

УДК 519.81

В. В. Циганок

Інститут проблем реєстрації інформації НАН України
вул. М. Шпака, 2, 03113 Київ, Україна

Метод обчислення ваг альтернатив на основі результатів парних порівнянь, проведених групою експертів

Запропоновано метод, який дозволяє провести розрахунки усереднених ваг об'єктів, що підлягають оцінюванню (альтернатив), на основі експертної інформації, а саме, матриць парних порівнянь, отриманих від групи експертів. Враховано рівень компетентності кожного експерта в питанні, що розглядається. Представлено основні характеристичні параметри методу, отримані в результаті експериментального дослідження. Розглянуто ітеративний спосіб реалізації методу.

Ключові слова: парні порівняння, ідеально узгоджена матриця парних порівнянь, методи групового експертного оцінювання.

У системах, які ґрунтуються на використанні знань, отриманих від експертів — системах підтримки прийняття рішень (СППР), експертних системах і т.п. — для отримання усереднених ваг об'єктів, які оцінювались групою експертів, використовуються методи групового експертного оцінювання зі зворотним зв'язком з експертами [1]. Однак існують ситуації, коли зворотній зв'язок з експертом неможливий або недоцільний, наприклад, у випадку неможливості повторно зібрати групу для внесення уточнень в експертні оцінки, або коли існують жорсткі обмеження в часі на проведення експертизи. В таких і подібних випадках існує можливість усереднити результати парних порівнянь експертів, що зазвичай представлені матрицями парних порівнянь (МПП), та розрахувати усереднені ваги об'єктів, які оцінювались експертами.

Пропонується метод, в основу якого покладено елементи комбінаторної обробки результатів парних порівнянь, що були застосовані в методі індивідуального експертного оцінювання зі зворотним зв'язком з експертом [2].

Суть запропонованого методу можна розкрити при розв'язанні задачі, що формулюється наступним чином.

Дано: $A_i, i = (1, m)$ — матриці парних порівнянь альтернатив розмірністю $n \times n$ кожна, де m — кількість експертів, n — кількість альтернатив, $c_j, j = (1, m)$ — ступені компетентності експертів відносно питання, пов'язаного з оцінкою даних

© В. В. Циганок

альтернатив.

Визначити: Усереднені значення ваг альтернатив $w_k, k = (1, n)$.

Метод визначення ваг альтернатив можна умовно розділити на наступні кроки.

1-й крок — це генерація на основі реальних матриць парних порівнянь, сформованих кожним із експертів, множини ідеально узгоджених матриць (ІУМПП). Причому ІУМПП формуються аналогічно тому, як запропоновано в комбінаторному методі парних порівнянь [2], а саме: визначаються *інформаційно-значимі* множини елементів МПП мінімальної потужності, на основі яких і формуються ІУМПП. Інформаційно-значима (інформаційно-вагома) множина елементів ІУМПП ω — це така множина мінімальної потужності, що складається з елементів матриці, яка несе інформацію про всю ІУМПП загалом. Причому, $\omega \subset \Omega$, де Ω — множина всіх елементів МПП і, як показано в [2], коли $|\Omega| = n^2$, то $|\omega| = n - 1$. Таким чином, для будь-якої ІУМПП по множині елементів ω можна відтворити множину всіх елементів Ω , визначивши значення відсутніх у ω елементів через ті, що належать цій множині.

2-й крок — кожній із ІУМПП ставиться у відповідність ваговий коефіцієнт, котрий відображує на скільки вагомим є вплив інформації, що міститься в даній ІУМПП на шукані ваги альтернатив. Кожний такий ваговий коефіцієнт враховує як ступені компетентності експертів, що брали участь у формуванні ІУМПП, так і рівень відмінності реальної МПП від ідеально узгодженої.

3-й крок — по кожній із сформованих ІУМПП, однозначно знаходяться проміжні значення ваг альтернатив (це можна зробити, наприклад, базуючись на будь-якому одному зі стовпчиків або рядків ІУМПП).

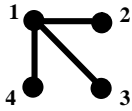
4-й крок — ці проміжні значення ваг, для кожної ІУМПП, будуть помножені на відповідні їм вагові коефіцієнти матриць.

5-й крок — для визначення усереднених значень ваг альтернатив знаходяться середні арифметичні значення отриманих добутоків.

Для більш докладного опису методу розглянемо конкретний приклад. Припустимо, маємо чотири альтернативи, котрі представлені для оцінки групі з трьох експертів. Кожний з експертів має свій рівень компетентності в питанні, що розглядається, та сформував свою *реальну* матрицю парних порівнянь розмірністю 4×4 , наприклад, використовуючи адитивні парні порівняння (при таких порівняннях експертів ставиться запитання: «На скільки одиниць одна альтернатива переважає іншу?»). У верхній частині табл. 1 представлено реальні МПП, сформовані кожним із групи експертів. Далі детально розглянемо інформацію, представлену в цій таблиці.

1-й крок. Коротко зупинимося на формуванні множини ІУМПП (більш докладно це розглянуто в [2]). У лівій колонці табл. 1 зображено вигляд графів, які використовуються для графічного представлення інформаційно-вагомих множин елементів МПП. Кожне ребро в графі поставлено у відповідність одному окремому інформаційно-вагому елементові, на базі яких формується ІУМПП. Так, наприклад, якщо в графі є ребро між вершинами 1 і 3, то до множини належить інформаційно-вагомий елемент a_{13} . Тобто існує відповідність між графом і множиною елементів МПП. У [2] показано, що зв'язність графа є необхідною і достатньою умовою інформаційної вагомості множини елементів МПП, поставлених у

відповідність цьому графові. Потужність цієї множини, а заодно, і кількість ребер у графі, рівна $(n - 1)$. Отже, якщо граф має вигляд, як зображено на рисунку в п. 1 табл. 1, то відповідна ІУМПП формується наступним чином: елементи матриці



a_{12} , a_{13} та a_{14} , яким відповідають ребра графа, беруться з відповідної реальної МПП, а решта елементів цієї матриці розраховуються, виходячи зі співвідношень, що існують між елементами ІУМПП (для адитивних порівнянь, наприклад, $a_{ij} = a_{kj} - a_{ki}$). У даному випадку: $a_{23} = a_{13} - a_{12}$; $a_{24} = a_{14} - a_{12}$; $a_{34} = a_{14} - a_{13}$. Також,

без втрати загального вигляду парних порівнянь, вважаємо, що $\forall i, j (a_{ii} = 0; a_{ij} = -a_{ji})$. Сформовані таким чином матриці зображені в рядках табл. 1, кожен з яких відповідає інформаційно-вагомій множині елементів, представлений у вигляді графа (перша колонка).

Таблиця 1

реальні матриці експертів		1-го експерта					2-го експерта					3-го експерта				
		1	2	3	4	↔	1	2	3	4	↔	1	2	3	4	↔
		0	-5	-2	-2	↔	0	-6	-2	-1	↔	0	-3	-3	0	↔
		5	0	3	4	↔	6	0	2	3	↔	3	0	2	3	↔
		2	-3	0	0	↔	2	-2	0	0	↔	3	-2	0	-1	↔
		2	-4	0	0	↔	1	-3	0	0	↔	0	-3	1	0	↔

Ідеально узгоджені матриці сформовані по реальній матриці					Ідеально узгоджені матриці сформовані по реальній матриці				
№ п/п	Вигляд графу Г	1-го експерта	2-го експерта	3-го експерта	№ п/п	Вигляд графу Г	1-го експерта	2-го експерта	3-го експерта
1		0 -5 -2 -2 5 0 3 3 2 -3 0 0 2 -3 0 0	0 -6 -2 -1 6 0 4 5 2 -4 0 1 1 -5 -1 0	0 -3 -3 0 3 0 0 3 3 0 0 3 0 -3 -3 0	9		0 -5 -2 -2 5 0 3 3 2 -3 0 0 2 -3 0 0	0 -4 -2 -1 4 0 2 3 2 -2 0 1 1 -3 -1 0	0 -5 -3 0 5 0 2 5 3 -2 0 3 0 -5 -3 0
2		0 -5 -2 -1 5 0 3 4 2 -3 0 1 1 -4 -1 0	0 -6 -2 -3 6 0 4 3 2 -4 0 -1 3 -3 1 0	0 -3 -3 0 3 0 0 3 3 0 0 3 0 -3 -3 0	10		0 -6 -2 -2 6 0 4 4 2 -4 0 0 2 -4 0 0	0 -4 -2 -1 4 0 2 3 2 -2 0 1 1 -3 -1 0	0 -3 -3 0 3 0 0 3 3 0 0 3 0 -3 -3 0
3		0 -5 -2 -2 5 0 3 3 2 -3 0 0 2 -3 0 0	0 -6 -2 -2 6 0 4 4 2 -4 0 0 2 -4 0 0	0 -3 -3 -4 3 0 0 -1 3 0 0 -1 4 1 1 0	11		0 -5 -2 -1 5 0 3 4 2 -3 0 1 1 -4 -1 0	0 -4 -2 -1 4 0 2 3 2 -2 0 1 1 -3 -1 0	0 -5 -3 -2 5 0 2 3 3 -2 0 1 2 -3 -1 0
4		0 -5 -2 -2 5 0 3 3 2 -3 0 0 2 -3 0 0	0 -6 -4 -1 6 0 2 5 4 -2 0 3 1 -5 -3 0	0 -3 -1 0 3 0 2 3 1 -2 0 1 0 -3 -1 0	12		0 -5 -2 -2 5 0 3 3 2 -3 0 0 2 -3 0 0	0 -4 -2 -2 4 0 2 2 2 -2 0 0 2 -2 0 0	0 -5 -3 -4 5 0 2 1 3 -2 0 -1 4 -1 1 0
5		0 -5 -2 -2 5 0 3 3 2 -3 0 0 2 -3 0 0	0 -6 -1 -1 6 0 5 5 1 -5 0 0 1 -5 0 0	0 -3 1 0 3 0 4 3 -1 -4 0 -1 0 -3 1 0	13		0 -6 -2 -2 6 0 4 4 2 -4 0 0 2 -4 0 0	0 -5 -2 -2 5 0 3 3 2 -3 0 0 2 -3 0 0	0 -7 -3 -4 7 0 4 3 3 -4 0 -1 4 -3 1 0
6		0 -5 -2 -1 5 0 3 4 2 -3 0 1 1 -4 -1 0	0 -6 -4 -3 6 0 2 3 4 -2 0 1 3 -3 -1 0	0 -3 -1 0 3 0 2 3 1 -2 0 1 0 -3 -1 0	14		0 -6 -3 -2 6 0 3 4 3 -3 0 1 2 -4 -1 0	0 -4 -2 -1 4 0 2 3 2 -2 0 1 1 -3 -1 0	0 -3 -1 0 3 0 2 3 1 -2 0 1 0 -3 -1 0
7		0 -5 -2 -2 5 0 3 3 2 -3 0 0 2 -3 0 0	0 -6 -4 -4 6 0 2 2 4 -2 0 0 4 -2 0 0	0 -3 -1 -2 3 0 2 1 1 -2 0 -1 2 -1 1 0	15		0 -5 -2 -2 5 0 3 3 2 -3 0 0 2 -3 0 0	0 -3 -1 -1 3 0 2 2 1 -2 0 0 1 -2 0 0	0 -1 1 0 1 0 2 1 -1 -2 0 -1 0 -1 1 0
8		0 -5 -1 -1 5 0 4 4 1 -4 0 0 1 -4 0 0	0 -6 -3 -3 6 0 3 3 3 -3 0 0 3 -3 0 0	0 -3 1 0 3 0 4 3 -1 -4 0 -1 0 -3 1 0	16		0 -6 -2 -2 6 0 4 4 2 -4 0 0 2 -4 0 0	0 -4 -1 -1 4 0 3 3 1 -3 0 0 1 -3 0 0	0 -3 1 0 3 0 4 3 -1 -4 0 -1 0 -3 1 0

Так, наприклад, у рядку 1 тіла табл. 1 представлені ІУМПП, сформовані на основі інформаційно-вагомої множини елементів, зображеної у вигляді графа, що в лівій колонці цього рядка. Перша колонка в рядку — це ІУМПП, побудована на базі елементів a_{12} , a_{13} та a_{14} реальної матриці, сформованої 1-м експертом, а решту елементів цієї матриці обчислено, як згадувалось раніше ($a_{23} = a_{13} - a_{12}$; $a_{24} = a_{14} - a_{12}$; $a_{34} = a_{14} - a_{13}$; $\forall i, j [a_{ii} = 0; a_{ij} = -a_{ji}]$). Далі в рядку зображені матриці, сформовані на базі тих самих елементів (a_{12} , a_{13} та a_{14}) реальних матриць, які надали, відповідно, 2-й і 3-й експерти.

2-й крок. Згідно з методом, кожній ІУМПП ставиться у відповідність коефіцієнт, котрий відображує ступінь відмінностей цієї ІУМПП від кожної з реальних матриць, представлених експертами, що приймають участь в експертизі. Для визначення цих вагових коефіцієнтів можна запропонувати функцію f , яка б окрім усього іншого, враховувала рівень компетентності експертів, які мають відношення до конкретної сформованої ІУМПП:

$$R_{inj} = f(c_i, c_j, \Delta_{inj}),$$

де R_{inj} — ваговий коефіцієнт (рейтинг) ІУМПП, сформованої на основі реальної матриці, заданої i -м експертом, на базі n -ї інформаційно-вагомої множини елементів, при порівнянні цієї ІУМПП з реальною матрицею, заданою j -м експертом; c_i , c_j — ступені компетентності відповідних експертів; Δ_{inj} — величина, що характеризує ступінь відмінності ІУМПП, сформованої на базі n -ї інформаційно-вагомої множини елементів і на основі реальної МПП, заданої i -м експертом, від реальної матриці, заданої j -м експертом.

Питання знаходження найбільш адекватної функції для знаходження Δ_{inj} залишимо для подальших досліджень. А поки що, оскільки коефіцієнт R_{inj} має відображувати ступінь вагомості впливу відповідної ІУМПП на усереднений результат, то величину Δ_{inj} можна запропонувати обчислювати, наприклад, для випадку адитивних парних порівнянь, як зворотну величину від суми модулів різниць між однойменними елементами відповідних матриць. Оскільки функція має бути однозначно визначеною в усіх можливих точках, то можна взяти логарифм від суми, наприклад:

$$\Delta_{inj} = 1 / \ln(\sum_{k,l} |a_{kl}^i - a_{kl}^j| + 1).$$

Згідно зі здоровим глуздом, рейтинг ІУМПП має зростати зі зменшенням відмінностей цієї матриці від реальних матриць, заданих експертами. Значимість відмінностей має бути прямо пропорційною компетентності експерта, що задав відповідну матрицю.

Виходячи з цього, функцію обчислення коефіцієнта R_{inj} природно вибрати мультиплікативного типу, яка забезпечує зростання рейтингу при зменшенні суми модулів різниць між однойменними елементами матриць або/та при збільшенні ступенів компетентності відповідних задіяних експертів:

$$R_{inj} = c_i c_j \Delta_{inj} = c_i c_j / \ln\left(\sum_{k,l} |a_{kl}^{in} - a_{kl}^j| + 1\right).$$

Повертаючись до прикладу, який відображено в табл. 1, ваговий коефіцієнт (рейтинг) для зображеної, наприклад, другою зліва у 3-му рядку ІУМПП обчислюється наступним чином. Нехай, у цьому прикладі ступені компетентності експертів у питанні, що стосується оцінювання даних альтернатив, будуть задані нормованими величинами: $c_1 = 0,2$; $c_2 = 0,5$; $c_3 = 0,3$. Тоді $R_{132} = c_1 c_2 \Delta_{132} = 0,2 \times 0,5 / \ln\left(\sum_{k,l} |a_{kl}^{13} - a_{kl}^2| + 1\right) = 0,2 \times 0,5 / \ln(4) = 0,138629$. Аналогічним чином ви-

значаються і решта рейтингів для ІУМПП.

3-й крок. Відповідно до запропонованого методу, на наступному етапі, по кожній з ІУМПП визначаються ваги альтернатив. Це можна зробити однозначно, взявши, наприклад, елементи будь-якого з рядків ІУМПП, або будь-якого зі стовпчиків. Наприклад, будемо брати перший рядок ІУМПП, сформованої на основі реальної матриці, заданої i -м експертом, на базі n -ї інформаційно-вагомої множини елементів, при порівнянні її з реальною матрицею, заданою j -м експертом. Тоді ваги альтернатив w_m^{inj} по цій матриці будуть визначені як різниця між максимальним значенням у рядку — $a_{1\max}^{inj}$ і кожним елементом даного рядка — a_{1m}^{inj} відносно безпосередньо оціненого значення ваги альтернативи, що відповідає максимальному елементу рядка — w_{\max}^{inj} :

$$w_m^{inj} = w_{\max}^{inj} + a_{1\max}^{inj} - a_{1m}^{inj}.$$

4-й і останній крок. Усереднені значення ваг альтернатив знаходяться як сума добутків ваг альтернатив, визначених по ІУМПП і нормованих значень рейтингів цих матриць:

$$w_m = \sum_{i,j,n} (w_m^{inj} \cdot R_{inj} / \sum_{k,l,s} R_{ksl}) = \sum_{i,j,n} ((w_{\max}^{inj} + a_{1\max}^{inj} - a_{1m}^{inj}) \cdot R_{inj} / \sum_{k,l,s} R_{ksl}).$$

Для прикладу із табл. 1 при проведенні безпосереднього оцінювання однієї з альтернатив (таке оцінювання необхідне тільки при адитивних парних порівняннях), наприклад, $w_1 = 1,0$, — обчислені ненормовані ваги будуть такими: $w_2 = 5,652012$; $w_3 = 2,979152$; $w_4 = 2,550111$.

Експериментальне дослідження параметрів методу

Для застосування викладеного вище методу в конкретних ситуаціях потрібно оцінити його параметри, які б характеризували цей метод у порівнянні з великою кількістю методів обробки експертної інформації. Параметрами є оцінки методу за різними критеріями, такими як похибка оцінювання, узгодженість результатів, час одержання оцінок тощо. Оцінки методів за названими критеріями можуть бути визначені тільки шляхом експерименту, який забезпечує статистичну спромо-

жність оцінок. Методика експерименту для оцінки параметрів методів описана в [3], тому можемо скористатися нею для проведення дослідження і визначення: 1) коефіцієнта узгодженості множини експертних оцінок відносних ваг альтернатив; 2) математичного очікування відносної похибки визначення відносної ваги альтернативи; 3) математичного очікування тривалості процесу одержання експертних оцінок відносних ваг альтернатив. Результати експериментального дослідження зведені в табл. 2.

Таблиця 2

Тип парних порівнянь, що застосовувались	Аддитивні	Мультиплікативні
Коефіцієнт узгодженості	0,87113	0,84530
МО відносної похибки	0,073928	0,125754
МО тривалості визначення відносних ваг	20,09	21,56
Кількість проведених розрахунків	816	816

Особливості реалізації методу

Як можна побачити з опису представленого в статті методу, однією з основних його особливостей є генерація досить великої кількості (в [2] показано, що їхня кількість $C_{n(n-1)/2}^{(n-1)}$, де n — кількість альтернатив) наборів, серед яких відбираються інформаційно-значимі для побудови ІУМПП, щоб у подальшому проводити розрахунки на основі цих матриць. Тому, при обчисленні ваг альтернатив запропоновано застосувати ітераційний процес для виключення накопичення в пам'яті комп'ютера значної кількості такого виду інформації. Отже, в процесі генерації ІУМПП, після виконання кожної такої дії (на k -му кроці алгоритму), вага j -ї альтернативи буде розраховуватися, базуючись на даних, отриманих на попередньому кроці алгоритму:

$$w_j^{(k)} = \frac{S_{wj}^{(k)}}{S_R^{(k)}},$$

де чисельник $S_{wj}^{(k)}$ — накопичена сума ваг j -ї альтернативи на k -му кроці алгоритму й обчислюється через аналогічну величину, визначену на $(k-1)$ -му кроці: $S_{wj}^{(k)} = S_{wj}^{(k-1)} + v_j^{(k)} \cdot R^{(k)}$, де $v_j^{(k)}$ — вага j -ї альтернативи, обчислена по k -й ІУМПП, $R^{(k)}$ — рейтинг k -ї ІУМПП, причому початкове значення рівне: $\forall j \in \overline{1, n}, S_{wj}^{(0)} = 0$; знаменник $S_R^{(k)}$ — накопичена сума рейтингів ІУМПП на k -му кроці й обчислюється через таку ж саму величину, визначену на попередньому кроці: $S_R^{(k)} = S_R^{(k-1)} + R^{(k)}$, де $S_R^{(0)} = 0$.

Отже, використання цих рекурентних виразів дозволяє обчислювати ваги альтернатив у процесі генерації та перебору ІУМПП, і дає можливість не накопичувати дані в пам'яті ПК.

Висновки

Таким чином, запропонований у даній статті метод має наступні позитивні якості:

— найбільш повно використовує інформацію по кожному порівнянню із МПП, наданих експертами;

— дозволяє визначити всереднені експертні оцінки альтернатив при неможливості організувати зворотній зв'язок з експертами при груповому оцінюванні;

До недоліків слід віднести:

— можливість виникнення порушень ранжирування ваг уже розрахованих альтернатив у разі додавання елемента до множини альтернатив або віднімання від неї (феномен реверсу рангів), які притаманні переважній більшості методів експертного оцінювання;

— трудомісткість алгоритму.

Перспективи для вдосконалення методу. Виходячи із указаних недоліків, подальші дослідження плануються зосередити на доробці методу для обчислення ваг альтернатив із виключенням реверсу рангів, можливо при частковій втраті рівня деяких показників, таких як точність методу. В перспективі, для зменшення трудомісткості алгоритму автор планує спробувати замінити перебірні методи, що застосовуються нині, на цілеспрямований перебір, наприклад, генетичний алгоритм. Хоча в області застосування — СППР, де розмірність МПП не перевищує 7 ± 2 і при складі групи експертів до 5–7 осіб, представлений метод має прийнятні показники тривалості розрахунків на сучасних ПК.

1. Zgurovsky M.Z., Totsenko V.G., Tsyganok V.V. Group Incomplete Paired Comparisons with Account of Expert Competence // *Mathematical and Computer Modelling*. — 2004, Febr. — Vol. 39, N 4–5. — P. 349–361.

2. Циганок В.В. Комбінаторний алгоритм парних порівнянь зі зворотним зв'язком з експертом // *Реєстрація, зберігання і оброб. даних*. — 2000. — Т. 2, № 2. — С. 92–102.

3. Тоценко В.Г., Циганок В.В., Качанов П.Т., Деев А.А., Качанова Е.В., Торба Л.Т. Экспериментальное исследование методов получения кардинальных экспертных оценок альтернатив. Ч. I. Методы без обратной связи с экспертом // *Проблемы управления и информатики*. — 2003. — № 1. — С. 34–48.

Надійшла до редакції 03.03.2008