

УДК 519.816

**С. В. Каденко**

Інститут проблем реєстрації інформації НАН України  
вул. М. Шпака, 2, 03113 Київ, Україна

## **Удосконалення методу визначення коефіцієнтів відносної вагомості критеріїв на основі ординальних оцінок**

*Описано розширення методу визначення коефіцієнтів відносної вагомості критеріїв на основі ординальних оцінок альтернатив на випадок кількох прецедентів. Наведено дослідження збіжності та точності роботи запропонованого методу. Представлено постановку задачі, опис покрокової роботи алгоритму та результатів його тестування, а також ілюстративні приклади та таблиці, що пояснюють роботу описаного алгоритму.*

**Ключові слова:** прийняття рішень, ординальні оцінки, ранжирування, коефіцієнт відносної вагомості, алгоритми навчання, відстань Кемені.

### **Вступ**

У роботі [1] був описаний підхід до обчислення коефіцієнтів відносної важливості критеріїв на основі ординальних оцінок. Викладений алгоритм завжди давав однаковий результат при однакових вхідних даних і працював за схемою, що аналогічна до схеми настроювання нейронних мереж [2].

Зазначимо, що раніше дана задача розв'язувалася для випадку кардинальних оцінок. Для настроювання ваг на основі кардинальних оцінок можна використовувати такі загальновідомі методи як метод найменших квадратів, метод групового урахування аргументів, метод мінімізації нев'язок, метод багатовимірної лінійної екстраполяції [4], або персептронний алгоритм Розенблата [2]. Методи настроювання вагових коефіцієнтів на основі ординальних оцінок не розроблялися.

До того ж, залишилося відкритим питання: чи взагалі можливо, використовуючи алгоритм настроювання коефіцієнтів вагомості, знайти множину ваг критеріїв ( $w_1, w_2, \dots, w_n$ ), які дозволяють зберегти ранжирування альтернатив за глобальним критерієм, хоча б у тому випадку, коли апріорно відомо, що такий набір ваг існує?

Також необхідно дослідити можливість послідовного настроювання вагових коефіцієнтів на кількох сумісних прецедентах, що подаються поспіль, і перевірити на тестових даних, чи наближається результат настроювання до заданого вектора відносних ваг критеріїв.

© С. В. Каденко

Нижче наводяться пропозиції щодо удосконалення алгоритму, описаного в [1], і розширення його можливостей, а також аналіз доцільності та витлумачення результатів його роботи.

### Постановка задачі

*Дано:*

Множина з  $h$  прецедентів.

Під прецедентом будемо розуміти набір даних, до якого входять:

1) множина альтернатив  $\{A_i\}$ ,  $i = 1, \dots, m$  (для спрощення вважатимемо, що множина альтернатив у всіх прикладах однакова, але в загальному випадку ця вимога не є обов'язковою);

2) множина критеріїв оцінки альтернатив  $\{K_j\}$ ,  $j = 1, \dots, n$  (критерії оцінки альтернатив залишаються однаковими в усіх прикладах — це принципова умова);

3) ранжирування альтернатив за кожним із критеріїв  $\{r_{ij}\}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ ;  $r_{ij}$  — оцінка (ранг)  $i$ -ї альтернативи за  $j$ -м критерієм;

4) підсумкове ранжирування (ранжирування альтернатив за глобальним критерієм)  $\{g_i\}$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

*Треба знайти* нормовані коефіцієнти відносної вагомості критеріїв оцінки альтернатив  $\{w_j\}$ :  $[w_1 + \dots + w_n = 1, w_j > 0, j = 1, \dots, n]$ , такі, що дозволяють зберегти підсумкові ранжирування в усіх прецедентах.

Підсумкове ранжирування в прецеденті з номером  $k$   $\{g_k\}$  ( $k = 1, \dots, h$ ) несе інформацію не про реальні значення зважених сум, а лише про їхнє співвідношення, тобто, про порядок ранжирування альтернатив за глобальним критерієм. У випадку кардинальних оцінок у ході настроювання ваг можна було максимально близько підійти до точного розв'язку задачі. Але при переході від кардинальних до ординальних оцінок втрачаються відомості про абсолютне значення різниці між ступенем виразності певного критерію в різних альтернатив. Тому неможливо прямо узагальнити поняття помилки або нев'язки на випадок ординальних оцінок.

Отже, як бачимо, під час переходу до підсумкового ранжирування відбувається втрата інформації. Тому розв'язання задачі ґрунтуватиметься на наступних принципах:

1) інформацію слід видобувати не з абсолютних значень глобальних рангів, а із співвідношення між ними;

2) знаходження коефіцієнтів вагомості критеріїв здійснюється з урахуванням структури елемента ієрархії критеріїв (рис. 1);

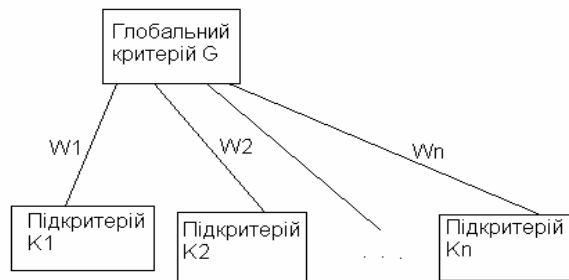


Рис. 1

3) розв'язку задачі відповідає область простору розмірності  $n$ , (кількість критеріїв), і кожне значення з цієї області можна вважати розв'язком. Якщо область порожня, то точних розв'язків не існує.

Відсутності розв'язків можна зіставити реальну ситуацію, коли оцінки за критерієм, що обраний в якості глобального, не залежать від оцінок за підкритеріями.

До того ж, якщо кількість альтернатив (які фігурують в одному або декількох прецедентах) більша за кількість критеріїв їхньої оцінки, то вихідна система обмежень на ваги критеріїв є надлишковою. Отже, в загальному випадку задача може не мати точного розв'язку (область допустимих значень ваг у цьому випадку виявиться порожньою).

### Ідея алгоритму розв'язання для кількох прецедентів

Пошук набору ваг критеріїв, що зберігають підсумкові ранжирування у кількох прецедентах, зводиться до поступового звуження області допустимих значень ваг. Один прецедент задає певну систему лінійних обмежень, які визначають область простору розмірності  $n$ , де лежать значення ваг, що зберігають підсумкове ранжирування альтернатив у цьому прецеденті. Другий прецедент може накласти нові обмеження на допустимі значення коефіцієнтів вагомості критеріїв. Це означає, що виконується наступне.

**Твердження 1.** *При подачі на вхід алгоритму нових прецедентів область допустимих значень ваг або залишатиметься незмінною, або звужуватиметься.*

**Доведення.** Припустимо, після подання на вхід алгоритму прецеденту з номером  $k$ , ми отримали область, яка являє собою частину симплексу, обмежену кількома гіперплощинами (див. рис. 2 а,б, рис. 3, постановку задачі та докладний опис алгоритму, що наведений нижче), а, точніше, лініями перетину симплексу з цими гіперплощинами. Припустимо, що в системі нерівностей, яка задається прецедентом із номером  $(k + 1)$ , присутня нерівність (обмеження), яке не входило до систем, заданих попередніми  $k$  прецедентами. Цій, «новій» нерівності відповідає гіперплощина, яка або розташована по один бік від області, отриманої на основі попередніх прецедентів (рис. 2,а), або ділить її на дві частини (рис. 2,б). Тоді, якщо область, що задається обмеженнями із попередніх  $k$  прецедентів, лежить по один бік від нової гіперплощини (тобто гіперплощини, рівняння якої задає «нова» нерівність, отримана на основі  $(k + 1)$  прецеденту), то вся область задовольняє цьому, «новому» обмеженню, а, відтак, вона залишиться незмінною. Якщо ж нова гіперплощина ділить область, отриману на основі попередніх  $k$  прецедентів, на дві частини, то від області «залишиться» тільки частина, яка задовольняє «новій» нерівності, тобто область зменшиться.

Отже, якщо відомо, що існує набір ваг, на основі якого формувалися прецеденти, то чим більше прецедентів ми подамо на вхід алгоритму, тим в нас більше шансів наблизитися до цього набору, потрапивши в менший його окіл (див. Твердження 2).

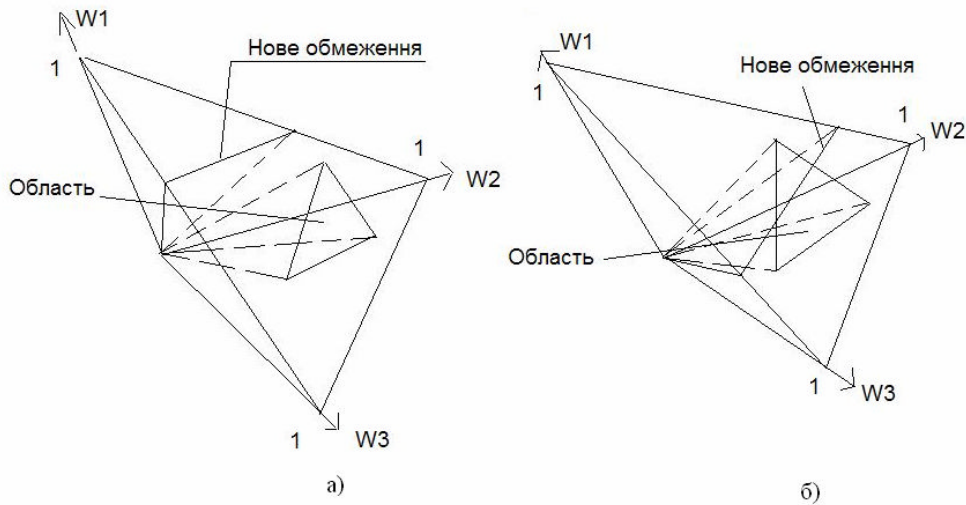


Рис. 2

### Алгоритм розв'язання

Щоб переконатися, що алгоритм ітераційного настроювання ваг збігається на множині прецедентів [1], доведемо наступне твердження.

#### Твердження 2.

**Якщо** задана система (матриця) з  $m$  лінійних обмежень  $A$ , які накладаються на змінні  $w_1, w_2, \dots, w_n$ :

$$\begin{aligned} a_{11} \times w_1 + \dots + a_{1n} \times w_n &> 0, \\ &\dots \\ a_{m1} \times w_1 + \dots + a_{mn} \times w_n &> 0, \end{aligned}$$

тобто  $A \times w > NULL$  (векторний вигляд виразу, де  $A$  — матриця розмірністю  $m \times n$ ,  $w$  — вектор розмірності  $n$ , а  $NULL$  — нульовий вектор, розмірність якого також дорівнює  $m$ ), і при цьому відомо, що існує набір  $w^* = (w_1^*, \dots, w_n^*)$ , для якого  $A \times w^* > NULL$ , **то** існує також окіл точки  $w^*$  в  $n$ -мірному просторі  $V_{w^*}$ , такий, що

$$\forall w \in V_{w^*} [A \times w > NULL].$$

#### Доведення.

Розглянемо першу нерівність (обмеження). За умовою твердження, вона виконується для набору  $w^*$ :

$$a_{11} \times w_1^* + \dots + a_{1n} \times w_n^* > 0, \tag{1}$$

тобто

$$\exists \varepsilon > 0: [a_{11} \times w_1^* + \dots + a_{1n} \times w_n^* - \varepsilon = 0]. \tag{2}$$

Представимо  $\varepsilon$  у вигляді  $\varepsilon = \varepsilon_{11} \times a_{11} + \dots + \varepsilon_{1n} \times a_{1n}$ .  
Тоді рівність (2) можна буде записати:

$$a_{11} \times (w_1^* - \varepsilon_{11}) + \dots + a_{1n} \times (w_n^* - \varepsilon_{1n}) = 0.$$

Нехай

$$\varepsilon_{1\min} = \min_{0 \leq j \leq n} |\varepsilon_{1j}|.$$

Тоді перша нерівність заданої системи виконується всередині околу точки  $w^*$  радіусом  $\varepsilon_{1\min}$ , тобто

$$\exists \text{ окіл } V_{1w^*}: \forall w \in V_{1w^*} [a_{11} \times w_1^* + \dots + a_{1n} \times w_n^* > 0]$$

(ми не беремо точки, що лежать на межі околу, щоб нерівність виконувалася строго).

Аналогічним чином можна знайти радіуси околів, де виконуються всі інші нерівності:

$$\forall i \in [1, \dots, m] \exists \text{ окіл } V_{iw^*}: \forall w \in V_{iw^*} [a_{i1} \times w_1^* + \dots + a_{in} \times w_n^* > 0];$$

радіус цього околу дорівнює:

$$\varepsilon_{i\min} = \min_{0 \leq j \leq n} |\varepsilon_{ij}|.$$

(Усі  $\varepsilon_{ij}$  можна отримати вищевказаним способом).

З наведених міркувань витікає, що всередині околу радіуса

$$\varepsilon_{\min} = \min_{0 \leq i \leq m} |\varepsilon_{i\min}|$$

виконуватимуться всі нерівності системи.

Отже  $\exists$  окіл  $V_{w^*}$  такий, що  $\forall w \in V_{w^*} [A \times w > NULL]$ , що й треба було довести.

Нагадаємо, що кожна нерівність (обмеження) задає гіперплощину в  $n$ -мірному просторі, а системі обмежень відповідає область цього простору. В нашому випадку ця область не порожня, адже тестові приклади генеруються на основі реальних значень ваг.

Розглянемо міркування, які покладено в основу роботи алгоритму та переконаймося, що алгоритм збігається до значень ваг, які зберігають задане ранжування альтернатив за глобальним критерієм.

Процес корекції ваг зводиться до зсуву точки (набору ваг) вздовж нормалей до гіперплощин, заданих лівими частинами нерівностей системи. Швидкість цьо-

го руху визначається «темпом навчання»,  $\eta$  [1].

Вибір темпу навчання завжди становив проблему. Розробка універсальних методів вибору темпу навчання не є предметом нашого дослідження, втім, нижче наведено нестрогі міркування, якими можна керуватися під час вибору  $\eta$ .

На кожній ітерації настроювання визначається, чи дозволяють отримані значення ваг зберегти задане глобальне ранжирування, тобто чи вони лежать в області припустимих значень ваг. У якості величини помилки між отриманим в ході навчання та заданим глобальними ранжируваннями обирається відстань Кемені (див. Додаток).

Припустимо, настроювання ваг починається з точки  $w^0 = (w_{01}, w_{02}, \dots, w_{0n})$ .

Якщо ця точка не задовольняє першій нерівності системи, тобто  $a_{11} \times w_{01} + \dots + a_{1n} \times w_{0n} > 0$  — не виконується, то слід починати процес настроювання ваг. На кожному кроці значення коефіцієнта вагомості кожного  $j$ -го критерію ( $j = 1, \dots, n$ ),  $w_{0j}$  пересувається вздовж нормалі до гіперплощини, що задається обмеженням (нерівністю):

$$w_j(t + 1) = w_j(t) + \eta \times a_{1j}.$$

При такій схемі настроювання ваг, якщо відомо, що «еталонний» набір ваг реально існує, а  $\eta$  — достатньо мале, то можна потрапити до заданої області (околу точки  $w^*$ ), де виконуються всі нерівності системи (пояснення — див. нижче).

Оскільки нерівності задають лінійні обмеження, в нашому конкретному випадку окіл не буде являти собою кулю в  $n$ -мірному просторі. У дійсності йдеться про область симплексу, яку обмежують гіперплощини, що відповідають нерівностям: у загальному випадку ця область являє собою багатокутник (багатогранник) (рис. 3).

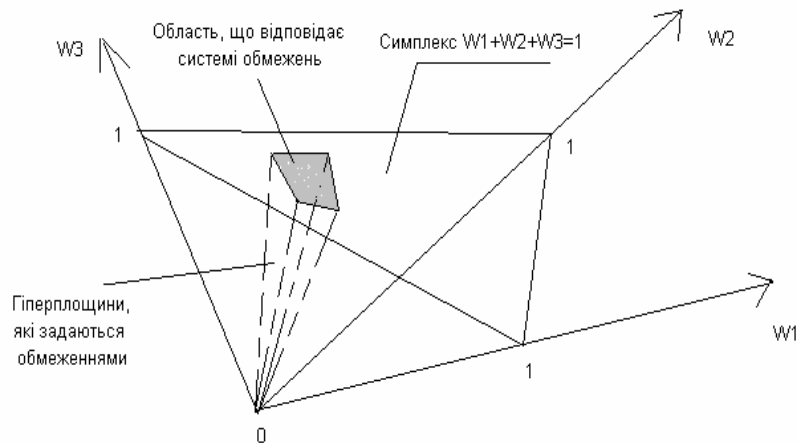


Рис. 3

**Твердження 3.** Якщо розв’язок задачі існує, то алгоритм дозволить знайти його, або принаймні, набір ваг, який зберігає вихідне ранжирування за глобальним критерієм.

**Доведення.**

Припустимо, у ході настроювання ваг на  $h$  прецедентах, алгоритм «привів» нас до точки  $w^h = \{w_j^h\}$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Ця точка може або задовольняти всім системам нерівностей, що побудовані на основі прецедентів, або не задовольняти певній кількості нерівностей. Якщо всі нерівності виконуються в точці  $w^h$ , то подальше настроювання ваг не потрібне. Якщо якась із нерівностей не виконується, то слід продовжувати процедуру настроювання: «рухатися» вздовж нормалі до гіперплощини, яку задає ліва частина цієї нерівності за схемою:  $w_j(t+1) = w_j(t) + \eta \times a_{i^*j}$ , де  $j = 1, \dots, n$ , а  $i^*$  — номер нерівності, що не виконується. Настроювання слід продовжувати, поки дана нерівність не виконається. Після цього слід перевірити, чи задовольняє отримана точка всім нерівностям, що задаються  $h$  прецедентами і, якщо це не так, настроювати ваги далі.

За умовою твердження 3 розв’язок існує, а із твердження 2 випливає, що нерівності виконуються не тільки в точці розв’язку, а також і в околі цієї точки (точки реальних ваг, на основі яких побудовані прецеденти).

Процедура (цикл) настроювання може бути нескінченною лише у випадку, якщо в системі нерівностей будуть присутні прямо протилежні нерівності, які не можуть виконуватися одночасно. А цьому випадку відповідає порожня (вироджена) область. Ми прийшли до протиріччя умові тверджень 2 та 3.

Отже, за скінчену кількість ітерацій алгоритм зійдеться до області рішень.

*Примітка:* Можуть мати місце виключення суто математичного, а не принципового характеру (див. нижче), але їх можна уникнути, наклавши відповідні обмеження на значення ваг і темпу навчання. Дана проблема може стати одним із напрямків подальших досліджень.

Покроковий алгоритм, що наводиться нижче, враховує викладені міркування.

Роботу алгоритму пояснено на спеціально змодельованому прецеденті.

Нехай задані наступні ранжирування 5-ти альтернатив ( $m = 5$ ) за 3-ма критеріями ( $n = 3$ ),  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  і за глобальним критерієм  $G$  (табл. 1). (Глобальне ранжирування відповідає порядку розташування зважених сум рангів альтернатив за локальними критеріями  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$ , тобто отримане за допомогою модифікованого методу Борда [3], також відомого як «метод зважених сум». У нашому прецеденті реальні ваги, на основі яких побудований прецедент, дорівнюють:  $w_1 = 0,14$ ;  $w_2 = 0,28$ ;  $w_3 = 0,58$ ).

Таблиця 1

Вагомість	$W_1 = 0,14$	$W_2 = 0,28$	$W_3 = 0,58$	Підсумкове ранжирування $\{g\}$
Критерії	$K_1$	$K_2$	$K_3$	
$A_1$	4	5	2	$2 (4 \times 0,14 + 5 \times 0,28 + 2 \times 0,58 = 3,12)$
$A_2$	2	1	1	$1 (2 \times 0,14 + 1 \times 0,28 + 1 \times 0,58 = 1,14)$
$A_3$	3	3	4	$4 (3 \times 0,14 + 3 \times 0,28 + 4 \times 0,58 = 3,58)$
$A_4$	5	4	3	$3 (5 \times 0,14 + 4 \times 0,28 + 3 \times 0,58 = 3,56)$
$A_5$	1	2	5	$5 (1 \times 0,14 + 2 \times 0,28 + 5 \times 0,58 = 3,6)$

**Крок 1.** Будуємо матрицю обмежень  $\{a_{ij}\}$ :  $i = 1, \dots, m (m - 1)/2$ ;  $j = 1, \dots, n$ :

$$a_{ij} = (r_{i1j} - r_{i2j}) \text{ або } a_{ij} = -(r_{i1j} - r_{i2j}).$$

Кожний рядок цієї матриці задаватиме нерівність типу

$$a_{i1} \times w_1 + \dots + a_{in} \times w_n > 0.$$

Кожне таке обмеження відповідає парі альтернатив  $A_{i1}$  та  $A_{i2}$  (де  $i_1 = 1, \dots, m$ ;  $i_2 = 1, \dots, m$ ;  $i_1 \neq i_2$ ).

У нашому випадку система обмежень відповідає співвідношенням домінування альтернатив [4] (табл. 2). Наприклад, перша альтернатива поступається другій  $A_1 \prec A_2$ , бо глобальний ранг першої альтернативи дорівнює 2, а другої — 1. Відповідне обмеження будується наступним чином:  $(4 - 2) \times w_1 + (5 - 1) \times w_2 + (2 - 1) \times w_3 > 0$

Аналогічно отримуємо всю систему нерівностей, показану в табл. 2.

Таблиця 2

Номер обмеження	Пара альтернатив	Нерівність
1	$A_1 \prec A_2$	$(4 - 2) \times w_1 + (5 - 1) \times w_2 + (2 - 1) \times w_3 > 0$
2	$A_1 \prec A_3$	$-1 \times w_1 + (-2) \times w_2 + 2 \times w_3 > 0$
3	$A_1 \prec A_4$	$1 \times w_1 + (-1) \times w_2 + 1 \times w_3 > 0$
4	$A_1 \prec A_5$	$-3 \times w_1 + (-3) \times w_2 + 3 \times w_3 > 0$
5	$A_2 \prec A_3$	$1 \times w_1 + 2 \times w_2 + 3 \times w_3 > 0$
6	$A_2 \prec A_4$	$3 \times w_1 + 3 \times w_2 + 2 \times w_3 > 0$
7	$A_2 \prec A_5$	$-1 \times w_1 + 1 \times w_2 + 4 \times w_3 > 0$
8	$A_3 \prec A_4$	$-2 \times w_1 + (-1) \times w_2 + 1 \times w_3 > 0$
9	$A_3 \prec A_5$	$-2 \times w_1 + (-1) \times w_2 + 1 \times w_3 > 0$
10	$A_4 \prec A_5$	$-4 \times w_1 + (-2) \times w_2 + 2 \times w_3 > 0$

**Крок 2.** Обираємо початкові значення ваг  $w_j(t = 0)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , та *темпи навчання*  $\eta$ . (Як уже говорилося, строгої процедури вибору темпу навчання не розроблено, і вона не є предметом даного дослідження). Якщо про співвідношення ваг немає ніякої додаткової інформації, пропонується задавати всі ваги рівними:  $w_j = 1/n$  (або  $w_j = 1/n \pm \eta$  чи  $w_j = 1/n \pm j \times \eta$ , щоб уникнути появи рівних зважених сум, і, відповідно, рівних глобальних рангів при сумуванні локальних рангів альтернатив). Доцільно задати мінімальне можливе значення вагомості окремого критерію. Ієрархії критеріїв, з якими доводиться мати справу експертам, повинні відповідати психофізичним обмеженням людини: не слід будувати структури, де число підкритеріїв одного глобального критерію перевищує  $7 \pm 2$ .

Під час вибору мінімального значення коефіцієнта вагомості слід пам'ятати про те, що помилка його визначення мусить бути на порядок меншою за його значення. Цей факт також слід враховувати під час вибору темпу навчання: завелике значення  $\eta$  може призвести до появи завеликої помилки, порядок якої співпадатиме з порядком самих ваг, а це неприпустимо.

У прецеденті, що розглядається, початкові ваги дорівнюють:  $w_1 = 0,32$ ;  $w_2 = 0,33$ ;  $w_3 = 0,34$ .



**Крок 3.** Перевіряємо, чи виконується перша нерівність системи  $a_{11} \times w_1 + \dots + a_{1n} \times w_n > 0$  для початкових значень ваг. Якщо виконується, переходимо до наступної нерівності. Якщо не виконується, змінюємо ваги наступним чином:  $w_j(t+1) = w_j(t) + \eta \times a_{ij}$ ,  $j = 1, \dots, n$  (для нерівності з номером  $i$ ), поки нерівність не виконується.

Геометрично даній процедурі відповідає зсув точки початку навчання вздовж нормалі до гіперплощини, що задана лівою частиною нерівності. Відповідно, кожна  $j$ -а складова швидкості цього зсуву дорівнює  $\eta \times a_{ij}$ ,  $j = 1, \dots, n$  ( $j$  — номер координати,  $i$  — номер нерівності, тобто, гіперплощини).

У прецеденті, що розглядається, перша нерівність системи виконується при всіх додатних вагах критеріїв. Друга нерівність — не виконується. Починаємо настроювати ваги за вказаною схемою.

**Крок 4.** Нормуємо ваги за сумою модулів:

$$w_{j \text{ норм.}} = w_j / (|w_1| + \dots + |w_n|), \quad j = 1, \dots, n.$$

Якщо на етапі постановки задачі сформульовано вимогу невід'ємності ваг, то

$$w_{j \text{ норм.}} = w_j / (w_1 + \dots + w_n), \quad j = 1, \dots, n.$$

Геометрично процедурі нормування відповідає проекція знайденої точки  $W(w_1, \dots, w_n)$  на симплекс (фігуру, яка задається умовою  $w_1 + \dots + w_n = 1$ ) вздовж променя  $OW$ .

**Крок 5.** Обчислюємо відстань Кемені між реальним підсумковими ранжируванням і ранжируванням, яке отримане після настроювання ваг.

Звичайно ж, якщо з самого початку всі нерівності системи виконуються (тобто початкові значення ваг дозволяють зберегти глобальне ранжирування, і, відповідно, відстань Кемені між реальним й отриманим підсумковими ранжируваннями дорівнює 0), то корегувати ваги немає потреби.

Кількість нерівностей, що не виконуються, дорівнює одній четвертій відстані Кемені між отриманим і реальним глобальними ранжируваннями (доведення див. у Додатку). Таким чином, ми можемо врахувати помилку (різницю між дійсним і заданим виходами) у процесі настроювання ваг. Як бачимо, відстань Кемені доцільно обрати в якості помилки. Інші показники, такі як коефіцієнт конкордації або рангової кореляції [2], не пов'язані напряму з кількістю нерівностей, що не виконуються.

**Крок 6.** Переходимо до наступної нерівності й повертаємося на крок 3.

**Крок 7.** Коли знайдено значення ваг, що дозволяють зберегти підсумкове ранжирування в заданому прецеденті, переходимо до наступного прецеденту, і при настроюванні ваг враховуємо нерівності, що відповідають двом (трьом, і так далі до  $h$ ) прецедентам. Міру помилки (нев'язки) при настроюванні ваг на декількох прецедентах пропонується обчислювати за загальною формулою відстані Кемені:

$$\delta = 2 \times s / (h \times m \times (m - 1)),$$

де  $m$  — кількість альтернатив у кожному прецеденті;  $h$  — кількість прецедентів, на основі яких настроюються ваги;  $\delta$  — міра помилки (узагальнена відстань Кемени між векторами, що складаються відповідно з усіх заданих й усіх реальних підсумкових ранжирувань (див. Додаток));  $s$  — загальна кількість нерівностей, що не виконуються, в системі, яка побудована на основі всіх прецедентів, для даного набору ваг.

Алгоритм закінчує роботу, коли виконуються всі нерівності системи, що задається всіма прецедентами.

Оскільки ітераційне настроювання ваг призводить до появи величезної кількості проміжних значень, ми не будемо наводити покрокові результати роботи алгоритму на прецедентах, на яких він досліджувався (див. далі).

### Особливості алгоритму та проблеми, пов'язані з його застосуванням

У викладеному вигляді алгоритм характеризується певною неоднозначністю.

Знайдені значення ваг залежать від темпу навчання (несуттєво), від послідовності подачі нерівностей на вхід алгоритму, а також від реальних і початкових значень ваг.

У нашому випадку йдеться про корекцію ваг критеріїв на основі нерівностей, заданих усіма прецедентами, що подаються на вхід. Навіть інтуїтивно зрозуміло, що чим більше нерівностей ми маємо у своєму розпорядженні, тим точніше алгоритм обрахує шукані значення ваг, адже кожна нова нерівність несе нову інформацію (див. Твердження 1). Втім, судити про конкретний характер залежності точності обрахунку ваг від числа нерівностей у системі, на основі якої вони обчислюються, важко.

Суттєвий момент — велика кількість нерівностей, яку доведеться аналізувати при «навчанні» на кількох прецедентах. Як показано вище, якщо число альтернатив дорівнює  $m$ , то кількість нерівностей складатиме  $m(m - 1)/2$ . Цю величину слід ще помножити на кількість прецедентів  $h$ . Наприклад, якщо протягом 10 років визначаються ранжирування та рейтинги 20 університетів за кількома показниками та за певним глобальним критерієм (у світі вже досить давно проводиться визначення загальних рейтингів ВНЗ [5–7]), то для обчислення вагових коефіцієнтів (як правило, їх налічується близько 6 — за числом критеріїв) доведеться проаналізувати й обробити 1900 нерівностей ( $1900 = (20 \times 19 \times 10)/2$ ). При цьому бажано було б перевірити різні послідовності настроювання ваг (тобто подачі нерівностей на вхід алгоритму), але при такій великій кількості обмежень, цей процес буде аж занадто трудомістким.

У рідкісних випадках можуть виникати певні парадокси суто математичного характеру. Наприклад, якщо два кроки настроювання ваг поспіль «взаємознищуються», і при нормуванні значення ваг не змінюються, то процес настроювання не зрушить з місця, приміром  $\eta = 0,01$ :

$w(t = 0) = (0,32; 0,33; 0,34)$ ;  $a_i = (3; -1; -2)$  — черговий рядок матриці обмежень;

$w(t = 1) = (0,35; 0,32; 0,32)$  (значення нормуються за сумою й округлюються з точністю до 0,01);  $a_{i+1} = (-3; 1; 2)$ ;

$$w(t = 2) = (0,32; 0,33; 0,34).$$

Ще одна особливість полягає в тому, що значення ваг можуть наближатися до 0 та потрапляти в область від'ємних значень. Цього можна уникнути, якщо задатися мінімально допустимим значенням, яке може приймати вага критерію (див. вище). (Мова може йти про мінімальне значення за модулем, якщо не задано умови невід'ємності ваг; ми ж поки що обмежуємося обчисленням ваг критеріїв, які є сумісними, і тому накладаємо на значення ваг умову невід'ємності).

### Приклади роботи алгоритму та поведінка середньої помилки визначення ваг

Для тестування алгоритму на його вхід подавалися поспіль по сім прецедентів ( $h = 7$ ), що згенеровані на основі еталонного набору ваг: кількість альтернатив у кожному прецеденті дорівнювала 5 ( $m = 5$ ), а число критеріїв — 3 ( $n = 3$ ). У табл. 3 наводиться опис поведінки модуля середньої відносної помилки настроювання ваг трьох критеріїв:

Таблиця 3

Реальні ваги	Номер прецеденту	Величина модуля відносної помилки визначення ваг (%)
$W_1 = 0,14$ $W_2 = 0,28$ $W_3 = 0,58$	1–4 (перша сімка прецедентів)	31,45
	5	8,38
	6, 7	3,48
	1–4 (друга сімка прецедентів)	28,79
	5	10,81
	6, 7	3,45
	1–4 (третя сімка прецедентів)	11,12
	5	8,02
	6, 7	0,89
	1 (четверта сімка прецедентів)	63,64
	2, 3	20,88
	4–6	10,95
	7	8,32

Зазначимо, що при настроюванні ваг відстань Кемені між отриманим і реальним вихідним ранжируваннями в загальному випадку поводить себе немонотонно (тобто, іншими словами, кількість пар альтернатив, вихідне ранжирування яких порушується, може збільшуватися під час настроювання ваг, але по закінченні настроювання вона дорівнюватиме 0 — задане глобальне ранжирування зберігається).

До того ж, помилка обчислення ваг при поданні на вхід алгоритму нового прецеденту також може несуттєво збільшуватись, оскільки, хоча в процесі настроювання і зменшується область допустимих значень ваг, значення знайдених

коефіцієнтів вагомості можуть, навіть залишаючись всередині цієї області, «віддалятися» від реального значення.

## Висновки

Запропонований підхід дозволяє обчислювати коефіцієнти відносної вагомості критеріїв у процесі ітераційного настроювання.

У ході настроювання ваг на кількох прецедентах область значень коефіцієнтів вагомості критеріїв, що дозволяють зберегти глобальне ранжирування альтернатив, залишається незмінною, або звужується, по мірі подання на вхід алгоритму нових прецедентів. Отже, можна стверджувати, що з точністю до розміру області припустимих значень ваг алгоритм збігається: помилка настроювання ваг обмежена розміром області, і метод є інваріантним відносно неї. Навіть якщо в процесі настроювання поміняти прецеденти місцями, алгоритм «приведе» нас до тієї самої області значень.

Під час інтерпретації результатів роботи алгоритму виникають певні ускладнення.

Подальше удосконалення алгоритму полягатиме в його розширенні на випадок ієрархій критеріїв типу «дерево» та «мережа».

До проблем, яким слід приділити увагу в ході подальших досліджень, відносяться: вибір темпу навчання та мінімальних значень коефіцієнтів вагомості, перевірка умов строгої збіжності алгоритму, а також удосконалення самої математичної процедури обчислення ваг критеріїв.

Алгоритм може стати корисним інструментом підтримки прийняття рішень на основі ординальних оцінок (ранжирувань) альтернатив, адже визначення відносної вагомості критеріїв дозволяє ОПР розставляти пріоритети в своїй діяльності, а також визначати основні напрямки зосередження зусиль і ресурсів. До того ж, ранжирування альтернатив (визначення ординальних оцінок) може виявитися менш трудомістким, ніж їхнє кардинальне оцінювання.

## Додаток

### Твердження 4.

Дано:

- 1) множина альтернатив  $\{A_i\}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ;
- 2) два вектори ранжирувань цих альтернатив  $R_1$  та  $R_2$ .

Тоді кількість пар альтернатив, взаємне розташування яких у двох ранжируваннях не співпадає, дорівнює  $1/4$  відстані Кемені між ранжируваннями  $R_1$  та  $R_2$ .

### Доведення.

Щоб обчислити відстань Кемені між двома ранжируваннями, для кожного з них будується матриця домінування  $\{d_{ij} : i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, m\}$ . Якщо альтернатива з номером  $i$  домінує над альтернативою з номером  $j$  ( $A_i \succ A_j$ ) (має менший ранг, тобто стоїть лівіше, або вище, у ранжируванні), то відповідний елемент матриці  $d_{ij} = 1$ . Якщо  $A_i \prec A_j$ , то  $d_{ij} = -1$ . По діагоналі матриці ставляться 0. Наприклад, якщо  $m = 5$ , а вектор ранжирування альтернатив  $R = (1, 3, 5, 4, 2)$ , то матриця виглядатиме наступним чином:

	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$
$A_1$	0	1	1	1	1
$A_2$	-1	0	1	1	-1
$A_3$	-1	-1	0	-1	-1
$A_4$	-1	-1	1	0	-1
$A_5$	-1	1	1	1	0

Відстань Кемені  $D_{12}$  між двома ранжируваннями  $R_1$  та  $R_2$  дорівнює сумі модулів різниць відповідних елементів матриць домінування цих ранжирувань  $\{d_{1ij}: i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, m\}$  та  $\{d_{2ij}: i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, m\}$ :

$$D_{12} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m |d_{1ij} - d_{2ij}|.$$

Якщо в ранжируванні  $R_1$  альтернатива з номером  $i^*$  домінує над альтернативою з номером  $j^*$  ( $A_{i^*} \succ A_{j^*}$ ), а в ранжируванні  $R_2$  — навпаки  $A_{j^*} \succ A_{i^*}$ , то в матрицях домінування  $\{d_{1ij}: i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, m\}$  та  $\{d_{2ij}: i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, m\}$  не співпадуть два елементи:  $d_{1i^*j^*} \neq d_{2i^*j^*}$  та  $d_{1j^*i^*} \neq d_{2j^*i^*}$ . З принципу побудови матриць домінування витікає, що

$$|d_{1i^*j^*} - d_{2i^*j^*}| + |d_{1j^*i^*} - d_{2j^*i^*}| = 2 + 2 = 4.$$

Це означає, що кожна подібна «інверсія» у взаємному розташуванні альтернатив призводить до зміни відстані Кемені на 4. З цього випливає справедливості вихідного твердження.

1. *Каденко С.В.* Визначення відносної вагомості критеріїв на основі ординальних оцінок // Реєстрація зберігання і оброб. даних. — 2006. — Т. 8, № 2. — С. 100–110.
2. *Терехов С.А.* Лекции по теории и приложениям искусственных нейронных сетей. Глава 4. — Лаборатория Искусственных Нейронных Сетей НТО-2. — Снежинск: ВНИИТФ, 1998. — Электронная версия.
3. *Тоценко В.Г.* Методы определения групповых многокритериальных ординальных оценок с учетом компетентности экспертов // Проблемы управления и информатики. — 2005. — № 5. — С. 84–89 (*Vitaliy G. Totsenko. Method of Determination of Group Multicriteria Ordinal Estimates with Account of Expert Competence // J. of Automation and Information Sciences. — 2005. — Vol. 37. — Issue 10, P. 19–23.*)
4. *Тоценко В.Г.* Методы и системы поддержки принятия решений. — К.: Наук. думка, 2002. — С. 215–229.
5. Ранжирування університетів Times Higher Education Supplement. — [www.thes.co.uk](http://www.thes.co.uk)
6. Ранжирування вищих навчальних закладів Shanghai Jiao Tong University. — <http://ed.sjtu.edu.cn>
7. Ранжирування вищих навчальних закладів Webometrics. — [www.webometrics.info](http://www.webometrics.info)

Надійшла до редакції 11.12.2007