ПОБУДОВА СПІНОРНОГО ПІДХОДУ ДО РОЗЩЕПЛЕННЯ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ МАКСВЕЛЛА У РІМАНОВОМУ ПРОСТОРІ

Володимир ПЕЛИХ, Юрій ТАЙСТРА

Інститут прикладних проблем механіки та математики
імені Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова 3-б, Львів 79060

Редакція отримала статтю 10 липня 2010 р.

Отримано рівняння другого порядку електромагнітного поля при калібровці Лоренца в термінах скалярів Ньюмена-Пенроуза та критерій розщеплюваності отриманої системи рівнянь.

1. ВСТУП

Основним носієм інформації про позаземні об'єкти є електромагнітне випромінювання. При вивченні об'єктів і явищ, існування яких перебачається загальною теорією відносності, необхідно враховувати взаємодію електромагнітного поля з гравітаційним і внаслідок цього використовувати рівняння Максвелла у рімановому просторі. При цьому головна складність не лише в розв'язуванні, але навіть і в якісному і чисельному аналізі рівнянь електромагнітного поля породжується утворенням у рімановому просторі зв'язаної структури системи рівнянь Максвелла. Стандартні методи, які використовуються при розгляді плоского простору-часу, незастосовні у загальній теорії відносності, оскільки у рімановому просторі-часі рівняння системи є пов'язаними незалежно від усіх можливих їх подань та калібрувальних умов. У роботі Когена та Кегелеса [1] розвинуто підхід до побудови розв'язків рівнянь Максвелла у викривленому просторі на основі використання додаткових симетрій цих рівнянь, відомих під назвою формалізму потенціалів Герца, та узагальнення двокомпонентного підходу Дебая (потенціали Герца-Бромвіча-Дебая-Вітеккера-Пенроуза). Авторами встановлено, що формалізм Герца може бути розширений до всіх викривлених просторів, а формалізм Дебая може бути розширений до просторів типу D за класифікацією Петрова, які охоплюють, в основному, усі простори, змістовні з точки зору астрофізики. В цих просторах застосування потенціалів Герца та підходу Дебая зводить систему рівнянь Максвелла до відокремлених лінійних хвильових рівнянь для бівектор-потенціалу (2-форми) поля. У статті [2]

PACS number 04.40.-b

Коген та Кегелес поширили свій метод на рівняння Вейля та розвинули його для опису електромагнітних, нейтринних і гравітаційних збурень алгебрично-спеціальних полів. У статті [3] його використано для визначення сили гравітаційної самодії у полі Керра. Альтернативні до методу Когена і Кегелеса підходи до вивчення збурень, які також ґрунтуються на відокремленні рівнянь (розщепленні системи рівнянь) розвинули Хшановскі [4], Стюарт [5] і Валд [6], однак всі вони також припускають, що простори є алгебрично-спеціальними. Оскільки усі застосовувані до цього часу умови розщеплення є достатніми, становить інтерес аналіз можливостей отримання розв'язків рівнянь Максвелла шляхом розщеплення системи рівнянь у більш загальних просторах, які не є алгебрично-спеціальними або їх збуреннями. З цією метою ми встановимо умови, за яких система рівнянь Максвелла другого порядку з умовою Лоренца у тетраді Ньюмена-Пенроуза у поданні через спінор-потенціал зводиться до системи рівнянь трикутного вигляду, що означає, що n-те рівняння системи містить лише n невідомих функцій. Істотним при цьому є те, що ці умови не зводяться до умов, які виділяють простір типу D як у працях, згаданих вище.

2. СИСТЕМА РІВНЯНЬ МАКСВЕЛЛА ДРУГОГО ПОРЯДКУ У ФОРМАЛІЗМІ СПІНОВИХ КОЕФІЦІЄНТІВ

У загальноковаріантному вигляді система рівнянь Максвелла подається у вигляді:

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c} J^\mu,$$

$$\nabla_\alpha F_{\beta\gamma} + \nabla_\beta F_{\gamma\alpha} + \nabla_\gamma F_{\alpha\beta} = 0,$$

$F_{\mu\nu}$ — тензор електромагнітного поля, J^μ — 4-вектор густини струму, ∇_ν — оператор коваріантної похідної.

Використовуючи подання тензора електромагнітного поля через вектор потенціал $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, калібрувальну умову Лоренца та розглядаючи однорідну систему ($J^\mu = 0$), отримуємо систему рівнянь

$$\nabla_b(\nabla^b A^a) - R^a_c A^c = 0, \tag{1}$$

де A^a — вектор-потенціал електромагнітного поля, R^a_c — тензор Річчі. Вектор-потенціал електромагнітного поля записуємо в ізотропній тетраді Ньюмена-Пенроуза (НП-тетраді):

$$A^a = A_0 l^a + A_1 n^a + A_2 m^a + A_3 \bar{m}^a, \tag{2}$$

де A_0, A_1, A_2, A_3 — компоненти розкладу вектора A^a у НП-тетраді, або компоненти "спінор-потенціалу" електромагнітного поля; $l^a = o^A o^{A'}$, $n^a = \iota^A \iota^{A'}$, $m^a = o^A \iota^{A'}$, $\overline{m}^a = \iota^A o^{A'}$ — ізотропна тетрада Ньюмена-Пенроуза. Оператор коваріантної похідної подається у вигляді:

$$\nabla_a = g^b_a \nabla_b = (l_a n^b + n_a l^b - m_a \bar{m}^b - \bar{m}_a m^b)\nabla_b = n_a D + l_a \Delta - \bar{m}_a \delta - m_a \bar{\delta}, \tag{3}$$

де $D = l^a\nabla_a$, $\Delta = n^a\nabla_a$, $\delta = m^a\nabla_a$, $\bar\delta = \bar m^a\nabla_a$ — оператори похідних за напрямками ізотропної тетради.

Тензор Річчі в НП-тетраді має вигляд:

$$R^a_c = 2(\Phi_{00}n^a n_c - \Phi_{01}n^a\bar m_c + \Phi_{02}\bar m^a\bar m_c - \Phi_{10}n^a m_c + \Phi_{11}n^a l_c - \Phi_{12}\bar m^a l_c +$$

$$\Phi_{20}m^a m_c - \Phi_{21}m^a l_c + \Phi_{22}l^a l_c) - 6\Lambda(l^a n_c + n^a l_c - m^a\bar m_c - \bar m^a m_c), \qquad (4)$$

де Φ_{ij} — компоненти спінорного зображення девіатора тензора Річчі ($2\Phi_{ij} = R_{ij} - Rg_{ij}/4$), Λ — скалярна кривина ($\Lambda = -1/24\cdot R$).

Використаємо представлення (2)–(4), вираз для компонент Φ_{ij} через скаляри Ньюмена-Пенроуза (НП-скаляри), інші властивості спінових коефіцієнтів та отримаємо наступний вигляд системи рівнянь Максвелла:

$$D\Delta A\begin{pmatrix} D\Delta A_0\\ D\Delta A_1\\ D\Delta A_2\\ D\Delta A_3\end{pmatrix} + \delta\bar\delta A\begin{pmatrix} \delta\bar\delta A_0\\ \delta\bar\delta A_1\\ \delta\bar\delta A_2\\ \delta\bar\delta A_3\end{pmatrix} + DA\begin{pmatrix} DA_0\\ DA_1\\ DA_2\\ DA_3\end{pmatrix} + \Delta A\begin{pmatrix} \Delta A_0\\ \Delta A_1\\ \Delta A_2\\ \Delta A_3\end{pmatrix} +$$

$$+\delta A\begin{pmatrix} \delta A_0\\ \delta A_1\\ \delta A_2\\ \delta A_3\end{pmatrix} + \bar\delta A\begin{pmatrix} \bar\delta A_0\\ \bar\delta A_1\\ \bar\delta A_2\\ \bar\delta A_3\end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} A_0\\ A_1\\ A_2\\ A_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}, \qquad (5)$$

де $D\Delta A$, $\delta\bar\delta A$, DA, ΔA, δA, $\bar\delta A$, A — матриці коефіцієнтів при відповідних похідних, які мають наступний вигляд:

$$D\Delta A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}, \ \delta\bar\delta A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{pmatrix},$$

$$DA = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & 2\bar\nu & 2\nu\\ 0 & D_2 & -2\tau & -2\bar\tau\\ -2\bar\tau & 2\nu & D_3 & 0\\ -2\tau & 2\bar\nu & 0 & D_4\end{pmatrix},$$

де

$$D_1 = 2\gamma + 2\bar\gamma + 2\mu - \bar\mu + \bar\lambda, \ D_2 = -2\gamma - 2\bar\gamma + 2\mu - \bar\mu + \bar\lambda,$$

$$D_3 = 2\gamma - 2\bar\gamma + 2\mu - \bar\mu + \bar\lambda, \ D_4 = -2\gamma + 2\bar\gamma + 2\mu - \bar\mu + \bar\lambda,$$

$$\Delta A = \begin{pmatrix} 4\varepsilon + 4\bar\varepsilon - \bar\sigma - \bar\rho & 0 & 2\bar\pi & 2\pi\\ 0 & -\bar\sigma - \bar\rho & -2\kappa & -2\bar\kappa\\ -2\bar\kappa & 2\pi & 4\varepsilon - \bar\sigma - \bar\rho & 0\\ -2\kappa & 2\bar\pi & 0 & 4\bar\varepsilon - \bar\sigma - \bar\rho\end{pmatrix},$$

$$\delta A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & -2\bar{\mu} & -2\lambda \\ 0 & A_2 & -2\rho & -2\bar{\sigma} \\ 2\bar{\sigma} & -2\bar{\lambda} & A_3 & 0 \\ 2\rho & -2\bar{\mu} & 0 & A_4 \end{pmatrix}, \quad \bar{\delta} A = \begin{pmatrix} A_5 & 0 & -2\bar{\lambda} & -2\mu \\ 0 & A_6 & 2\sigma & 2\bar{\rho} \\ 2\bar{\rho} & -2\bar{\mu} & A_7 & 0 \\ 2\sigma & -2\bar{\lambda} & 0 & A_8 \end{pmatrix},$$

де $A_1 = -\bar{\alpha} - 3\bar{\beta} - 2\pi$, $A_2 = 4\alpha - \bar{\alpha} + \bar{\beta} - 2\pi$, $A_3 = -\bar{\alpha} + \bar{\beta} - 2\pi$, $A_4 = -\bar{\alpha} + 4\alpha - 3\bar{\beta} - 2\pi$, $A_5 = -\bar{\alpha} - 4\beta + \bar{\beta} - 2\bar{\pi}$, $A_6 = 3\bar{\alpha} + \bar{\beta} - 2\bar{\pi}$, $A_7 = 3\bar{\alpha} - 4\beta + \bar{\beta} - 2\bar{\pi}$, $A_8 = -\bar{\alpha} + \bar{\beta} - 2\bar{\pi}$, $A = ||A_{ij}||$,
$A_{ij} = A_{ij}(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \kappa, \tau, \sigma, \rho, \pi, \nu, \mu, \lambda)$ — деякі білінійні форми.

Як бачимо, система є діагональною відносно других похідних, але рівняння системи зв'язуються через перші похідні та самі невідомі функції. Аналізуючи структуру операторів у системі рівнянь (5), можемо побудувати розщеплену систему рівнянь шляхом накладання відповідних умов на НП-скаляри, щоб забезпечити послідовне розщеплення системи рівнянь. Як наслідок цього аналізу отримуємо, що для того, щоб вона була послідовно розщепленою достатньо (і необхідно), щоб виконувались наступні додаткові умови для спінових коефіцієнтів:

$$\kappa = \sigma = \rho = \tau = \varepsilon = \alpha = 0. \tag{6}$$

При цьому послідовно відокремлюються друге, четверте, третє, перше рівняння системи.

3. ВИБІР УМОВ НА КОЕФІЦІЄНТИ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ МАКСВЕЛЛА І ПЕРЕТВОРЕННЯ СПІНОВОЇ БАЗИ

Умови, які надають НП-скалярам чи функціям від них певних заданих значень, називатимемо додатковими. Умови (6) є їх частковим випадком. Додаткові умови можуть обмежувати не лише вибір спінорної бази, але й геометрію простору. Розглянемо унімодулярні перетворення спінорної бази o^A, ι^B , які зберігають умови її нормованості і ортогональності, і шляхом застосування яких здійснюється вибір спінорної бази. Їх можна подати у вигляді трьох незалежних груп перетворень:

$$I \quad \begin{cases} \tilde{o}^A = p o^A; \\ \tilde{\iota}^A = p^{-1} \iota^A; \end{cases} \qquad II \quad \begin{cases} \tilde{o}^A = o^A; \\ \tilde{\iota}^A = \iota^A + c o^A; \end{cases} \qquad III \quad \begin{cases} \tilde{o}^A = o^A + d\iota^A; \\ \tilde{\iota}^A = \iota^A; \end{cases} \tag{7}$$

де p, c, d — довільні комплексні функції.

Відносно перетворень (7) НП-скаляри перетворюються за відомими законами. Додаткові умови називатимемо калібрувальними, якщо перетворення з груп (7) існують, тобто, система нелінійних диференціальних рівнянь першого порядку для функцій p, c, d, отримана із співвідношень для НП-скалярів, є сумісною і її розв'язок існує. Аналіз умов сумісності та існування розв'язку цієї системи рівнянь в кожному окремому випадку додаткових умов визначає, чи вони є калібрувальними у просторі загального типу, або ж вони обмежують геометрію простору і тому є калібрувальними у просторах алгебрично-спеціальних типів. Такий аналіз є окремим завданням значної математичної складності і буде проведений у наступних дослідженнях. Проте вже при отриманих вище умовах розщеплення системи рівнянь Максвелла (6) шляхом безпосередніх обчислень отримуємо, що компоненти спінора Вейля, отримані із означення тензора Рімана (рівняння "поля"), набувають таких значень:

$$\Psi_0 = 0, \quad \Psi_1 = D\beta, \quad \Psi_2 = \frac{1}{3}(D\gamma - \pi\beta - \pi\tau + (\bar{\delta} + \bar{\beta})\beta + D\mu - (\delta + \bar{\pi} + \beta)\pi),$$

$$\Psi_3 = (\bar{\delta} + \bar{\beta})\gamma - \beta\lambda, \quad \Psi_4 = (\Delta + \mu + \bar{\mu} + 3\gamma - \bar{\gamma})\lambda - (\bar{\delta} + 3\alpha + \bar{\beta} + \pi)\nu.$$

Звідси, враховуючи класифікацію типів простору за скалярними компонентами тензора Вейля, приходимо до висновку, що при виконанні умов (6) ріманів простір належить до типу I за Петровим, тобто є алгебрично-загальним.

4. ОБГОВОРЕННЯ

Добре відомо, що аналітичне чи наближене розв'язання або якісний аналіз розв'язків векторних і тензорних рівнянь у рімановому просторі створюють істотні труднощі. Такою ж складною проблемою є і числове розв'язання таких рівнянь, тому актуальним є розроблення нових підходів до їх розв'язування. Розвиваючи один із таких підходів, ми отримали систему рівнянь Максвелла з умовами Лоренца у вигляді системи рівнянь другого порядку для чотирьох невідомих функцій, які є скалярами відносно перетворень координатної бази — спінорних потенціалів електромагнітного поля.

Для розщеплення системи запропоновано підхід, який полягає у послідовному відокремленні рівнянь за рахунок додаткових умов. Такий підхід дозволив отримати менш обмежуючі додаткові умови на спінові коефіцієнти у порівнянні із дослідженням [1, 2, 3, 6]. Три умови з посеред умов (6) можуть бути вибраними як калібрувальні, а інші, хоча і вимагають обмеження геометрії, однак не зводяться лише до запропонованого у роботі [1] обмеження алгебричної загальності простору до типу D.

ЛІТЕРАТУРА

[1] *Cohen J. M., Kegeles L. S.* Phys. Rev. D. 1974. **10**. 1070–1084.

[2] *Cohen J. M., Kegeles L. S.* Phys. Rev. D. 1979. **19**. 1641–1664.

[3] *Keidl T. S., Shah A. G., Friedman J. L., Dong-Hoon Kim, Price L. R.* http://arxiv.org/abs/1004.2276v3.

[4] *Chrzanowski P. L.* Phys. Rev. D. 1975. **11**. 2042–2062.

[5] *Stewart J. M.* Proc. R. Soc. London, Series A. 1979 **367**. 527–538.

[6] *Wald R. M.* Phys. Rev. Lett. 1978. **41**. 203–206.

SPINOR APPROACH FOR MAXWELL EQUATIONS SPLITTING IN RIEMANNIAN SPACE

Volodymyr PELYKH, Yurij TAISTRA

Pidstryhach Institute for Applied Problems in Mechanics and Mathematics,
Ukrainian National Academy of Sciences,
3[b] Naukova Str., L'viv 79060

Two order system of equations of electromagnetic field under Lorentz gauge for Newman-Penrose scalars and a criterion of splitting for the system is obtained.