

МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ ВІЛЬНОЇ ЧАСТИНКИ СИСТЕМОЮ НЕРУХОМИХ ПРИСКОРЮЮЧИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ ЗАРЯДІВ

Олена КУЗЬМИЧ

Волинський національний університет ім. Лесі Українки,
вул. Потапова 9, Луцьк 43000

Редакція отримала статтю 10 лютого 2010 р.

У статті розроблена математична модель лінійного прискорювача системою нерухомих зарядів. Прискорююча система складається з послідовно розташованих притягуючих пристроїв у випадках наявності притягуючих пар та притягуючих четвірок. Для вільної частинки сили, які діють в напрямках, перпендикулярних бажаній лінійній траєкторії, можуть розвинути нестійкість, що призведе до істотної зміни динамічної поведінки. У зв'язку з цим знайдені умови, за яких зберігається стійкість вільної частинки в такій системі. Встановлено умови, за яких ця система при послідовній нейтралізації найближчої пари зарядів по мірі наближення рухомого заряду буде прискорюючою системою і траєкторія руху заряду буде стійкою. Крім того, проведено чисельне моделювання динаміки та аналіз у програмі MatLab.

1. ВСТУП

Практичні задачі пов'язані з розробками нових технологій, зокрема з безконтактним екологічно чистим транспортом на магнітному підвісі. Останніми роками зростає кількість публікацій, присвячених проблемі стійкості надпровідних магнітних систем [4-6]. Це пов'язано з технічним значенням магнітної левітації в сучасній технології. Наприклад, магнітна підвіска вагону дасть змогу подолати бар'єр за швидкістю, що існує для колісного транспорту, значно зменшить шум і підвищить економічність наземного транспорту.

Переваги систем магнітної левітації порівняно із традиційними технічними рішеннями дають підставу сподіватись на важливі переваги. Тому в дослідженнях з магнітної левітації задіяний великий науково-технічний потенціал [1-3]. Останнім часом створені та впроваджені окремі прилади, виготовлені й випробувані зразки транспортних пристроїв з магнітною опорою. Цим успіхам значно сприяв прогрес, досягнутий в механіці, електродинаміці, технічній кібернетиці, прикладній надпровідності та інших областях.

Проте в області розвитку досліджень магнітної левітації існують ще невирішені проблеми. Такою проблемою, тісно пов'язаною з механікою і електродинамікою, є проблема стійкості магнітної системи. Вона розглядалася ще В. Гільбертом (1600) та Ірншоу (1842). Вони встановили факт нестійкості рівноваги. Доказ нестійкості рівноваги пов'язують зазвичай з ім'ям Ірншоу [9]. Для систем точкових електричних зарядів достатня умова мінімуму потенціальної енергії не виконується.

Але взаємодії точкових зарядів допускають стійкі траєкторії. Так, у 1926 р. Френкель вивчав будову атомного ядра, вважаючи його планетарною системою магнітно взаємодіючих частинок. Умова стійкості такої системи знайдена в монографії Козоріза [1]. Тут розглянута вільна матеріальна частинка в центральному силовому полі з потенційною енергією $U = -1/R^\varepsilon$, де R – відстань частинки до притягуючого центру, ε – додатна стала. Автором доведено, що R може бути рівним нулеві для $\varepsilon > 2$, що є умовою стійкості. Зокрема, для гравітаційної взаємодії двох точкових мас енергія U обернено пропорційна першому степеню відстані ($\varepsilon = 1 < 2$). Такий же закон має місце для електричної взаємодії двох точкових зарядів. У цій роботі також отримані результати про стійкість рівноваги і планетарної системи.

Крім того, теорія й області застосування ефекту стабілізації знакозмінною силою представлені в роботах [7, 8].

Ландау в свій час розглядав задачу одновимірного руху. Для будь-якого закону потенціальних сил вона має розв'язок. Але рухомі об'єкти реального світу мають більше ніж одну ступінь свободи, що призводить до особливостей побудови моделей таких систем. Тому особливості практичних задач зумовлюють необхідність побудови складніших моделей. А факт наявності більше однієї ступені свободи зумовлює складність побудови таких моделей та її аналіз.

В області дослідження транспортних систем на магнітному підвісі серед інших також виникають проблеми стабілізації. По-перше: є система, що забезпечує вільний стан – магнітна підвісна система левітації. По-друге, існує підсистема, що відповідає за забезпечення руху (прискорення та гальмування). Незважаючи на те, що є багато робіт, присвячених цій тематиці, вплив лінійного прискорювача, або мотора на стійкість руху вагону мало досліджений. Що стосується магнітного поля і моделі вільного твердого тіла (система з 6 степенями свободи) можна вказати [1, 2]. Хоча тут досліджується рух вільного тіла на обмеженому проміжку, але все ж не на всій траєкторії шляху, як це необхідно для лінійного прискорювача.

У цій роботі розглянуто простий приклад моделі руху тіла з трьома степенями свободи (електричного заряду) під дією безконтактних сил, який демонструє вплив лінійного прискорювача або гальмівника на динаміку руху та стійкість. Ця робота ставить за мету отримати особливості руху вільного тіла в системі на прикладі вільної частинки з трьома степенями свободи і визначити умови стійкості такої системи. Крім того, розглядаються особливості руху, коли система прискорює вільне тіло на нескінченному проміжку часу.

2. ПРИСКОРЮЮЧА СИСТЕМА У ВИПАДКУ ПРИТЯГУЮЧИХ ПАР

2.1. Побудова моделі

Розглянемо математичну модель динаміки руху зарядженої частинки в системі однакових заряджених частинок. Прискорююча система складається з послідовно розташованих притягуючих пристроїв (у простому випадку пар зарядів). Розглядувана система складається з окремих підсистем, які, як буде показано нижче, описуються системами диференціальних рівнянь з нелінійною правою частиною. Наведені системи моделюють рух заряду на окремих часових проміжках до досягнення моменту перемикання.

Прискорююча система складається із послідовно розміщених притягуючих пристроїв (пар зарядів). Для рухомої частинки сили, які діють в напрямку, що перпендикулярні бажаній лінійній траєкторії, можуть розвинути нестійкість, що призведе до суттєвої зміни динамічної поведінки. Розглянемо математичну модель динаміки руху зарядженої частинки в системі пар заряджених частинок.

Задача полягає в знаходженні таких умов, за яких ця система при послідовній нейтралізації найближчої пари зарядів по мірі наближення рухомого заряду буде прискорюючою системою і траєкторія руху заряду буде стійкою.

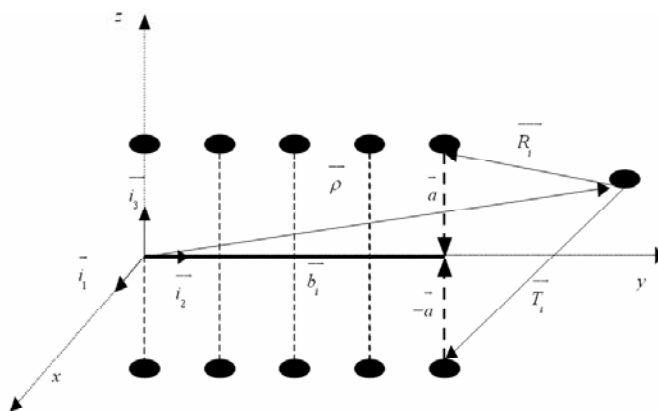


Рис. 1. Прискорююча система зарядженої частинки.

Нехай частинка рухається в напрямку, протилежному осі y . Позначимо a – відстань від заряду до осі y ; $i_t, i = \overline{0, n}$ – відстань від початку координат до системи пар зарядів; $q_1 = q_2 = \dots = q_N = q$ – заряджені частинки (рис. 1). Розглянемо випадок $N = 4$.

Припустимо, що відстань $a \ll \rho$. По мірі руху заряду по осі Oy на нього діють притягуючі пари, які по черзі вимикаються при досягненні зарядом певних значень координат y , що є межами областей стійкості системи в полі притягуючих пар. Будемо розглядати динаміку рухомого заряду в полі наборів притягуючих пар.

За виконаних припущень потенціальна енергія системи описується залежністю

$$\begin{aligned} U[\cdot] &= \sum_{i=0}^n \left\{ -\frac{q_1 q_2}{R_i} - \frac{q_1 q_2}{T_i} \right\} \\ &= -q_1 q_2 \sum_{i=0}^n \left\{ \frac{1}{R_i} + \frac{1}{T_i} \right\}. \end{aligned}$$

Підставивши значення

$$R_i(x, y, z) = \sqrt{x^2 + (it - y)^2 + (a - z)^2},$$

$$T_i(x, y, z) = \sqrt{x^2 + (it - y)^2 + (a + z)^2}, \quad i = \overline{0, n},$$

та врахувавши, що заряди однакові, отримаємо

$$U(x, y, z) = -q^2 \sum_{i=0}^n \left\{ \frac{1}{R_i(x, y, z)} + \frac{1}{T_i(x, y, z)} \right\}. \quad (1)$$

Кінетична енергія рухомої частинки має вигляд

$$T(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2). \quad (2)$$

Оскільки динаміка руху описується рівняннями Лагранжа другого роду

$$L_x - \frac{dL\dot{x}}{dt} = 0, \quad L_y - \frac{dL\dot{y}}{dt} = 0, \quad L_z - \frac{dL\dot{z}}{dt} = 0, \quad (3)$$

то підставивши в (3) значення кінетичної і потенціальної енергій, визначені в (1), (2), отримаємо

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad m\ddot{y} = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad m\ddot{z} = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

А оскільки

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= q^2 \sum_{i=0}^n \left(\frac{x}{R_i^3} + \frac{x}{T_i^3} \right), \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= -q^2 \sum_{i=0}^n \left(\frac{it - y}{R_i^3} + \frac{it - y}{T_i^3} \right), \\ \frac{\partial U}{\partial z} &= q^2 \sum_{i=0}^n \left(-\frac{a - z}{R_i^3} + \frac{a + z}{T_i^3} \right), \end{aligned}$$

система рівнянь динаміки руху частинки в повній формі мають вигляд

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\frac{q^2}{m} \sum_{i=0}^n \left(\frac{x}{R_i^3} + \frac{x}{T_i^3} \right), \\ \ddot{y} &= \frac{q^2}{m} \sum_{i=0}^n \left(\frac{it - y}{R_i^3} + \frac{it - y}{T_i^3} \right), \\ \ddot{z} &= \frac{q^2}{m} \sum_{i=0}^n \left(\frac{a - z}{R_i^3} - \frac{a + z}{T_i^3} \right).\end{aligned}\quad (4)$$

2.2. Аналіз динаміки частинки в програмі MatLab

Розглянемо спочатку спрощений випадок двох нерухомих зарядів: $n = 0$. Отримаємо періодичну залежність кожної координати від часу.

Так, часова залежність координати $X(t)$ на невеликому проміжку часу зображена на рис. 2.

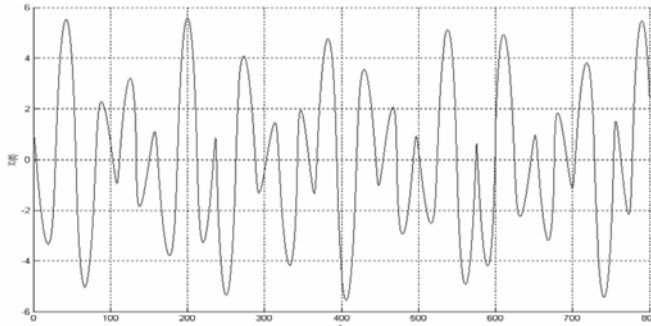


Рис. 2. Часова залежність динаміки координати $X(t)$ при $t \in [0, \dots, 800]$.

Для осі $Y(t)$ у випадку $t \in [0, \dots, 9000]$ маємо асимптотичне наближення до притягуючого центру (див. рис. 3).

Нарешті, побудуємо модель траєкторії руху частинки у розглядуваному нами випадку двох нерухомих зарядів. Для початкового відхилення $\Delta z > 0$ отримаємо траєкторію, зображену на рис. 4.

Припустимо, що рух відбувається в площині yOz . Тоді координата $x \equiv 0$ і система рівнянь (4) спрощується:

$$\begin{aligned}\ddot{y} &= -\frac{q^2}{m} \left(\frac{y}{[y^2 + (a - z)^2]^{3/2}} + \frac{y}{[y^2 + (a + z)^2]^{3/2}} \right), \\ \ddot{z} &= \frac{q^2}{m} \left(\frac{a - z}{[y^2 + (a - z)^2]^{3/2}} - \frac{a + z}{[y^2 + (a + z)^2]^{3/2}} \right).\end{aligned}$$

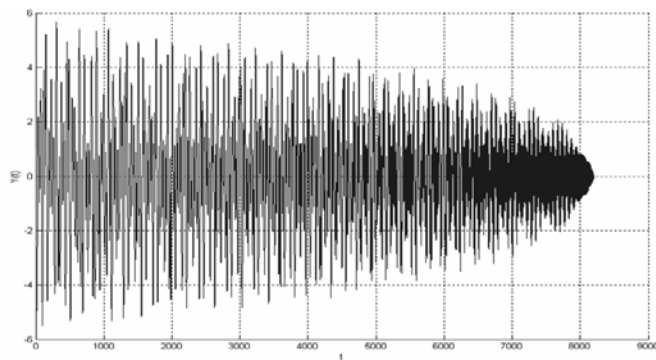


Рис. 3. Часова залежність динаміки координати $Y(t)$ при $t \in [0, \dots, 9000]$.

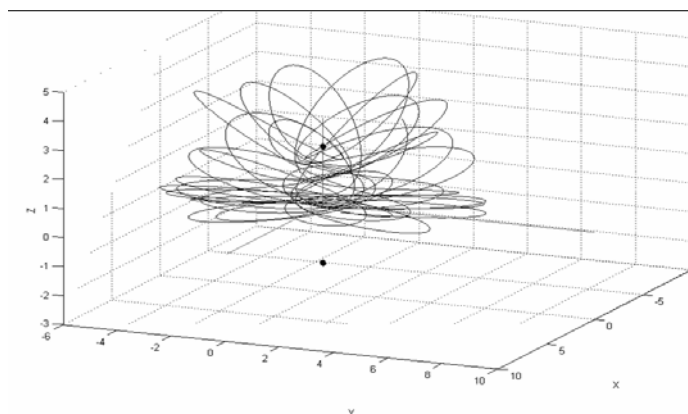


Рис. 4. Динаміка руху зарядженої частинки в системі координат (x, y, z) .

Відповідна модель траєкторії частинки зображена на рис. 5.

2.3. Отримання умов стійкості

Проведемо аналіз траєкторії рухомого заряду в полі прискорюючих пар. Розкладемо в ряд потенціальну енергію заряду в околі малих z .

$$U(x, y, z) \approx -2\frac{1}{R} + \left(\frac{1}{R^3} - \frac{12}{R^5}\right)z^2 + \frac{x^2}{R^3},$$

де

$$R = \sqrt{4 + y^2 - 2y \cdot hi + hi^2}$$

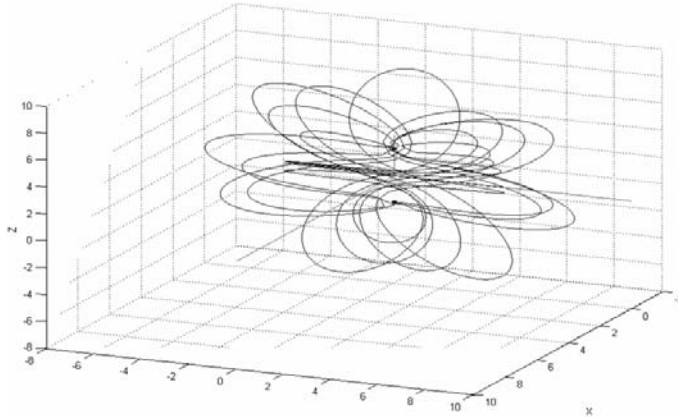


Рис. 5. Динаміка руху частинки в площині yOz .

Знайдемо координати критичних точок, до досягнення яких рух заряду буде стійкий.

$$\sqrt{4 + y^2 - 2y \cdot hi + hi^2} \geq 3,48.$$

Звідси y при $hi = 0,3$ рівне: на початку руху за наявності чотирьох притягуючих пар $y_4 \geq 5,9$. Після виключення четвертої пари і наявності трьох притягуючих пар маємо $y_3 \geq 4,9$. За наявності двох притягуючих пар одержимо $y_2 \geq 3,8$. За наявності однієї притягуючої пари $y_1 \geq 2,8$. У програмі MatLab одержимо динаміку частинки у випадку стійкої траєкторії, зображеної на рис. 6.

3. МОДЕЛЬ ПРИСКОРЮЮЧОЇ СИСТЕМИ У ВИПАДКУ ПРИТЯГУЮЧИХ ЧЕТВІРОК

3.1. Побудова моделі

Розглянемо випадок прискорюючих четвірок зарядів (рис. 7). Використовуючи вищевведені позначення складемо систему рівнянь, що описує рух частинки.

За зроблених припущень потенціальна енергія системи описується залежністю

$$U(x, y, z) = -q_1 q_2 \sum_{i=0}^n \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right).$$

де

$$R_1 = \sqrt{x^2 + (it - y)^2 + (a - z)^2}$$

$$R_2 = \sqrt{x^2 + (it - y)^2 + (a + z)^2}$$

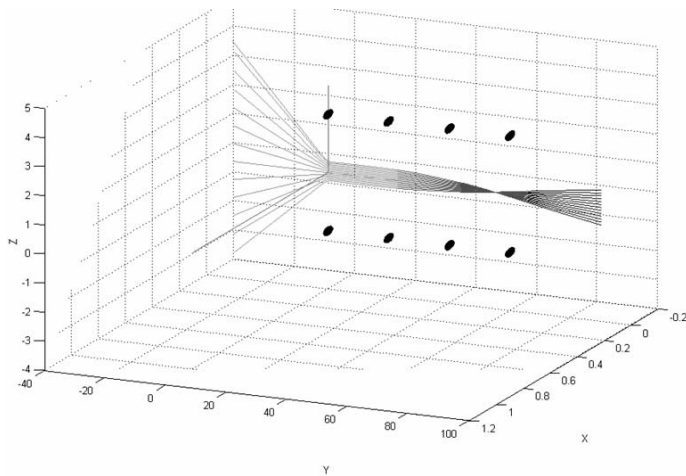


Рис. 6. Стійка траєкторія руху частинки при наявності чотирьох притягуючих пар.

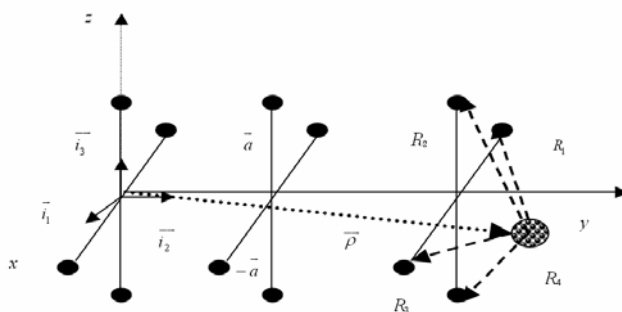


Рис. 7. Система прискорюючих четвірок зарядів.

$$R_3 = \sqrt{z^2 + (it - y)^2 + (x - a)^2}$$

$$R_4 = \sqrt{z^2 + (it - y)^2 + (x + a)^2}.$$

Оскільки всі заряди однакові, отримаємо

$$U(x, y, z) = -q^2 \sum_{i=0}^n \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) \quad (5)$$

З рівнянь Лагранжа другого роду отримаємо рівняння руху з урахуванням того, що

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x} &= q^2 \sum_{i=0}^n \left(\frac{x}{R_1^3} + \frac{x}{R_2^3} + \frac{x-a}{R_3^3} + \frac{x}{R_4^3} \right) \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= -q^2 \sum_{i=0}^n \left(\frac{it-y}{R_1^3} + \frac{it-y}{R_2^3} + \frac{it-y}{R_3^3} + \frac{it-y}{R_4^3} \right) \\ \frac{\partial U}{\partial z} &= q^2 \sum_{i=0}^n \left(-\frac{a-z}{R_1^3} + \frac{a+z}{R_2^3} + \frac{z}{R_3^3} + \frac{z}{R_4^3} \right).\end{aligned}$$

Таким чином система рівнянь динаміки руху частинки в повній формі мають вигляд

$$m\ddot{x} = -q^2 \sum_{i=0}^n \left(\frac{x}{R_1^3} + \frac{x}{R_2^3} + \frac{x-a}{R_3^3} + \frac{x}{R_4^3} \right) \quad (6)$$

$$m\ddot{y} = q^2 \sum_{i=0}^n \left(\frac{it-y}{R_1^3} + \frac{it-y}{R_2^3} + \frac{it-y}{R_3^3} + \frac{it-y}{R_4^3} \right) \quad (7)$$

$$m\ddot{z} = -q^2 \sum_{i=0}^n \left(-\frac{a-z}{R_1^3} + \frac{a+z}{R_2^3} + \frac{z}{R_3^3} + \frac{z}{R_4^3} \right). \quad (8)$$

3.2. Аналіз моделі

Проведемо аналіз траєкторії рухомого заряду в полі прискорюючих четвірок. Розкладемо в ряд потенціальну енергію заряду в околі малих z .

$$U(x, y, z) \approx -\frac{4}{R} - \left(-\frac{2}{R^3} + \frac{12}{R^5} \right) z + \left(-\frac{2}{R^3} + \frac{12}{R^5} \right) x,$$

де

$$R = \sqrt{4 + y^2 - 2y \cdot hi + hi^2}.$$

Знайдемо координати критичних точок, до досягнення яких рух заряду буде стійкий. Маємо:

$$\frac{2}{R^3} - \frac{12}{R^5} \geq 0,$$

$$\sqrt{4 + y^2 - 2y \cdot hi + hi^2} \geq 1.22.$$

Звідси y при $hi = 0,3$ рівне на початку руху за наявності чотирьох притягуючих четвірок $y_4 \geq 4,41$. Після виключення четвертої пари і наявності трьох притягуючих четвірок $y_3 \geq 3,41$. За наявності двох притягуючих четвірок $y_2 \geq 2,41$.

У результаті стійка траєкторія руху частинки під дією двох притягуючих четвірок має вигляд, поданий на рис. 8.

За наявності однієї притягуючої четвірки $y_1 \geq 1,41$ моделювання в програмі MatLab показано на рис. 9.

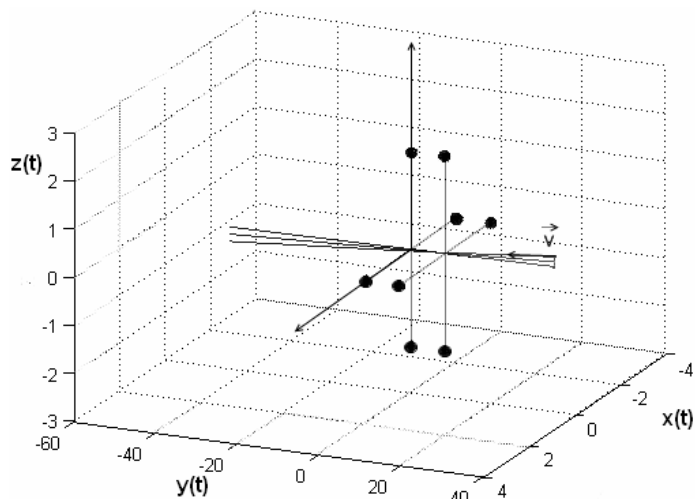


Рис. 8. Стійка траєкторія руху частинки під дією двох притягуючих пар.

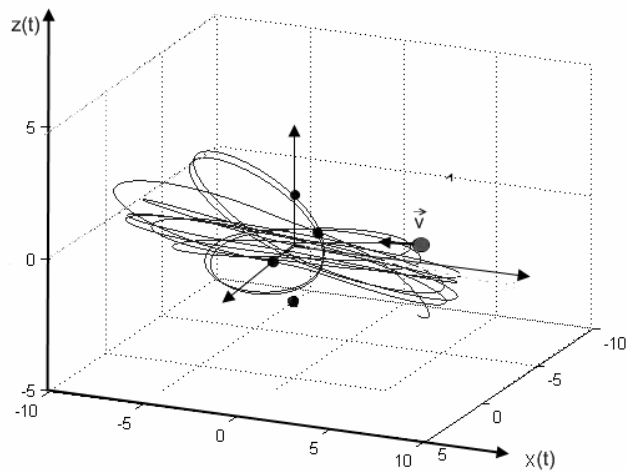


Рис. 9. Динаміка руху заряду за наявності однієї притягуючої четвірки.

4. ВИСНОВКИ

У статті побудовано модель руху тіла з трьома степенями свободи (електричного заряду) під дією безконтактних сил, яка демонструє

вплив лінійної прискорювальної транспортної системи на стійкість динаміки руху вільного тіла.

Досліджено особливості руху вільного тіла в системі на прикладі вільної частинки з трьома степенями свободи в середовищі MatLab.

З умови мінімуму потенціальної енергії знайдено умови, за яких ця система при послідовній нейтралізації найближчої притягуючої пари зарядів із наближенням рухомого заряду залишається прискорюючою системою, а також умови стійкості траєкторії руху заряду.

Проведено математичне моделювання в середовищі MatLab динаміки руху зарядженої частинки при врахуванні знайдених умов стійкості траєкторії.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] *Козорез В.В.* Динамические системы магнитно взаимодействующих свободных тел. К.: Наук. думка, 1981. 140 с.
- [2] *Козорез В.В., Терешина Т.Б.* Устойчивость систем с магнитным взаимодействием. К.: 1993. 34 с. *уточнити видавництво*
- [3] *Михалевич В.С., Козорез В.В., Рашкован В.М.* Динамика точечного заряда в магнитном поле двух соосных идеально электропроводящих колец. К.:1989. 37 с. *уточнити видавництво*
- [4] *Буккель В.* Сверхпроводимость. М.: Мир, 1975. 366 с.
- [5] *Иваса И.* Высокоскоростной общественный наземный транспорт на магнитной подушке. В кн.: Сверхпроводящие машины и устройства / Под. ред. С.Фонера, Б.Шварца. М.: Мир, 1977. 370–421.
- [6] *Кресин В.З.* Сверхпроводимость и сверхтекучесть. М.: Наука, 1978. 190 с.
- [7] *Самойленко Ю.И.* Эффект отрицательной восприимчивости динамических систем и его применение для стабилизации неустойчивых объектов. Изв.АН СССР. Автоматика и телемеханика. 1978. №5. 11–21.
- [8] *Heide H.* Stabilization by oscillation. Philips Tech.Rev., 1974, 34, № 2/3. 61–72.
- [9] *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. М.: Наука, 1966. 624 с.

**MODELLING OF THE DYNAMICS OF A FREE PARTICLE BY
THE SYSTEM OF IMMOBILE ACCELERATING ELECTRIC
CHARGES**

Olena KUZMYCH

Volyn National University of Lesya Ukrainka
Potapova av. 9, Lutsk 43000

In the article, the mathematical model of linear acceleration by the system of immobile charges is developed. The accelerating system consists of consistently located attracting devices in the cases of the presence of attracting pairs and attracting fours. For a free particle, the forces that operate in the directions perpendicular to the desired linear trajectory can develop an instability which will lead to a substantial change of the dynamic behaviour. Terms at which the stability of a free particle is saved in such a system are expected. Terms are found at which such a system will be the accelerating system during successive neutralization of the nearest pair of charges approaching the mobile charge, and thus the trajectory of motion of a charge will be stable. In addition, the numerical modelling of the dynamics and the analysis are made in the program of MatLab.