

ІНТЕРФЕРЕНЦІЙНА ЧАСТИНА СИНХРОТРОННОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ

Юрій ЯРЕМКО

Інститут фізики конденсованих систем НАН України
вул. Свенціцького 1, Львів 79011
e-mail: yar@ph.icmp.lviv.ua

Редакція отримала статтю 17 грудня 2010 р.

У рамках класичної електродинаміки досліджена проблема реакції випромінювання та її вплив на рух замкненої системи двох точкових зарядів. В інтерференційній частині тензора густини енергії-імпульсу Максвелла виділена радіаційна компонента, яка визначає ту частину випромінювання, що покидає район взаємодії і може фіксуватись віддаленими детекторами. Інша, причастинкова компонента тензора Максвелла, формує невіддільні від зарядів електромагнетні “хмаринки”. Вона дає вклад у масу кожного із зарядів та модифікує їхні 4-імпульси. “Далекосяжне” випромінювання переносить енергію, імпульс та момент імпульсу, забираючи їх від зарядів. З аналізу рівнянь балансу збережуваних величин замкненої системи (частинки плюс поле) впливає відоме рівняння Лоренца-Дірака, що описує рух заряду в полі іншого заряду з урахуванням реакції випромінювання.

1. ВСТУП

Ініційоване Лоренцом та Абрагамом дослідження випромінювання заряджених частинок привертало увагу дослідників впродовж усього минулого століття. Лієнард (1898) та Гевісайд (1902) узагальнили Ларморівський вираз для потужності випромінювання прискореного нерелятивістського заряду на випадок довільних швидкостей. У 1907 р. Шотт описав випромінювання електрона, що рухається по колу [1]. У своїй класичній роботі [2] Дірак встановив, як генероване точковим зарядом випромінювання модифікує траєкторію його руху. Електромагнетні хвилі забирають у зарядженої частинки енергію та імпульс, сповільнюючи її. Саме радіаційні втрати обмежують величину енергії, яку можна надати зарядженим частинкам у колових прискорювачах. Швінгер [3] дослідив кутовий, спектральний та спектрально-кутовий розподіл випромінювання заряду та встановив, що ультрарелятивістичний електрон випромінює в напрямі, що збігається з напрямом його швидкості (т.зв. “прожекторний ефект”).

Випромінювання, генероване прискореними зарядами, приносить також і користь. Струмінь електронів, що рухається по синусоїді

під впливом періодичного магнетного поля, служить робочим інструментом у т.зв. лазерах на “вільних” електронах. Ці пристрої вигідно відрізняються від оптичних лазерів (де електрони “прив’язані” до атомів і випромінюють при “перескоках” із збудженого рівня на основний) набагато більшою потужністю та всеосяжним діапазоном довжин хвиль: від міліметрового до “жорсткого” рентгену [4]–[7]. Тому вони знайшли застосування у найрізноманітніших сферах людської діяльності – від медицини до оборонної галузі.

Характеристики лазера на вільних електронах визначаються параметрами траєкторії, по якій рухається струмінь електронів. Це дає змогу регулювати частоту та потужність випромінювання, точку фокусування лазерного променя та інші важливі величини. Минулого року запрацював найпотужніший у світі лазер на вільних електронах на основі Стенфордського лінійного прискорювача [8]. Швидкість електронів у струмені лише в дев’ятому знаку після коми відрізняється від швидкості світла. Лазер продукує надзвичайно потужні імпульси у рентгенівському діапазоні, сфокусовані у пляму радіусом всього лиш 0.15 нм. Модуль осцилюючого електромагнетного поля лише на порядок менший за величину критичного Швінгерівського електростатичного поля ($1.3 \cdot 10^{18} \text{ V/m}$), при якому “закипає” вакуум (утворюються пари електрон-позитрон).

Потужність випромінювання одного електрона задається відомим виразом Лармора і є пропорційною до квадрату його заряду та квадрату прискорення. У випадку ультрарелятивістичного руху (у лазерах на вільних електронах використовують лише високоенергетичні потоки заряджених частинок) випромінювання сконцентроване вздовж напрямку швидкості зарядженої частинки. Отож при синусоїдальному русі у формуванні лазерного променя беруть участь лише згустки електронів, що перебувають на “гребенях” синусоїди. Очевидно, що електромагнетні хвилі, випромінені різними електронами, накладаються одна на одну (інтерферують). Коли електрони у згустку розпорошені, хвилі накладаються безладно і взаємно погашаються. Таке випромінювання називають некогерентним; його інтенсивність пропорційна до кількості частинок у згустку.

Проте рух електронів можна впорядкувати таким чином, що випромінені ними електромагнетні хвилі підсилуватимуть одна одну. Це дає змогу суттєво збільшити інтенсивність випромінювання, зробивши її пропорційною до квадрата кількості частинок. Цей ефект, названий спонтанно стимульованим самопідсиленням (self amplified stimulated emission, SASE) [4]–[6], коротко можна описати так. Спочатку електрони у згустку розподілені довільно. Однак, завдяки взаємодії осцилюючих електронів із їх власним випромінюванням, вони “збиваються” у мікрозгустки, розміри яких сумірні із довжиною хвилі фотонів. Такі мікрозгустки, які можуть складатись із мільярда електронів [7], випромінюють як один-єдиний заряд. Очевидно, що саме явище інтерференції випромінювання лежить в основі ефекту спонтанно стимульованого самопідсилення.

У цій статті розглянемо випромінювання, генероване замкненою системою двох точкових зарядів. Частинки взаємодіють за посередництвом створеного ними електромагнетного поля; взаємовплив поля та його джерел визначає еволюцію системи. Результати, що вплива-

ють з аналізу інтерференції полів двох зарядів, легко узагальнюються на систему з довільним числом частинок.

2. ІНТЕРФЕРЕНЦІЯ ВИПРОМІНЮВАННЯ ДВОХ ТОЧКОВИХ ЗАРЯДІВ

Енергія та імпульс, які переносяться електромагнетним полем \hat{f} , визначаються тензором густини енергії-імпульсу Максвелла

$$4\pi T^{\mu\nu} = f^{\mu\alpha} f_{\alpha}^{\nu} - \frac{\eta^{\mu\nu}}{4} f^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}. \quad (2.1)$$

Оскільки тензор Максвелла квадратичний за напруженостями електромагнетного поля $\hat{f} = \hat{f}_{(1)} + \hat{f}_{(2)}$ двох частинок, його можна представити сумою

$$T^{\mu\nu} = T_{(1)}^{\mu\nu} + T_{(2)}^{\mu\nu} + T_{\text{int}}^{\mu\nu}. \quad (2.2)$$

Індивідуальні вклади частинок $T_{(a)}$ задаються виразом (2.1), у якому повне поле \hat{f} замінюється спізненим полем a -ої частинки

$$\begin{aligned} f_{\alpha\beta}^{(a)} &= \frac{e_a}{r_a^2} \left(u_{a,\alpha} k_{a,\beta} - u_{a,\beta} k_{a,\alpha} \right) \\ &+ \frac{e_a}{r_a} \left[a_{a,\alpha} k_{a,\beta} - a_{a,\beta} k_{a,\alpha} + (a_a \cdot k_a) (u_{a,\alpha} k_{a,\beta} - u_{a,\beta} k_{a,\alpha}) \right], \end{aligned} \quad (2.3)$$

а “перехресний” доданок

$$4\pi T_{\text{int}}^{\mu\nu} = f_{(1)}^{\mu\alpha} f_{(2)\alpha}^{\nu} + f_{(2)}^{\mu\alpha} f_{(1)\alpha}^{\nu} - \frac{\eta^{\mu\nu}}{4} \left(f_{(1)}^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}^{(2)} + f_{(2)}^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}^{(1)} \right) \quad (2.4)$$

описує інтерференцію полів взаємодіючих частинок. У знаменниках виразу (2.3) стоїть спізнена віддаль [9]

$$r_a = -(K_a \cdot u_a), \quad (2.5)$$

де $K_a^\alpha = x^\alpha - z_a^\alpha(s_a)$ – 4-вектор нульової довжини, що пов’язує польову точку $x \in \mathbb{M}_4$ з точкою емісії $z_a^\alpha(s_a) \in \zeta_a$ на світовій лінії ζ_a частинки (див. рис. 1). Символом k_a позначений нульовий 4-вектор K_a/r_a , а динамічні характеристики (4-швидкість $u_a^\alpha(s_a)$ та 4-прискорення $a_a^\alpha(s_a)$) беруться у спізнений момент часу $s_a(x^\alpha)$, що є розв’язком алгебричного рівняння $\eta_{\alpha\beta} K_a^\alpha K_a^\beta = 0$ та задовольняє умові причинності $z_a^0(s_a) < x^0$.

Електромагнетне поле (2.3) отримуємо диференціюванням спізненого потенціалу Лієнара-Віхерта

$$A_a^{\text{ret}}(x) = e_a \frac{u_a[\tau^{\text{ret}}(x)]}{r_a}, \quad (2.6)$$

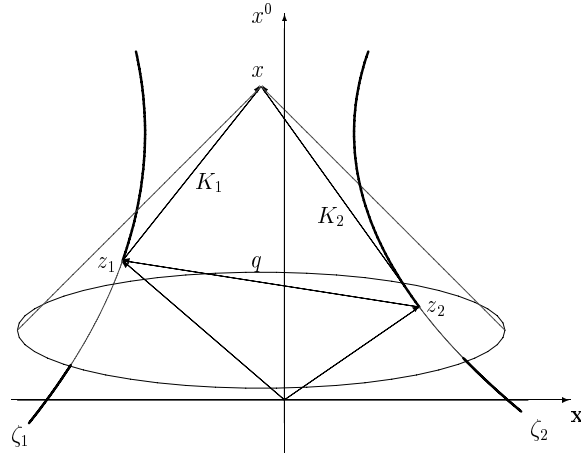


Рис. 1. Спізнене електромагнетне поле в точці x визначається динамічними характеристиками a -ої частинки в момент часу $s_a = \tau^{\text{ret}}(x)$. Спрямований у майбутнє нульовий 4-вектор K_a пов'язує точку емісії $z_a(s_a)$ з “польовою” точкою x .

який задовольняє хвильове рівняння

$$\square A_a^\mu = -4\pi j_a^\mu. \quad (2.7)$$

Тут $\square = \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta$ – оператор Д'Аламбера, а струм j_a точкової зарядженої частинки моделюється δ -функцією Дірака:

$$j_a^\mu(x) = e_a \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau u_a^\mu(\tau) \delta^4(x - z_a(\tau)). \quad (2.8)$$

Завдяки принципу суперпозиції полів, формула (2.2) легко узагальнюється на випадок системи N частинок:

$$T^{\mu\nu} = \sum_a T_a^{\mu\nu} + \sum_{b \neq a} T_{ab}^{\mu\nu}. \quad (2.9)$$

Оскільки “перехресних” доданків на порядок більше, ніж “індивідуальних” ($N(N-1)$ проти N), інтерференційна компонента становить найістотнішу частину випромінювання згустка заряджених частинок.

Рухаючись із прискоренням, електрони випромінюють електромагнетні хвилі, втрачаючи, імпульс та момент імпульсу. Електромагнетні хвилі, генеровані виділеним зарядом, досягають інших зарядів і можуть “накачувати” їх енергією та імпульсом. Точне врахування балансу збережуваних величин дає змогу вивести рівняння руху заряджених частинок, у яких враховується самодія [12].

2.1. Одночастинкові внески у енергію та імпульс електромагнетного випромінювання

У просторі Мінковського виділимо область V , обмежену тривимірною поверхнею ∂V , і за теоремою Гауса оцінимо потік енергії та імпульсу через цю поверхню. Для цього обчислимо дивергенцію двочастинкового тензора Максвелла (2.2). Почнемо з “одночастинкових” членів $\hat{T}_{(1)}$ та $\hat{T}_{(2)}$. Підставивши співвідношення

$$\begin{aligned} f_{\alpha\beta}^{(a)} &= \frac{\partial A_{a,\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_{a,\alpha}}{\partial x^\beta}, \\ f_{(a)}^{\mu\nu} &= \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} f_{\alpha\beta}^{(a)} \\ f_{(a),\beta}^\mu &= \eta^{\mu\alpha} f_{\alpha\beta}^{(a)} \end{aligned} \quad (2.10)$$

у вираз (2.1) та продиференціювавши його за змінною x^ν , отримуємо:

$$4\pi \frac{\partial T_{(a)}^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \left(\frac{\partial A_a^\alpha}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_a^\mu}{\partial x_\alpha} \right) \left[\square A_{a,\alpha} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial A_a^\nu}{\partial x^\nu} \right) \right]. \quad (2.11)$$

Тут $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ – метричний тензор простору Мінковського M_4 . Зафіксувавши калібровку Лоренца $\partial_\nu A_a^\nu = 0$ та врахувавши хвильове рівняння (2.7), отримаємо

$$\frac{\partial T_{(a)}^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = -f_{(a)}^{\mu\alpha}(x) j_{a,\alpha}(x), \quad (2.12)$$

де $f_{(a)}^{\mu\alpha}(x)$ – напруженість спізненого електромагнетного поля a -ої частинки.

Щоб оцінити втрату $\Delta p_{\text{part}}^\mu$ механічного 4-імпульсу зарядженої частинки на випромінювання, обчислимо потік енергії-імпульсу, що переноситься електромагнетним полем. Оскільки струм локалізований на світовій лінії частинки, застосування теореми Гауса

$$\int_{\partial V} d\sigma_\nu T^{\mu\nu} = \int_V d^4x \frac{\partial T_{(a)}^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} \quad (2.13)$$

веде до виразу, означеному на сегменті світової лінії частинки ζ_a , який потрапляє всередину виділеної області V :

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} d\sigma_\nu T_{(a)}^{\mu\nu} &= -e_a \int_V d^4x f_{(a)}^{\mu\alpha}(x) \int_{-\infty}^{+\infty} ds_a u_{a,\alpha}(s_a) \delta^4(x - z(s_a)) \\ &= -e_a \int_I ds_a f_{(a)}^{\mu\alpha}[z_a(s_a)] u_{a,\alpha}(s_a). \end{aligned} \quad (2.14)$$

(Інтервал $I = [\tau_0, \tau_1]$ параметризує вказаний відрізок $\zeta_a \subset V$.) Бачимо, що зміна 4-імпульса a -ої частинки зрівноважується роботою сили

Лоренца на сегменті світової лінії, яка потрапляє всередину виділеної області V :

$$\Delta p_{\text{part},a}^{\mu} = -e_a \int_{\tau_0}^{\tau_1} ds_a f_{(a)}^{\mu\alpha}[z(s_a)] u_{\alpha}(s_a). \quad (2.15)$$

Оцінити цю роботу не так просто, оскільки при наближенні до світової лінії частинки поле (2.3) стає нескінченно великим (проблема самодії).

У роботі [2], що стала класичною, Дірак розбив його на сингулярну та радіаційну частини:

$$f_{(a)}^{\text{ret}} = f_{(a)}^{\text{S}} + f_{(a)}^{\text{R}}. \quad (2.16)$$

Сингулярна частина

$$f_{(a)}^{\text{S}} = \frac{1}{2} \left(f_{(a)}^{\text{ret}} + f_{(a)}^{\text{adv}} \right) \quad (2.17)$$

задовольняє неоднорідне хвильове рівняння (2.7) з точковим джерелом і необмежено зростає в околі світової лінії частинки. Скінченна поблизу світової лінії радіаційна частина

$$f_{(a)}^{\text{R}} = \frac{1}{2} \left(f_{(a)}^{\text{ret}} - f_{(a)}^{\text{adv}} \right) \quad (2.18)$$

задовольняє однорідне хвильове рівняння. Це та частка випромінювання, яка покидає частинку і може досягати віддалених детекторів. Випередне поле

$$\begin{aligned} f_{a,\alpha\beta}^{\text{adv}}(x) &= \frac{e_a}{(r_a^{\text{adv}})^2} (u_{a,\alpha} k_{a,\beta} - u_{a,\beta} k_{a,\alpha}) \\ &- \frac{e_a}{r_a^{\text{adv}}} \left[a_{a,\alpha} k_{a,\beta} - a_{a,\beta} k_{a,\alpha} - (a_a \cdot k_a) (u_{a,\alpha} k_{a,\beta} - u_{a,\beta} k_{a,\alpha}) \right]. \end{aligned} \quad (2.19)$$

отримуємо з випередного потенціалу Лієнара-Віхерта [9]

$$A_a^{\text{adv}}(x) = e \frac{u_a[\tau_a^{\text{adv}}(x)]}{r_a^{\text{adv}}}, \quad (2.20)$$

який теж є розв'язком хвильового рівняння (2.7). Додатньо означена інваріантна величина

$$r_a^{\text{adv}}(x) = (K_a \cdot u_a) \Big|_{\tau=\tau_a^{\text{adv}}(x)} \quad (2.21)$$

називається *випередною відстанню* між точкою емісії z_a^{adv} та польовою точкою x . Оскільки $z_a^0(\tau_a^{\text{adv}}) > x^0$, випередний потенціал Лієнара-Віхерта \hat{A}_a^{adv} описує гіпотетичну ситуацію, коли електромагнетна взаємодія поширюється назад у часі і випромінювання не розсіюється, а концентрується на заряді.

Щоб обчислити радіаційну частину (2.18), розмістимо польову точку x поблизу світової лінії частинки (див. рис. 2). Пов'язаний із нею

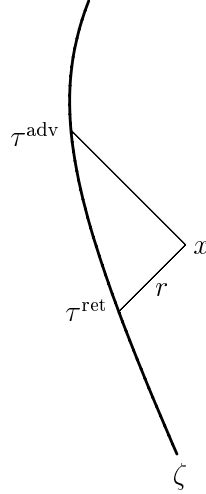


Рис. 2. Польова точка x пов'язана із спізненою точкою $\tau^{\text{ret}} := s$ та випередною точкою $\tau^{\text{adv}} := s'$ світловими променями. Якщо x дуже близька до світової лінії частинки ζ , спізнена віддаль $r \in$ малим параметром. У границі $r \rightarrow 0$ точка x прямує до ζ .

випередний момент часу $\tau^{\text{adv}} = s'$ можна представити у вигляді розвинення за степенями малого параметра r [9]:

$$s' = s + 2r \left[1 - ra_k + r^2 \left(a_k^2 - \frac{1}{3}a^2 - \frac{2}{3}\dot{a}_k \right) \right], \quad (2.22)$$

де $a_k = (a \cdot k)$ та $\dot{a}_k = (\dot{a} \cdot k)$ – проекції 4-прискорення та його похідної на нульовий вектор k . Звідси можна легко знайти зв'язок між динамічними характеристиками частинки у випередний та спізнений моменти часу:

$$\begin{aligned} r^{\text{adv}} &= r \left[1 + \frac{2}{3}r^2(\dot{a}_k + a_k^2) \right], \\ u^\mu(s') &= u^\mu + 2ra^\mu + 2r^2[-a^\mu a_k + \dot{a}^\mu], \\ a^\mu(s') &= a^\mu + 2r\dot{a}^\mu. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Підставивши ці співвідношення у вираз (2.19) для випередного поля та віднявши отримане розвинення від спізненого поля (2.3), отримаємо добре відомий 4-вектор Абрагама

$$f_{(a),\alpha}^{\text{self}} = \frac{2e^2}{3} (\dot{a}_{a,\alpha} - a_a^2 u_{a,\alpha}). \quad (2.24)$$

Перший доданок – це так званий доданок Шотта, який описує втрату (коли $\dot{a}^0 < 0$) чи отримання (коли $\dot{a}^0 > 0$) зарядом енергії внаслідок

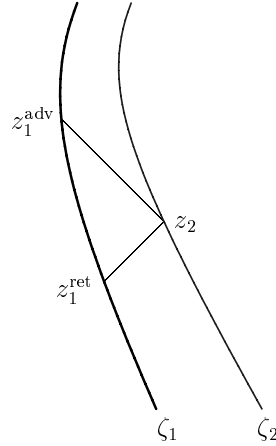


Рис. 3. Під дією великої зовнішньої сили заряджені частинки рухаються по близьких траєкторіях. Точки емісії $z_1[\tau_1^{\text{ret}}(\tau_2)] \in \zeta_1$ та $z_1[\tau_1^{\text{adv}}(\tau_2)] \in \zeta_1$ розміщені дуже близько до польової точки $z_2(\tau_2) \in \zeta_2$. Спізнена віддаль між точками z_1^{ret} та z_2 є малим параметром.

радіаційного гальмування. Другий доданок – релятивістичне узагальнення не менш відомого виразу Лармора для інтенсивності електромагнетного випромінювання, яке покидає частинку та розсіюється у просторі.

2.2. Інтерференційна частина випромінювання

Аналогічно оцінимо внесок від інтерференційних доданків. Нехай заряди e_1 та e_2 рухаються вздовж дуже близьких світових ліній, зображених на рис. 3. Щоб оцінити інтерференційну частину випромінювання, обчислимо піврізницю спізненої та випередної сил Лоренца, з якими 1-а частинка діє на 2-у. Відповідні вирази отримаємо із виразів (2.3) та (2.19) для спізнених та випередних полів, поклавши у них $x = z_2(s_2)$. Оскільки траєкторії близькі, будемо вважати спізнену віддаль $r_1^{\text{ret}} = -(q_{21} \cdot u_1)$ малим параметром. Провівши тривіальні обчислення, отримуємо

$$\begin{aligned} f_{12}^\alpha &= \frac{1}{2} \left[f_{\text{ret}}^{\alpha\beta}(z_1^{\text{ret}}, z_2) - f_{\text{adv}}^{\alpha\beta}(z_1^{\text{adv}}, z_2) \right] u_{2,\beta} \\ &= \frac{2e_1e_2}{3} \left(u_1^\alpha \dot{a}_1^\beta - u_1^\beta \dot{a}_1^\alpha \right) u_{2,\beta}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

де швидкість і прискорення заряду e_1 взяті в момент часу $s_1^{\text{ret}}(s_2)$, а заряду e_2 – момент часу s_2 .

Розглянемо особливий випадок двох заряджених частинок з однаковими динамічними характеристиками, наприклад два осцилюючі

електрони у мікрозгустку в лазері на вільних електронах. Поклавши у рівнянні (2.25) $u_1 = u_2 = u$ та $a_1 = a_2 = a$, отримуємо

$$f_{12}^{\alpha} = \frac{2e_1e_2}{3} (\dot{a}^{\alpha} - a^2u^{\alpha}). \quad (2.26)$$

При розгляді дзеркальної ситуації, коли на заряд e_1 діє піврізниця спізненого та випередного полів, генерованих зарядом e_2 , отримуємо той самий вираз. Додавши f_{12}^{α} та f_{21}^{α} , отримуємо інтерференційний внесок до випромінювання системи двох зарядів:

$$f_{\text{int}}^{\alpha} = \frac{4e_1e_2}{3} (\dot{a}^{\alpha} - a^2u^{\alpha}). \quad (2.27)$$

Додавши його до “індивідуальних” (тих, які відповідають доданкам $\hat{T}_{(1)}$ та $\hat{T}_{(2)}$ у двочастинковому тензорі Максвелла (2.2)), отримуємо реакцію випромінювання системи двох зарядів:

$$\begin{aligned} f_{\text{self}}^{\alpha} &= f_{(1)}^{\alpha} + f_{(2)}^{\alpha} + f_{\text{int}}^{\alpha} \\ &= \frac{2(e_1 + e_2)^2}{3} (\dot{a}_{\alpha} - a^2u_{\alpha}). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Як і слід було очікувати, у система з двох близьких зарядів з однаковими динамічними характеристиками випромінює як один заряд величиною $e_1 + e_2$.

3. РОЗЩЕПЛЕННЯ \hat{T}_{int} НА РАДІАЦІЙНУ ТА ПРИЧАСТИНКОВУ КОМПОНЕНТИ

Тейтельбойм [10] розділив тензор Максвелла (2.1) однієї частинки на причастинкову та радіаційну компоненти. Радіаційна обернено пропорційна до квадрата віддалі від джерела до точки спостереження:

$$4\pi T_{\text{rad}}^{\mu\nu} = \frac{e^2}{r^2} (a^2 - (a \cdot k)^2) k^{\mu}k^{\nu}. \quad (3.1)$$

Тут a – 4-прискорення частинки, а k – нульовий вектор-“вказівник” $K = x - z(\tau)$, поділений на “спізнену” віддаль $r = -(K \cdot u)$. Причастинкова компонента T_{bnd} є комбінацією доданків, пропорційних до r^{-4} та r^{-3} :

$$\begin{aligned} T_{\text{bnd}}^{\mu\nu} &= \frac{e^2}{4\pi r^4} \left[2k^{\mu}u^{\nu} + 2k^{\nu}u^{\mu} - k^{\mu}k^{\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu} \right] \\ &+ \frac{e^2}{2\pi r^3} \left[k^{\mu}a^{\nu} + k^{\nu}a^{\mu} + (a \cdot k) (k^{\mu}u^{\nu} + k^{\nu}u^{\mu} - k^{\mu}k^{\nu}) \right]. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Поза світовою лінією дивергенція кожного з тензорів T_{rad} та T_{bnd} окремо дорівнює нулю. За теоремою Стокса, енергія та імпульс, що

переносяться електромагнетним полем, визначаються інтегруванням тензора густини енергії-імпульсу за довільною просторовоподібною поверхнею Σ :

$$p_{\text{em}}^{\nu} = \int_{\Sigma} d\sigma_{\mu} T^{\mu\nu}. \quad (3.3)$$

Тут $d\sigma_{\mu}$ – елемент поверхні. Оскільки він пропорційний до r^2 , інтегрування радіаційної компоненти \hat{T}_{rad} призводить до результату, який не залежить від віддалі до точки спостереження:

$$p_{\text{rad}}^{\mu} = \frac{2e^2}{3} \int_{-\infty}^{\tau} ds (a \cdot a) u^{\mu}. \quad (3.4)$$

Це добре відоме релятивістичне узагальнення Ларморівської інтенсивності випромінювання. Ця частина випромінювання розсіюється у просторі та може фіксуватись віддаленими детекторами. Вперше її спостерігали у 1947 році під час ремонтних робіт на циклічному прискорювачі-синхротроні фірми General Electric [11] (звідси назва – синхротронне випромінювання).

Проінтегрувавши T_{bnd} , Тейтельбойм отримав вираз, обернено пропорційний до віддалі між зарядом і точкою спостереження. Отож причастинкова компонента тензора густини енергії-імпульсу утворює невіддільну від точкового джерела електромагнетну “хмаринку”, яка не досягає віддалених детекторів. Після розкладу в ряд Тейлора кулонівська розбіжність поглинається масою “голого” заряду внаслідок процедури перенормування, а скінченний доданок видозмінює 4-імпульс частинки

$$p_{\text{part}}^{\mu} = m u^{\mu} - \frac{2e^2}{3} a^{\mu}. \quad (3.5)$$

Тут m – вже перенормована скінченна маса зарядженої частинки. Окрім звичного, пропорційного до 4-швидкості доданка, з’являється пропорційний до квадрату заряду та 4-прискорення внесок від причастинкової компоненти тензора Максвелла. Його похідна за часом – доданок Шотта, взятий із протилежним знаком. Отож “голий” заряд разом із електромагнетною “хмаринкою” утворює новий об’єкт: “одягнену” заряджену частинку з імпульсом (3.5).

Таким чином Тейтельбойм [10] показав, що 4-вектор Абрагама (2.24) складається з двох принципово відмінних частин: з “короткодійного” доданку Шотта, породженого причастинковою компонентою (3.2) та “далекосяжного” доданку Лармора, який з’являється внаслідок інтегрування радіаційної компоненти (3.1) тензора Максвелла. Доданок Шотта описує безпосередній вплив на заряджену частинку її власного електромагнетного поля, а доданок Лармора – втрати енергії та імпульсу на випромінювання, яке покидає частинку, розсіюється в просторі та може фіксуватись віддаленими детекторами.

Аналізуючи інтерференційний внесок до випромінювання системи двох близьких зарядів (2.27) переконаємось, що інтерференційна частина (2.4) двочастинкового тензора Максвелла (2.2) також є комбінацією причастинкової та радіаційної компонент.

Проведене у роботі [12] дослідження випромінювання замкненої системи двох точкових взаємодіючих електричних зарядів, що рухаються по довільних траєкторіях, показало, що радіаційна компонента інтерференційної частини двочастинкового тензора Максвелла має такий вигляд:

$$4\pi T_{\text{int,rad}}^{\mu\nu} = e_1 e_2 \left(t^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} t^\alpha{}_\alpha \right). \quad (3.6)$$

Тут $t^\alpha{}_\alpha$ – згортка тензора

$$\begin{aligned} t^{\mu\nu} &= \frac{e_1 e_2}{r_1 r_2} (k_1^\mu k_2^\nu + k_1^\nu k_2^\mu) (V_1 \cdot V_2) + \frac{e_1 e_2}{r_1^2 r_2} (v_1^\mu k_2^\nu + v_1^\nu k_2^\mu) (u_1 \cdot V_2) \\ &+ \frac{e_1 e_2}{r_1 r_2^2} (k_1^\mu v_2^\nu + k_1^\nu v_2^\mu) (V_1 \cdot u_2) + \frac{e_1 e_2}{r_1^2 r_2^2} (v_1^\mu v_2^\nu + v_1^\nu v_2^\mu) (u_1 \cdot u_2). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Нульовий 4-вектор $V_a = u_a(k_a \cdot a_a) + a_a$ та просторовоподібний $v_a = k_a - u_a$ є комбінацією 4-швидкості u_a , 4-прискорення a_a та нульового вектора $k_a = K_a/r_a$. Обчисливши інтеграл (3.3) цього тензора за поверхнею $\Sigma_t = \{x \in \mathbb{M}_4 : x^0 = t\}$, отримуємо інтерференційну компоненту потоку енергії-імпульсу через Σ_t [12]:

$$p_{\text{int,rad}} = \frac{1}{2} \sum_{b \neq a} \left[\int_{-\infty}^{\tau_a(t)} ds_a G_{ba}^{\text{ret}}[s_a, s_b^{\text{ret}}(s_a)] - \int_{-\infty}^{s_a^{\text{ret}}(t)} ds_a G_{ba}^{\text{adv}}[s_a, s_b^{\text{adv}}(s_a)] \right]. \quad (3.8)$$

Підінтегральні вирази залежать від характеристик b -ої частинки у спізнений, $s_b^{\text{ret}}(s_a)$, та випередний $s_b^{\text{adv}}(s_a)$ моменти часу, пов'язані з виділеним моментом s_a на світовій лінії a -ої частинки спізненим та випередним світловими променями відповідно. Функція

$$G_{ab}^\alpha = e_a e_b \left\{ \frac{q_{ba}^\alpha (u_b \cdot u_a)}{r_a^3} [1 + (q_{ba} \cdot a_a)] + \frac{q_{ba}^\alpha (u_b \cdot a_a)}{r_a^2} - \frac{u_a^\alpha (u_b \cdot u_a)}{r_a^2} \right\} \quad (3.9)$$

є комбінацією сили Лоренца F_{ba} , з якою b -та частинка діє на a -ту, та часової похідної від потенціалу Лієнара-Віхерта A_{ba} , створеного b -ою частинкою у місці, де перебуває a -та:

$$G_{ba}^\alpha = -F_{ba}^\alpha - e_a \frac{dA_{ba}^\alpha}{ds_a}. \quad (3.10)$$

Принцип спізненої причинності не порушується, адже ми розглядаємо інтерференцію *розбіжних* електромагнетних хвиль у площині Σ_t і всі події відбуваються до моменту спостереження t . Спізнений та випередний моменти часу з'являються при розгляді інтерференційної картини (див. рис. 4).

У наступному параграфі обчислимо дивергенцію радіаційної компоненти (3.6) двочастинкового тензора Максвелла та покажемо, що поза світовими лініями частинок вона дорівнює нулеві.

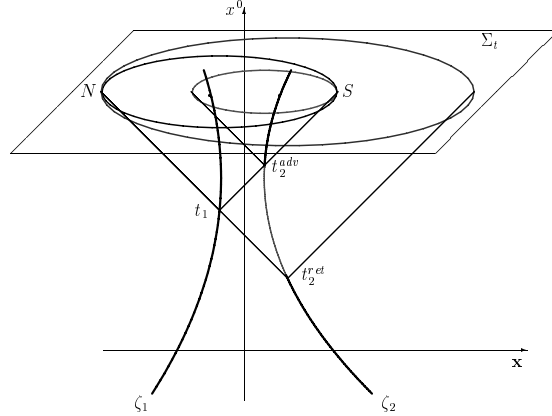


Рис. 4. Сферичний хвильовий фронт $S_1 \in \Sigma_t$, генерований у фіксований момент часу t_1 (середнє за розміром коло у площині Σ_t), можна покрити колами $S_1 \cap S_2$ де параметр t_2 зростає з $t_2^{\text{ret}}(t_1)$ до $t_2^{\text{adv}}(t_1)$. Мінімальне значення часового параметра позначає вершину $z_2(t_2^{\text{ret}})$ світлового конуса, “проткнутого” світовою лінією ζ_1 в точці $z_1(t_1)$. Світова лінія ζ_2 “протикає” світловий конус з вершиною в $z_1(t_1)$ в точці $z_2(t_2^{\text{adv}})$.

3.1. Дивергенція радіаційної та причастинкової компонент \hat{T}_{int}

У термінах тензора

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta}^{(a)} &= -\frac{\partial A_{a,\beta}}{\partial x^\alpha} \\ &= \frac{e_a}{r_a^2} v_{a,\alpha} u_{a,\beta} + \frac{e_a}{r_a} k_{a,\alpha} V_{a,\beta} \end{aligned} \quad (3.11)$$

радіаційна компонента (3.6) матиме відносно простий вигляд:

$$4\pi T_{\text{int,rad}}^{\mu\nu} = g_{(1)}^{\mu\alpha} g_{(2),\alpha}^\nu + g_{(2)}^{\mu\alpha} g_{(1),\alpha}^\nu - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \left(g_{(1)}^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}^{(2)} + g_{(2)}^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}^{(1)} \right). \quad (3.12)$$

Продиференціювавши його за змінною x^μ , отримуємо дивергенцію

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{\text{int,rad}}^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} &= \frac{\partial A_1^\alpha}{\partial x_\mu} \left(\frac{1}{4\pi} \square A_{2,\alpha} \right) + \frac{\partial A_2^\alpha}{\partial x_\mu} \left(\frac{1}{4\pi} \square A_{1,\alpha} \right) \\ &= g_{(1)}^{\mu\alpha} \dot{j}_{2,\alpha} + g_{(2)}^{\mu\alpha} \dot{j}_{1,\alpha} \end{aligned} \quad (3.13)$$

де $\square = \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta$ – диференційний оператор Д’Аламбера а j_a – 4-вектор струму a -го заряду (2.8). Оскільки заряди точкові, струми локалізовані на світових лініях частинок і поза ними дивергенція дорівнює нулеві.

Інтерференційна частина (2.4) двочастинкового тензора Максвелла (2.2) містить ще дві компоненти з нульовою дивергенцією:

$$\begin{aligned} 4\pi T_{\text{int},2}^{\mu\nu} &= -g_{(1)}^{\mu\alpha} g_{(2),\alpha}{}^\nu - g_{(2)}^{\mu\alpha} g_{(1),\alpha}{}^\nu + \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \left(g_{(1)}^{\alpha\beta} g_{\beta\alpha}^{(2)} + g_{(2)}^{\alpha\beta} g_{\beta\alpha}^{(1)} \right), \\ 4\pi T_{\text{int},3}^{\mu\nu} &= -g_{(1)}^{\alpha\mu} g_{(2),\alpha}{}^\nu - g_{(2)}^{\alpha\mu} g_{(1),\alpha}{}^\nu + g_{(1)}^{\alpha\mu} g_{(2),\alpha}{}^\nu + g_{(2)}^{\alpha\mu} g_{(1),\alpha}{}^\nu. \end{aligned} \quad (3.14)$$

У калібровці Лоренца дивергенція $T_{\text{int},2}^{\mu\nu}$ тотожно рівна нулеві:

$$\frac{\partial T_{\text{int},2}^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0. \quad (3.15)$$

Дивергенція третього доданка також зникає поза світовими лініями частинок:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{\text{int},3}^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} &= -\frac{\partial A_1^\mu}{\partial x_\alpha} \left(\frac{1}{4\pi} \square A_{2,\alpha} \right) - \frac{\partial A_2^\mu}{\partial x_\alpha} \left(\frac{1}{4\pi} \square A_{1,\alpha} \right) \\ &= -g_{(1)}^{\alpha\mu} j_{2,\alpha} - g_{(2)}^{\alpha\mu} j_{1,\alpha}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Оскільки $f_{\alpha\beta}^{(a)} = -g_{\alpha\beta}^{(a)} + g_{\beta\alpha}^{(a)}$, сума дивергенцій (3.13)-(3.16) дає вихідне рівняння (2.12).

Щоб обчислити вклади доданків (3.14) в енергію та імпульс електромагнетного випромінювання, проінтегруємо $T_{\text{int},2}^{\mu\nu}$ та $T_{\text{int},3}^{\mu\nu}$ за просторово-подібною поверхнею $\Sigma_t = \{x \in \mathbb{M}_4 : x^0 = t\}$. Для цього скористаємось методикою, розробленою у роботі [12]. Результати обчислень наведені у Додатку. Причастинкова компонента інтерференційної частини тензора Максвелла видозмінює 4-імпульс (3.5) “одягненого” заряду, додаючи до нього спізнений потенціал Лієнара-Віхерта A_{ba} , створеного b -ою частинкою у місці, де перебуває a -та:

$$p_a^\mu = m u_a^\mu - \frac{2e^2}{3} a_a^\mu + e_a A_{ba}^{\text{ret},\mu}. \quad (3.17)$$

Появу A_{ba} можна інтерпретувати як наслідок деформації електромагнетної “хмаринки” a -го заряду полем заряду e_b .

4. ВИСНОВКИ

У цій роботі ми вивчаємо явище випромінювання та поширення енергії у класичній електродинаміці. Вихідне спізнене поле (2.3) має незліченну кількість ступенів вільності. Варіація дії, що визначає еволюцію замкненої системи двох точкових частинок та генерованого ними поля, призводить до рівнянь Максвелла (2.7) з точковими джерелами та до рівнянь руху самих джерел, які взаємодіють за посередництвом поля. Розв’язками рівнянь Максвелла є потенціали Лієнара-Віхерта, які розбігаються на світових лініях частинок. Тому для отримання змістовних рівнянь руху заряджених частинок потрібно застосовувати процедуру перенормування.

У [12] запропоновано процедуру перенормування, основу на балансі механічного імпульсу та моменту імпульсу зарядів і випромінювання, котре покидає ці заряди та розсіюється у просторі. Енергію, імпульс та момент імпульсу цього випромінювання знаходимо через інтегрування тензора густини енергії-імпульса Максвелла.

У анотації відомої роботи [13], де викладені основи електродинаміки як теорії прямої (без посередництва поля) взаємодії між частинками, Віллер та Фейнман цитують Айнштайна: "... тензор енергії слід розуміти лише як тимчасовий замітник матерії. Реальна матерія складається з електрично заряджених частинок..." У своїй піонерській роботі [10] Тейтельбойм показав, як "усунути" поле. Саме об'ємне інтегрування густини електромагнетної енергії-імпульсу виявляє "острівці" матерії у польовому "морі". Якщо додати вклади від всіх елементів об'єму, отримаємо доданки двох типів. Якщо сумарний результат залежить лише від стану системи в актуальний момент часу, це означає що ми натрапили на джерело випромінювання (заряджена сингулярність). Коли результат інтегрування залежить від попередньої історії джерела, це означає що ми встановили ту частку випромінювання, яка розсіялась у просторі.

Об'ємне інтегрування тензора густини енергії-імпульса Максвелла редукує польові ступені вільності. Отримуємо теорію типу *дії на відстані*, де частинки взаємодіють одна з одною напряму. Ця взаємодія описується диференційними рівняннями в термінах змінних самих частинок, у яких врахована скінченність швидкості поширення взаємодії та самодії. Таке інтегрування дає змогу встановити, яка частка енергії та імпульсу розсіюється в просторі.

У роботі [10] досліджувалось випромінювання однієї частинки у зовнішньому електромагнетному полі. У цій роботі підхід Тейтельбойма поширений на систему двох заряджених частинок. Показано, що інтерференційна частина двочастинкового тензора Максвелла складається з причастинкової та радіаційної компонент. Об'ємне інтегрування причастинкової компоненти описує деформацію електронних "хмаринок" довкола точкових зарядів, спричинену їхньою взаємодією. Ця деформація проявляється через додавання спізеного потенціалу Лієнара-Віхерта A_{ba} до 4-імпульсу a -ої частинки (див. рівняння (3.17)). Радіаційна компонента описує "далекосяжне" випромінювання, яке покидає заряди і розсіюється в просторі. Точний баланс енергії, імпульсу та моменту імпульсу замкненої системи з двох зарядів та генерованого ними поля призводить до рівнянь руху в термінах змінних частинок [12]. Це – рівняння руху Лоренца-Дірака, у яких враховано як взаємодію між частинками, так і самодію.

Додаток. Інтерференційний внесок у "причастинкові" енергію та імпульс електромагнетного поля

Інтегрування доданків $\hat{T}_{\text{int},2}$ та $\hat{T}_{\text{int},3}$ над гіперплощиною Σ_t містить нековаріантні розбіжні вирази, які залежать від швидкостей частинок у момент спостереження t і від відстані між частинками та Σ_t . Наприклад, інтегрування $\hat{T}_{\text{int},2}$ дає такий вираз для потоку енергії-

імпульсу:

$$p_{\text{bnd},2}^{\mu} = \frac{1}{2} \left(p_{\text{bnd},2(12)}^{\mu} + p_{\text{bnd},2(21)}^{\mu} \right) \quad (\text{A.1})$$

де нульові компоненти мають вигляд

$$\begin{aligned} p_{\text{bnd},2(12)}^0 &= \frac{e_1 e_2}{2} \lim_{t_2 \rightarrow t} \frac{1}{t - t_2} \left[\frac{1}{[1 + (\mathbf{n}_q \mathbf{v}_2)]} + \frac{1}{[1 - (\mathbf{n}_q \mathbf{v}_2)]} - 2 \right]_{t_1 = t_1^{\text{ret}}(t)} \quad (\text{A.2}) \\ p_{\text{bnd},2(21)}^0 &= \frac{e_1 e_2}{2} \lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{1}{t - t_1} \left[\frac{1}{[1 - (\mathbf{n}_q \mathbf{v}_1)]} + \frac{1}{[1 + (\mathbf{n}_q \mathbf{v}_1)]} - 2 \right]_{t_2 = t_2^{\text{ret}}(t)}. \end{aligned}$$

(Символом $\mathbf{n}_q = \mathbf{q}/q$ ми позначили одиничний 3-вектор відносної віддалі між частинками $\mathbf{q} = \mathbf{z}_1(t_1) - \mathbf{z}_2(t_2)$.) Просторові компоненти мають також скінченні доданки:

$$\begin{aligned} p_{\text{bnd},2(12)}^i &= \frac{e_1 e_2}{2} \lim_{t_2 \rightarrow t} \frac{1}{t - t_2} \left[\frac{v_2^i}{[1 + (\mathbf{n}_q \mathbf{v}_2)]} - \frac{v_2^i}{[1 - (\mathbf{n}_q \mathbf{v}_2)]} \right]_{t_1 = t_1^{\text{ret}}(t)} \quad (\text{A.3}) \\ &+ \frac{e_1 e_2}{t - t_2^{\text{ret}}(t)} \frac{v_2^i}{[1 - (\mathbf{n}_q \mathbf{v}_2)]} \Big|_{t_1 = t}, \\ p_{\text{bnd},2(21)}^i &= \frac{e_1 e_2}{2} \lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{1}{t - t_1} \left[\frac{v_1^i}{[1 - (\mathbf{n}_q \mathbf{v}_1)]} - \frac{v_1^i}{[1 + (\mathbf{n}_q \mathbf{v}_1)]} \right]_{t_2 = t_2^{\text{ret}}(t)} \\ &+ \frac{e_1 e_2}{t - t_1^{\text{ret}}(t)} \frac{v_1^i}{[1 + (\mathbf{n}_q \mathbf{v}_1)]} \Big|_{t_2 = t}. \end{aligned}$$

Інтегрування $\hat{T}_{\text{int},3}$ дає подібні вирази:

$$p_{\text{bnd},3}^{\mu} = \frac{1}{2} \left(p_{\text{bnd},3(12)}^{\mu} + p_{\text{bnd},3(21)}^{\mu} \right) \quad (\text{A.4})$$

де

$$\begin{aligned} p_{\text{bnd},3(12)}^0 &= \frac{e_1 e_2}{2} \lim_{t_2 \rightarrow t} \frac{1}{t - t_2} \left[\frac{1}{[1 + (\mathbf{n}_q \mathbf{v}_2)]} - \frac{1}{[1 - (\mathbf{n}_q \mathbf{v}_2)]} \right]_{t_1 = t_1^{\text{ret}}(t)} \quad (\text{A.5}) \\ &+ \frac{e_1 e_2}{t - t_2^{\text{ret}}(t)} \frac{1}{[1 - (\mathbf{n}_q \mathbf{v}_2)]} \Big|_{t_1 = t}, \\ p_{\text{bnd},3(21)}^0 &= \frac{e_1 e_2}{2} \lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{1}{t - t_1} \left[\frac{1}{[1 - (\mathbf{n}_q \mathbf{v}_1)]} - \frac{1}{[1 + (\mathbf{n}_q \mathbf{v}_1)]} \right]_{t_2 = t_2^{\text{ret}}(t)} \\ &+ \frac{e_1 e_2}{t - t_1^{\text{ret}}(t)} \frac{1}{[1 + (\mathbf{n}_q \mathbf{v}_1)]} \Big|_{t_2 = t}, \\ p_{\text{bnd},3(12)}^i &= \frac{e_1 e_2}{2} \lim_{t_2 \rightarrow t} \frac{1}{t - t_2} \left[\frac{n_q^i}{[1 - (\mathbf{n}_q \mathbf{v}_2)]} - \frac{n_q^i}{[1 + (\mathbf{n}_q \mathbf{v}_2)]} \right]_{t_1 = t_1^{\text{ret}}(t)}, \\ p_{\text{bnd},3(21)}^i &= \frac{e_1 e_2}{2} \lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{1}{t - t_1} \left[\frac{n_q^i}{[1 - (\mathbf{n}_q \mathbf{v}_1)]} - \frac{n_q^i}{[1 + (\mathbf{n}_q \mathbf{v}_1)]} \right]_{t_2 = t_2^{\text{ret}}(t)}. \end{aligned}$$

Згідно з критеріями Тейтельбойма [10], доданки $\hat{T}_{\text{int},2}$ та $\hat{T}_{\text{int},3}$ утворюють причастинкову компоненту інтерференційної частини (2.4) дво-частинкового тензора Максвелла (2.2). Оскільки вирази (A.2)-(A.5) нековаріантні, традиційний, оснований на розкладах у ряд Тейлора, аналіз не дає змоги виділити скінченні доданки, які модифікують 4-імпульси “одягнених” взаємодіючих зарядів. Вираз (3.17) отримано у [12] шляхом теоретико-групового аналізу збережуваних величин які, згідно з теоремою Нетер, впливають з інваріантності замкненої системи “частинки + поле” відносно перетворень з групи Пуанкаре.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] *Schott G.A.* Ann. der Phys. 1907. **34** 635; Electromagnetic radiation. (Cambridge, 1912).
- [2] *Dirac P.A.M.* Proc.Roy.Soc. A. 1938, **167**. 148.
- [3] *Schwinger J.* Phys.Rev. 1949, **75**. 1912.
- [4] *Тернов И.М.* Усп. Физ. Наук. 1995, **165**. 429.
- [5] *Кулипанов Г.Н.* Усп. Физ. Наук. 2007, **177**. 384.
- [6] *Hartemann F.V.* High-field electrodynamics. CRC Press LLC, Boca Raton, FL, 2002.
- [7] *Ringwald A.* Fundamental physics at X-ray free electron laser. 2001, arXiv: hep-ph/0112254.
- [8] <http://www.slac.stanford.edu/>
- [9] *Poisson E.* Living Rev. Relativity. 2004, **7**. Irr-2004-6. arXiv:gr-qc/0306052
- [10] *Teitelboim C.* Phys.Rev.D. 1970, **1**. 1572.
- [11] *Elder F.R., Langmuir R.V., Pollock H.E.* Phys.Rev. 1948, **74**. 52.
- [12] *Yaremko Yu.* J.Math.Phys. 2009, **50**. 112901.
- [13] *Wheeler J.A., Feynman R.P.* Rev.Mod.Phys. 1949, **21**. 425.

INTERFERENCE PART OF SYNCHROTRON RADIATION*Yurij YAREMKO*Institute for Condensed Matter Physics,
1 Svientsitskii St., 79011 Lviv, Ukraine

Energy-momentum and angular momentum carried by electromagnetic field of two point-like charged particles arbitrarily moving in flat spacetime are presented. Apart from usual contributions to the Noether quantities produced separately by particle 1 and particle 2, the conservation laws also contain a joint contribution due to the fields of both particles. The mixed part of Maxwell energy-momentum density is decomposed into bound and radiative components which are separately conserved off the world lines of particles. The former describes the deformation of electromagnetic clouds of “bare” charges due to mutual interaction while the latter defines the radiation which escapes to infinity. The bound terms contribute to individual 4-momenta of particles while the radiative ones exert the radiation reaction. The analysis of energy-momentum and angular momentum balance equations results in the Lorentz-Dirac equation as an equation of motion for a pointed charge under the effect of its own electromagnetic field as well as of the field produced by another charge.