**ФИЗИКА СОЛНЦА**

**КИНЕМАТИКА И ФИЗИКА НЕБЕСНЫХ ТЕЛ том 27 № 5 2011**

УДК 523.9

**А. А. Логинов, Н. Н. Сальников, О. К. Черемных, Я. И. Зелык, Н. В. Маслова**

Институт космических исследований Национальной академии наук Украины
и Государственного космического агентства Украины
03022 Киев, пр. Академика Глушкова 40

# О гидродинамическом механизме генерации глобального полоидального течения на Солнце

*Рассматривается механизм генерации полоидального течения на Солнце, обусловленный его дифференциальным вращением. Найдены области, в которых происходит генерация полоидального течения.*

*ПРО ГІДРОДИНАМІЧНИЙ МЕХАНІЗМ ГЕНЕРАЦІЇ ГЛОБАЛЬНОЇ ПОЛОЇДАЛЬНОЇ ТЕЧІЇ НА СОНЦІ, Логінов О. О., Сальніков М. М., Черемних О. К., Зєлик Я. І., Маслова Н. В. — Розглядається механізм створення полоїдальної течії на Сонці, зумовлений його диференціальним обертанням. Знайдено області, в яких відбувається генерація полоїдальної течії.*

*ON HYDRODYNAMICAL MECHANISM OF GENERATION OF GLOBAL POLOIDAL FLOW OF THE SUN, by Loginov A. A., Sal'nikov N. N., Cheremnykh O. K., Zyelyk Ya. I., Maslova N. V. — The mechanism of the generation of the solar poloidal flow due to the Sun's differential rotation is discussed. Some areas of poloidal flow generation are determined.*

**Введение**. Известно, что Солнце обладает дифференциальным вращением [3]. Непосредственными наблюдениями установлено, что поверхность солнечного экватора имеет угловую скорость вращения, которая примерно на 30 % превышает скорость вращения поверхности приполярных областей. Методами гелиосейсмологии получены количественные данные о внутреннем дифференциальном вращении Солнца [4]. На рис. 1 приведены средние значения угловой скорости вращения элементарного объема солнечной среды в зависимости от его широты и относительного радиуса $R/R_{\odot}$**,** отсчитываемого от геометрического центра Солнца [12].

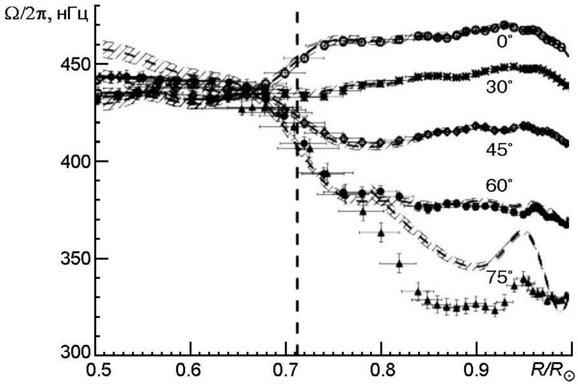


*Рис. 1.* Зависимости частоты вращения внутренних солнечных слоев от относительного радиуса $R/R_\odot$ и гелиошироты (цифры у кривых) [11]

Помимо дифференциального вращения, которое является тороидальным вращением, известно также полоидальное течение на Солнце (см. рис. 2, *д*), которое наблюдается до глубины 12 тыс. км [13].

Считается [3], что полоидальное течение обусловлено двумя конкурирующими факторами: наличием момента центробежных сил между полюсами и экватором и моментом архимедовых сил между экватором и полюсами. Момент архимедовых сил может быть обусловлен анизотропией теплопроводности вращающихся звезд, которая приводит к тому, что полярные области звезды оказываются теплее экваториальных [5]. Поэтому более горячая плазма от полюсов растекается к экватору, а относительно холодная плазма на экваторе погружается в глубину и движется к полюсам. Расчеты дифференциального вращения [3], выполненные с учетом этих двух факторов, в целом удовлетворительно согласуются с данными гелиосейсмологии для больших глубин. Однако на поверхности Солнца эти расчеты дают полоидальное течение, направленное противоположно наблюдаемому.

В данной работе мы уделили внимание иному механизму возникновения и формирования полоидального течения, а именно неустойчивости дифференциального вращения. Ниже будет показано, что неустойчивость генерирует тороидальные структуры с внутренним полоидальным теченим. При этом рассмотрение будет основываться на качественной аналогии между дифференциальным вращением Солнца и течением Куэтта [9].

**Течение Куэтта**. Это течение может быть либо цилиндрическим, либо сферическим. Цилиндрическим течением Куэтта называется стационарное течение жидкости между двумя соосно вращающимися цилиндрами (см. рис. 2, *а*) с постоянными угловыми скоростями и $_2$, а сферическим течением Куэтта — между двумя соосно вращающимися сферами (рис. 2, *в*).

Качественная аналогия между течением Куэтта и дифференциальным вращением Солнца вытекает из следующмх соображений. Внутренняя область Солнца, лежащая ниже тахоклина, вращается почти как твердое тело с постоянной частотой. В течении Куэтта внутренний цилиндр (или сфера) (рис. 2, *а, в*) также вращаются с постоянной частотой. В обоих течениях движение среды характеризуется диффе-

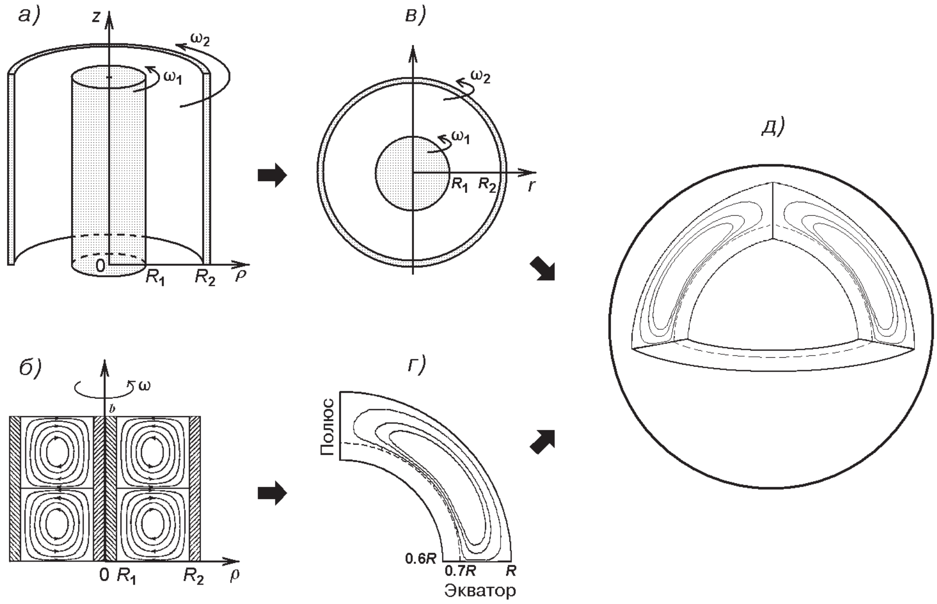


*Рис. 2.* Качественный вид течения Куэтта и полоидального течения на Солнце: *а* — цилиндрическое течение Куэтта, *б* — полоидальное течение в цилиндрическом течении Куэтта (вихри Тейлора [11]), *в* — сферическое течение Куэтта, *г* — полоидальное течение в сферическом течении Куэтта [2], *д* — полоидальное течение на Солнце (пунктиром показана граница тахоклина)

ренциальным вращением и тороидальным осесимметричным течением, на фоне которого может реализоваться полоидальное течение (рис. 2, *б*, *г*, *д*).

Все перечисленные соответствия между течением Куэтта и глобальными течениями на Солнце дают основания привлекать результаты, полученные при изучении течения Куэтта, для качественного объяснения возникновения на Солнце полоидального течения.

**Неустойчивость дифференциального вращения.** Ниже на примере цилиндрического и сферического течений Куэтта будет показано, как неустойчивость дифференциального вращения приводит к возникновению полоидального течения.

Известно, что граница устойчивости тороидально вращающихся сред описывается уравнением Рэлея [2]:

$$\frac{\;^{2}(r)}{r}\quad 0, \qquad (1)$$

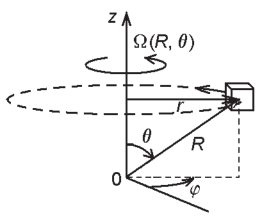


*Рис. 3.* Осесимметричное вращение элементарного объема плазмы

где $(r)\quad r^2\quad (r)$ — угловой момент вращающегося элементарного объема плазмы (рис. 3), $(r)$ — его угловая скорость вращения, $r$ — расстояние от оси вращения до этого объема.

Поясним физический смысл уравнения (1). Рассмотрим, следуя Рэлею [10], виртуальную перестановку двух соосно вращающихся тон-

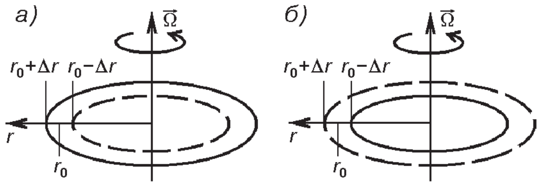


*Рис. 4.* Начальное и конечное положение жидких вращающихся колец в мысленном эксперименте при выводе критерия Рэлея

ких жидких колец единичной массы. Используя результаты [7], вычислим вариацию суммарной энергии обоих колец 2 $(r)$ при такой перестановке, когда сохраняются моменты импульсов $(r) = \sqrt{2\ (r)}$ каждого из колец. Причем такая перестановка производится в $r$-окрестности произвольно выбранной точки $r = r_0$, как показано на рис. 4.

Можно показать [7], что вариация суммарной энергии обоих колец равна

$$2\quad (r)\quad \frac{4(\ r)^2}{r^3}\frac{d}{dr}\ {}^2(r) \tag{2}$$

и содержит множитель $4(\ r)^2 / r^3$, существенный для дальнейшего рассмотрения. Если $(r) > 0$, то согласно энергетическому принципу [8] течение с профилем угловой скорости $(r)$ является устойчивым. Устойчивая система после внесенного возмущения начнет совершать колебательные движения с потенциальной энергией

$$\frac{1}{2}k(\ r)^2, \tag{3}$$

где $k$ эффективная «жесткость» вращающейся среды, действующая на кольцо единичной массы (т. е. $k = {}^2$, частота линейного осциллятора единичной массы). Из выражений (2) и (3) получаем

$$^2\quad \frac{4}{r^3}\frac{d}{dr}\ {}^2(r). \tag{4}$$

Полагая $^2$= const, что соответствует равномерному распределению энергии по элементарным объемам среды, т. е. $(r)$, получаем выражение для частоты вращения как функции радиуса $r$:

$$(r)\quad \frac{(r)}{r^2}\quad \frac{1}{r^2}\sqrt{C^2\quad \frac{^2}{4}\ r^4}, \tag{5}$$

где $C$ некоторая константа интегрирования. Такой профиль вращения далее будем называть равночастотным, поскольку частоты колебаний любого объема жидкости будут одинаковыми и независимыми от его местоположения.

Когда $(r) < 0$, то течение оказывается неустойчивым, и реализуется равноинкрементный профиль частоты вращения

$$(r)\quad \frac{(r)}{r^2}\quad \frac{1}{r^2}\sqrt{C^2\quad \frac{^2}{4}\ r^4}, \tag{6}$$

где – инкремент неустойчивости любого элементарного объема.

При $(r) = 0$ течение находится в состоянии нейтральной устойчивости, когда любая перестановка двух жидких объемов одинаковой массы не приводит к изменению состояния системы. В этом случае вращающаяся среда обладает нейтрально устойчивым профилем частоты вращения по радиусу, для которого

$$(r) \quad \frac{(r)}{r^2} \quad \frac{C}{r^2}. \tag{7}$$

Уравнения (5) — (7) можно записать в виде одного уравнения

$$(r) \quad \frac{(r)}{r^2} \quad \frac{1}{r^2}\sqrt{C^2 \quad \frac{^2}{16} r^4}. \tag{8}$$

Здесь значение величины может быть как действительным, так и мнимым. Профили вращения, удовлетворяющие (8), являются равноэнергетическими, поскольку были выведены в предположении, что энергия системы изменяется на одну и туже величину при перестановке двух близко расположенных жидких вращающихся колец и не зависит от места их расположения.

Введенные равноэнергетические профили вращения позволяют аналитически исследовать устойчивость цилиндрического течения Куэтта и ответить на вопрос, какое течение возникает при развитии неустойчивости.

**Генерация полоидального течения**. Если в стационарное течение Куэтта внести возмущение таким образом, что реализуется равноинкрементное состояние (6), то возникает полоидальное течение, которое описывается уравнениями [7]

$$
\begin{aligned}
V_{nk}^{(r)} &\quad \mathrm{e}^{\,nk\,t} Z_1( \;_n r)\cos \frac{k\ z}{b}, \\
V_{nk}^{(r)} &\quad \mathrm{e}^{\,nk\,t} \;_n \frac{b}{k} Z_0( \;_n r)\sin \frac{k\ z}{b}, \\
{}^2_{nk} &\quad {}^2 \frac{k}{b^2} \frac{1}{{}^2_n \quad \frac{k}{b^2}}.
\end{aligned} \tag{9}
$$

Здесь $Z_0( \ r) \quad C_1 J_0( \ r) \quad C_2 K_0( \ r), Z_1( \ r) \quad C_1 J_1( \ r) \quad C_2 K_1( \ r)$; $J_i$, $K_i$ — функции Бесселя $i$-го порядка. Константы $C_1$, $C_2$ определяются из условия обращения в ноль радиальной составляющей скорости на поверхностях цилиндров $R_1$ и $R_2$, $_n$ — корни характеристического уравнения системы

$$Z_1(R_1 \ \ _n) \quad 0, \qquad Z_1(R_2 \ \ _n) \quad 0, \qquad (n = 0, 1, 2, 3, ...), \tag{10}$$

где $n$ — номер, который указывает на количество нулей функции $Z_1$ на интервале $R_1 < r < R_2$, $k$ — аксиальное волновое число ($k = 1, 2, 3, \ldots$). Формулы (9) получены для идеальной жидкости, поэтому $n$ и $k$ могут принимать значения от 1 до , и геометрические параметры течения их величину не ограничивают. На рис. 2, *б* приведен вид полоидального течения с $n = 0$, $k = 2$. Эта мода выбрана для примера потому, что напоминает полоидальное течение на Солнце (рис. 2, *д*). В лабораторных экспериментах по течению Куэтта [1] вдали от торцов установки наблюдаются структуры с $n = 0$ и таким $k$, что крайние границы этих структур в сечении имеют примерно квадратную форму (см. рис. 2, *б*). Впервые математическое описание таких структур для случая малого промежутка между граничными цилиндрами дал Тейлор [11], и в дальнейшем они получили название вихрей Тейлора.

Точно такой же результат был получен численно для сферического течения Куэтта [7]. На рис. 2, *д* приведен вид сферической моды полоидального течения $n = 0$, $k = 2$ построенный методом Бубнова — Галеркина. Такое течение наблюдается в лабораторных экспериментах [2] и именно такими рисунками обычно схематически иллюстрируется вид полоидального течения на Солнце (рис. 2, *д*).

Таким образом, в областях на Солнце, для которых выполняется критерий Рэлея, происходит потеря устойчивости дифференциального вращения; следствием потери устойчивости дифференциального вращения на Солнце является генерация меридиональной циркуляции (см. рис. 2, *г*) в виде вихрей Тейлора; размер и форма области неустойчивости определяется условием отрицательности функции

$$(R,\ )\quad \frac{}{r}[r^2(R,\ )\ \ (R,\ )]\quad 0 \qquad (11)$$

(смысл $r$, $R$,     понятен из рис. 3).

**Устойчивость дифференциального вращения Солнца**. Внутренние слои Солнца можно представить в виде совокупности колец, которые вращаются вокруг общей оси. Каждое кольцо описывается координатами $R$ и    сферической системы координат $R$,   ,   , начало которой помещено в центр Солнца, а полярная ось направлена вдоль оси вращения Солнца (см. рис. 3). Как отмечалось выше, методами гелиосейсмологии получена зависимость угловой скорости вращения элементарного объема    от $R$ и $_i$,    $_i(R) =\ (R,\ _i)$, $i = 0, ..., 6$, которые приведены на рис. 1 для значений гелиоширот $_g = 0$ , 30 , 45 , 60 , 75  и 90 . Данные для гелиошироты 15  были взяты из работы [3]. Связь между гелиоширотой северного полушария $_g$ и углом    сферической системы координат задается соотношением    $_g$.

Для анализа устойчивости течения наблюдательные кривые $_i(R)$ аппроксимируем по фукциям вида cos(6$nR$):

$$_i(R)\quad a_0(\ _i)\quad a_1(\ _i)\cos(6R)\quad \ldots\quad a_{21}(\ _i)\cos(126R). \qquad (12)$$

Коэффициенты $a_n$ разложения для разных $_i$ приведены в таблице.

В свою очередь, коэффициент $a_n$   $a_n(\ )$ для каждого $n$ представим в виде

$$a_n(\ )\quad b_{n0}\quad b_{n1}\cos(2\ )\quad b_{n2}\cos(4\ )\quad \ldots\quad b_{n6}\cos(12\ ). \qquad (13)$$

**Значения коэффициентов $a_n$ разложения полиномов (12) для разных $_i$**

| $n$ | = 0 | = 15 | = 30 | = 45 | = 60° | = 75 | = 90 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | –1851.197207 | 7588.058514 | 466.4540188 | 2064.372562 | –228.4635357 | –383.7822680 | 2087.341880 |
| 1 | 4363.60 | –14304.0 | –147.4303 | –3259.90 | 1315.90 | 1639.70 | –3254.20 |
| 2 | –4275.00 | 13821.0 | 117.9545 | 3149.10 | –1280.30 | –1594.60 | 3142.60 |
| 3 | 4097.30 | –13116.0 | –102.6800 | –2992.30 | 1203.40 | 1494.50 | –3014.00 |
| 4 | –3798.30 | 12189.0 | 84.7224 | 2768.60 | –1130.80 | –1403.30 | 2781.40 |
| 5 | 3470.10 | –11088.0 | –83.9031 | –2527.90 | 1017.00 | 1262.80 | –2550.40 |
| 6 | –3094.60 | 9851.0 | 70.5628 | 2241.90 | –912.60 | –1136.10 | 2248.70 |
| 7 | 2707.20 | –8551.0 | –62.0008 | –1951.30 | 785.90 | 978.70 | –1966.50 |
| 8 | –2303.20 | 7232.0 | 46.1251 | 1646.50 | –671.10 | –837.00 | 1654.20 |
| 9 | 1928.60 | –5947.0 | –36.7365 | –1359.90 | 550.00 | 685.60 | –1374.80 |
| 10 | –1559.50 | 4762.0 | 26.1325 | 1087.00 | –443.10 | –554.10 | 1094.70 |
| 11 | 1235.80 | –3688.0 | –18.2988 | –845.10 | 342.90 | 428.90 | –857.10 |
| 12 | –937.30 | 2763.0 | 10.9729 | 632.50 | –258.30 | –324.10 | 639.70 |
| 13 | 697.80 | –1991.0 | –5.6904 | –456.10 | 186.60 | 233.90 | –466.20 |
| 14 | –492.60 | 1369.0 | 2.1104 | 314.20 | –128.80 | –162.30 | 320.70 |
| 15 | 337.40 | –901.0 | 0.4121 | –205.70 | 85.00 | 107.10 | –212.60 |
| 16 | –217.10 | 549.0 | –1.4437 | 126.40 | –52.10 | –66.10 | 130.90 |
| 17 | 133.20 | –318.0 | 2.2473 | –71.70 | 30.40 | 38.50 | –75.80 |
| 18 | –74.60 | 159.0 | –2.1258 | 36.80 | –15.40 | –19.80 | 39.20 |
| 19 | 39.80 | –75.0 | 1.6036 | –16.20 | 7.20 | 9.40 | –18.10 |
| 20 | –15.40 | 25.0 | –0.8696 | 5.90 | –2.40 | –3.40 | 6.60 |
| 21 | 7.40 | –8.0 | 0.4371 | –1.40 | 0.80 | 1.10 | –1.80 |

Разложение по косинусам четного аргумента в (13) обусловлено симметрией дифференциального вращения относительно плоскости экватора Солнца.

Для определения коэффициентов $b_{ni}$, $i = 0, ..., 6$ в разложении (13) используем известные значения $a_n(\ _i) = a_{ni}$ из таблицы и сформируем из коэффициентов $a_{ni}$ и $b_{ni}$ следующие векторы:

$$\mathbf{a}_n \quad (a_{n0},...,a_{n6})^{\mathrm{T}},\ \mathbf{b}_n \quad (b_{n0},...,b_{n6})^{\mathrm{T}},\ \ \mathbf{a}_n, \mathbf{b}_n \quad R^7. \tag{14}$$

Тогда задача определения $\mathbf{b}_n$ сведется к решению системы линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{a}_n \quad \hat{\mathbf{C}}\mathbf{b}_n, \tag{15}$$

с матрицей $\hat{\mathbf{C}}$ вида

$$\hat{\mathbf{C}} \quad \begin{matrix} 1 & \cos(2\ _0) & \cos(4\ _0) & ... & \cos(12\ _0) \\ 1 & \cos(2\ _1) & \cos(4\ _1) & ... & \cos(12\ _1) \\ & & \mathbf{...} & & \\ 1 & \cos(2\ _6) & \cos(4\ _6) & ... & \cos(12\ _6) \end{matrix}\ . \tag{16}$$

Эта матрица не вырождена ($\det\hat{\mathbf{C}}$ 0), поэтому коэффициенты разложения для функций $a_n(\;)$ находим из (15). Подставляя их в (12), получаем искомую аппроксимацию $(R,\;)$:

$$(R,\;)\quad a_0(\;)\quad a_1(\;)\cos(6R)\quad\ldots\quad a_{21}(\;)\cos(126R)$$

$$= \sum_{n\;0}^{21} a_n(\;)\cos(6nR). \qquad (17)$$

Для исследования устойчивости дифференциального вращения Солнца перейдем в (17) к цилиндрическим координатам $r$, $z$, . Связь сферических и цилиндрических координат

$$R \quad R(r,z) \quad \sqrt{r^2 \quad z^2}, \qquad r \quad r(R,\;) \quad R\sin\;,$$
$$(r,z) \quad \mathrm{arctg}\frac{r}{z}, \qquad z \quad z(R,\;) \quad R\cos\;, \qquad (18)$$

позволяет записать (17) в цилиндрических координатах. Используя (18), из (11) и (17) находим

$$(R,\;) \quad \left.\frac{(r^2 \quad (r,\;))}{r}\right|_{\substack{z \quad z(R,\;)\\ r \quad r(R,\;)}} =$$

$$= 2R\sin \quad (r,\;) \quad R^2\sin^2 \quad \frac{}{R}\sin \quad \frac{\cos}{R} \quad =$$

$$= 2R\sin \quad (R,\;) \quad \frac{}{R}R^2\sin^3 \quad R\sin^2 \quad \cos\;, \qquad (19)$$

что позволяет установить области, в которых выполняется критерий (11).

Функция $(R,\;)$ в сферическом слое изображена на рис. 5. Параллелограммом (рис. 5, *а*) и треугольником (рис. 5, *б*) отмечена область, в которой $(R,\;) < 0$, что свидетельствует о потере устойчи-

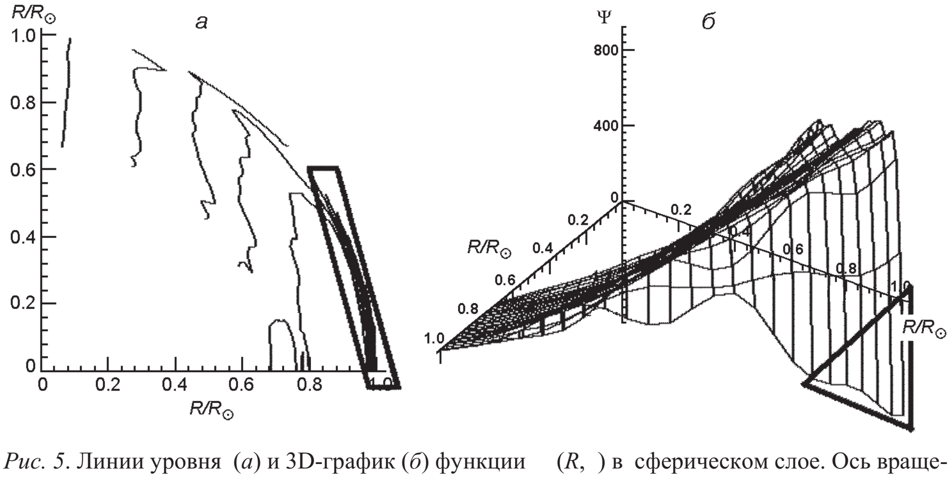


*Рис. 5.* Линии уровня (*а*) и 3D-график (*б*) функции $(R,\;)$ в сферическом слое. Ось вращения находится слева

вости дифференциального вращения в этой области. Появление областей неустойчивости в северном и южном полушариях указывает на наличие на Солнце полоидального течения.

**Выводы.** Проведенный в работе качественный анализ позволяет сделать следующие выводы: на Солнце могут быть области, в которых происходит потеря устойчивости дифференциального вращения; в этих областях происходит генерация полоидального течения в виде вихрей Тейлора.

Вопрос о пространственном виде и временных характеристиках возникшего полоидального течения подробно исследован в работе [6].

1. *Гидродинамические* неустоучивости и переход к турбулентности. — М.: Мир, 1984.—344 с.

2. *Джозеф Д.* Устойчивость движений жидкости. — М.: Мир, 1981.—638 с.

3. *Кичатинов Л. Л.* Дифференциальное вращение звезд // Успехи физ. наук.—2005.—**175**, № 5.—С. 475—494

4. *Косовичев А. Г.* Гелиосейсмология // Изв. Крым. астрофиз. обсерватории.—2007.—**103**, № 2.—С. 130—142.

5. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. — М.-Л.: ОГИЗ, 1941.—Т. 1.—348 с.

6. *Логинов А. А., Сальников Н. Н., Черемных О. К. и др.* Гидродинамическая модель генерации глобального полоидального течения Солнца // Космічна наука і технологія.—2011.—**17**, № 1.—С. 29—35.

7. *Логинов А. А., Самойленко Ю. И., Ткаченко В. А.* Возбуждение меридионального течения дифференциальным вращением в жидком ядре Земли // Космічна наука і технологія.—2000.—**6**, № 2/3.—С. 53—68.

8. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.—472 с.

9. *Couette M*. Etudes sur le frottement des liquides // Ann. Chem. Phis.—1890.—**21**.—P. 433.

10. *Rayleigh*. On the dynamics of revolving fluids // Sci. Pap.—1916.—**6**.—P. 447— 453. — (Proc. Roy. Soc. London A.— 1916. —93.—P. 148).

11. *Teylor G. I.* Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders // Trans. Roy. Soc. London A.—1923.—**223**.—P. 289.

12. *Thompson M. J., Christensen-Dalsgaard J., Miesch M. S., Toomre J.* The internal rotation of the Sun // Annu. Rev. Astron. and Astrophys.—2003.—**41**.—P. 599—643.

13. *Zhao J., Kosovichev A. G.* Torsional oscillation, meridional flows, and vorticity inferred in the upper convection zone of the Sun by time-distance helioseismology // Astrophys. J.—2004.—**603**.—P. 776—784.

Поступила в редакцию 09.04.10