognition and image analysis. – 2005. – Vol. 15, N 4. – P. 672–675.

*Стаття надійшла до редакції 09.10.2007*